ЭКЗАМЕН

3

3. Изделие проверяется на соответствие стандарту одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу равно 0,6, ко второму 0,4. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано первым товароведом стандартным равна 0,9, для второго эта вероятность равна 0,8. При проверке стандартное изделие признано стандартным. Какова вероятность того, что изделие проверял второй товаровед? (*6 баллов*)

H_1: изделие попало к первому

H_2: изделие попало ко второму.

A: изделие стандартное

$P(H_1) = 0,6$

$P(H_2) = 0,4$

$P(A|H_1) = 0,9$

$P(A|H_2) = 0,8$

$P(A) = \sum P(H_i)P(A|H_i) = 0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,8 =$
$= 0,54 + 0,32 = 0,86$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,8}{0,86} = 0,37$$

3. Легковых автомобилей мимо бензоколонки проезжает в четверо больше, чем грузовых машин. Вероятность того, что проезжающая машина подъедет на заправку, составляет для грузовой машины 0.05, для легковой – 0.15. Только что от бензоколонки отъехала заправленная машина. Найдите вероятность того, что это была грузовая машина. (*6 баллов*)

H_1: лековая проехала

H_2: грузовая проехала

A: машина заехала

Всего 5 машин: 1 груз. и 4 легк.

$P(H_1) = \frac{4}{5} = 0,8$ $\quad P(H_2) = \frac{1}{5} = 0,2$

$P(A|H_1) = 0,15$ $\quad P(A|H_2) = 0,05$

$P(A) = \sum P(H_i)P(A|H_i) = 0,8 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,12 + 0,01 = 0,13$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,13} = 0,077$$

3. В ящике содержится 12 деталей завода N1, 20 деталей завода N2, 18 деталей завода N3. Вероятность того, что деталь завода N1 отличного качества равно 0.9, для деталей заводов N2 и N3 эти вероятности соответственно равны 0.6 и 0.9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества. (*6 баллов*)

Всего деталей: $12+20+18=50$

H_1: первый завод

H_2: второй завод

H_3: третий завод

A: деталь отличного качества

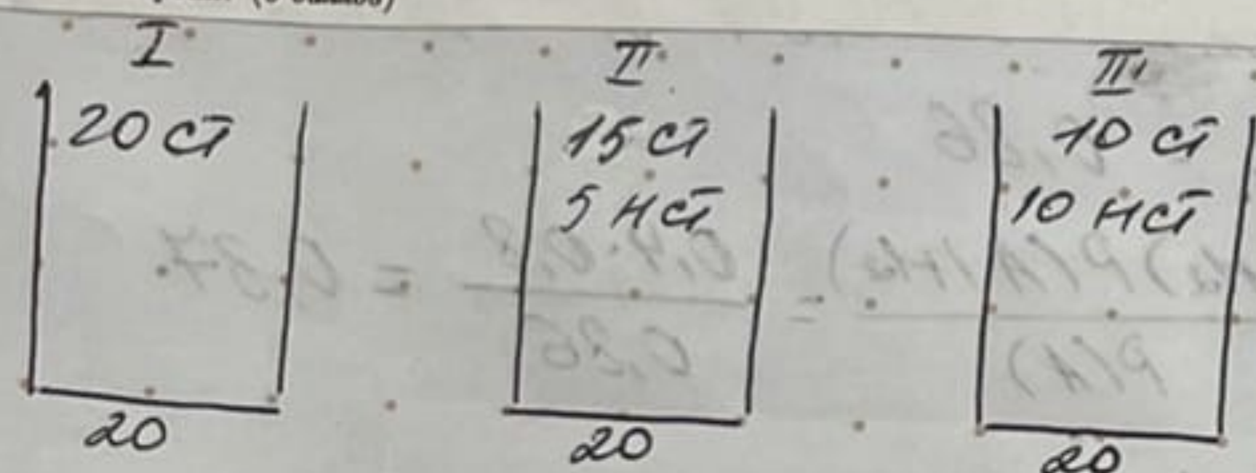
$P(H_1)=\frac{12}{50}=0{,}24 \quad P(H_2)=\frac{20}{50}=0{,}4 \quad P(H_3)=\frac{18}{50}=0{,}36$

$P(A|H_1)=0{,}9 \quad P(A|H_2)=0{,}6 \quad P(A|H_3)=0{,}9$

$P(A)=\sum P(H_i)P(A|H_i)=0{,}24\cdot 0{,}9+0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}36\cdot 0{,}9=$

$=0{,}216+0{,}24+0{,}324=0{,}78$

3. Имеется три партии по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15 и 10. Из наугад выбранной партии наудачу извлекается деталь, оказавшаяся стандартной, и возвращается обратно. Из той же партии вторично извлекается деталь, которая также оказалась стандартной. Какова вероятность того, что детали извлечены из третьей партии? (*6 баллов*)



A – ст изд-е

$P(H_1)=1/3$

$P(H_2)=1/3$

$P(H_3)=1/3$

$P(A|H_1)=1$

$P(A|H_2)=0{,}75$

$P(A|H_3)=0{,}5$

$P(A)=\sum P(H_i)P(A|H_i)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}75+\frac{1}{3}\cdot 0{,}5=0{,}75$

$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}5}{0{,}75}=\frac{0{,}5}{2{,}25}$

$P=P(H_3|A)\cdot P(A|H_3)=\frac{0{,}5}{2{,}25}\cdot 0{,}5=0{,}11$

3. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Когда он закидывает удочку, рыба клюет с вероятностью $p_1=0,8$ на первом месте; с вероятностью $p_2=0,7$ на втором месте и с вероятностью $p_3=0,6$ на третьем. Известно, что рыбак три раза закинул удочку и рыба клюнула только два раза. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте. (*6 баллов*)

H_1: на 1 месте

H_2: на 2 месте

H_3: на 3 месте

$P(H_1)=\frac{1}{3}$

$P(H_2)=\frac{1}{3}$

$P(H_3)=\frac{1}{3}$

A – рыба клюнула 2 раза из трех.

$P(A|H_1)=p_1\cdot p_1(1-p_1)+p_1(1-p_1)p_1+(1-p_1)p_1p_1=3p_1^2(1-p_1)$

$P(A|H_2)=3p_2^2(1-p_2)$

$P(A|H_3)=3p_3^2(1-p_3)$

$P(A|H_1)=0{,}384$

$P(A|H_2)=0{,}441$

$P(A|H_3)=0{,}432$

$P(A)=\sum P(H_i)P(A|H_i)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}384+\frac{1}{3}\cdot 0{,}441+\frac{1}{3}\cdot 0{,}432=$

$=0{,}419$

$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}384}{0{,}419}=0{,}305$

3. В копилке лежат три монеты по 10 руб. и семь монет по 5 руб. Наудачу извлекается сначала одна монета, а затем вторая. Вторая монета имеет достоинство 10 руб. Какова вероятность того, что и первая монета имеет достоинство 10 руб.? (6 баллов)

всего 10 монет

3 : 10руб 7 : 5 руб

если первая 10 руб:

$P_1 = \frac{3}{10}$

$P_2 = \frac{2}{9}$

$P = p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = 0{,}07$

3. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной цели, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель для первого стрелка - 0,8, для второго - 0,4. После стрельбы в цели обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в цель попал первый стрелок. (6 баллов)

H_1: первый стрелок

H_2: второй стрелок

A: попал

$P(H_1) = 1/2 = 0{,}5$

$P(H_2) = 1/2 = 0{,}5$

$P(A|H_1) = 0{,}8$

$P(A|H_2) = 0{,}4$

$P(A) = \sum P(H_i)P(A|H_i) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}6} = 0{,}67$

3. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8; 7 - с вероятностью 0.7; 4 - с вероятностью 0.6 и 2 - с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок выстрелил 3 раза и 1 раз попал в мишень. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот стрелок? (6 баллов)

H_1: 1 группа

H_2: 2 группа

H_3: 3 группа

H_4 = 4 группа

A: попал 1 раз из трех

$P(H_1) = \frac{5}{18} = 0{,}28$

$P(H_2) = \frac{7}{18} = 0{,}39$

$P(H_3) = \frac{4}{18} = 0{,}22$

$P(H_4) = \frac{2}{18} = 0{,}11$

$P(A|H_1) = p_1(1-p_1)(1-p_1) + (1-p_1)p_1(1-p_1) + (1-p_1)(1-p_1)p_1$

$P(A|H_1) = 3p_1(1-p_1)^2 = 0{,}096$

$P(A|H_2) = 3p_2(1-p_2)^2 = 0{,}189$

$P(A|H_3) = 3p_3(1-p_3)^2 = 0{,}288$

$P(A|H_4) = 3p_4(1-p_4)^2 = 0{,}375$

$P(A) = \sum P(H_i)P(A|H_i) = 0{,}28 \cdot 0{,}096 + 0{,}39 \cdot 0{,}189 + 0{,}22 \cdot 0{,}288 + 0{,}11 \cdot 0{,}375 = 0{,}02688 + 0{,}07371 + 0{,}06336 + 0{,}04125 = 0{,}2052$

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}28 \cdot 0{,}096}{0{,}2052} = 0{,}13$

$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}39 \cdot 0{,}189}{0{,}2052} = 0{,}36$

$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}22 \cdot 0{,}288}{0{,}2052} = 0{,}31$

$P(H_4|A) = \frac{P(H_4)P(A|H_4)}{P(A)} = \frac{0{,}11 \cdot 0{,}375}{0{,}2052} = 0{,}20$

Ответ: с вероятностью 0,36 стрелок был из 2 группы

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит автозаправочная станция, относится к числу легковых автомобилей как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0.1; для легковой машины эта вероятность равна 0.2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая. (*6 баллов*)

5 машин
3 гр 2 легк
H_1: проехала груз
H_2: проехала легк
A: заправилась

$P(H_1) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$P(H_2) = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$P(A|H_1) = 0{,}1$

$P(A|H_2) = 0{,}2$

$P(A) = \sum P(H_i)P(A|H_i) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 =$
$= 0{,}06 + 0{,}08 = 0{,}14$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}1}{0{,}14} = 0{,}43$$

3. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную с вероятностью 0.05. Определите вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту. (*6 баллов*)

H_1: деталь стандартная
H_2: деталь нестандартная
A: деталь прошла контроль

$P(H_1) = 0{,}96$

$P(H_2) = 0{,}04$

$P(A|H_1) = 0{,}98$

$P(A|H_2) = 0{,}05$

$P(A) = \sum P(H_i)P(A|H_i) = 0{,}96 \cdot 0{,}98 + 0{,}04 \cdot 0{,}05 = 0{,}9428$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}98}{0{,}9428} = 0{,}99$$

3. Две машинистки печатали рукопись, постоянно заменяя друг друга. Первая в конечном итоге напечатала 1/3 всей рукописи, а вторая — остальное. Первая машинистка делает ошибки с вероятностью 0.15, а вторая — с вероятностью 0.1. При проверке обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка. (*6 баллов*)

H_1: первая машинистка
H_2: вторая машинистка
A: ошибка

$P(H_1) = \frac{1}{3}$

$P(H_2) = 2/3$

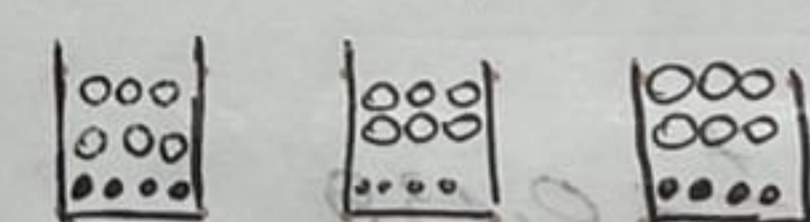
$P(A|H_1) = 0{,}15$

$P(A|H_2) = 0{,}1$

$P(A) = \frac{0{,}15}{3} + \frac{0{,}2}{3} = 0{,}05 + 0{,}067 = 0{,}1167$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}15}{0{,}1167} = 0{,}43$$

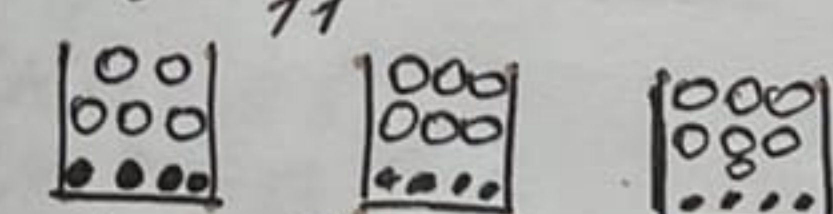
3. В каждой из 3-х урн содержится 4 черных и 6 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечён один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым. (*6 баллов*)



I из 1 белой и из 2 белой

$P_{1б} = \frac{6}{10}$

$P_{2б} = \frac{7}{11}$



$P_{3б} = \frac{7}{11}$

$P_I = P_{1б} \cdot P_{2б} \cdot P_{3б} = \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{7}{11} = 0{,}243$

II из 1 белой и из 2 черной

$P_{1б} = \frac{6}{10}$

$P_{2ч} = \frac{4}{11}$

$P_{3б} = \frac{6}{11}$

$P_{II} = P_{1б} \cdot P_{2ч} \cdot P_{3б} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{6}{11} = 0,119$

III из 1 черной из 2 белой

$P_{1ч} = \frac{4}{10}$

$P_{2б} = \frac{6}{11}$

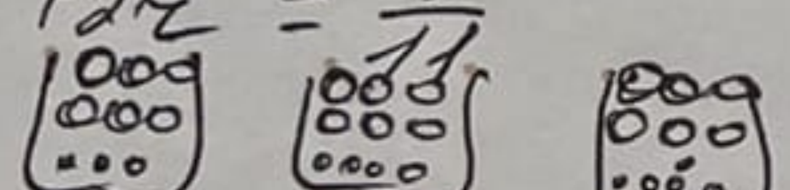
$P_{3б} = \frac{7}{11}$

$P_{III} = P_{1ч} \cdot P_{2б} \cdot P_{3б} = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{11} = 0,139$

IV из 1 черной, из 2 черной

$P_{1ч} = \frac{4}{10}$

$P_{2ч} = \frac{5}{11}$



$P_{3б} = \frac{6}{11}$

$P_{IV} = P_{1ч} \cdot P_{2ч} \cdot P_{3б} = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} = 0,099$

$P = P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} = 0,243 + 0,119 + 0,139 + 0,099 = 0,6$

3. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0.3; 0.4; 0.6; 0.7. *(6 баллов)*

0,3 I	0,4 II	III	IV	
0	0	0	0	
1	0	0	0	p1
0	1	0	0	p2
0	0	1	0	p3
0	0	0	1	p4
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	0	0	1	
0	1	1	0	
0	1	0	1	
0	0	1	1	
1	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	
0,7	0,6	0,4	0,3	

~~1 – бомба попала~~

~~0 – бомба не попала~~

~~$P_1 = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,0216$~~

~~$P_2 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,0336$~~

~~$P_3 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,0756$~~

~~$P_4 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,1176$~~

~~$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$~~ $= 0,2484$

мост не разрушится:

$P_0 = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,0504$

$P_1 = 1 - P_0 = 0,9496$

3. Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? *(6 баллов)*

H_1 : выбран мужчина

H_2 : выбрана женщина

A: дальтоник

$P(H_1) = 0,5$

$P(H_2) = 0,5$

$P(A|H_1) = 0,05$

$P(A|H_2) = 0,0025$

$P(A) = 0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025 = 0,025 + 0,00125 = 0,02625$

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,02625} = 0,95$

3. Электромашины изготавливаются на 3-х заводах. Первый завод производит 45% общего количества электромашин, второй – 40%, третий – 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных машин, второго – 80%, третьего – 81%. В магазины поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине машина окажется стандартной? *(6 баллов)*

H_1: первый завод
H_2: второй завод
H_3: третий завод
A: машина стандартная

$P(H_1) = 0{,}45 \quad P(H_2) = 0{,}4 \quad P(H_3) = 0{,}15$

$P(A|H_1) = 0{,}7 \quad P(A|H_2) = 0{,}8 \quad P(A|H_3) = 0{,}81$

$P(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}81 = 0{,}315 + 0{,}32 +$
$+ 0{,}1215 = 0{,}7565.$

3. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0.2; 0.3; 0.5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1; 0.75 и 0.4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежит индикатор? *(6 баллов)*

H_1: первый тип
H_2: второй тип
H_3: третий тип
A: не нормальная работа /сигнал

$P(H_1) = 0{,}2$
$P(H_2) = 0{,}3$
$P(H_3) = 0{,}5$
$P(A|H_1) = 1$
$P(A|H_2) = 0{,}75$
$P(A|H_3) = 0{,}4$
$P(A) = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 0{,}75 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}625$

$P(H_1|A) = \frac{0{,}2 \cdot 1}{0{,}625} = 0{,}32$

$P(H_2|A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}75}{0{,}625} = 0{,}36$

$P(H_3|A) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}625} = 0{,}32$

Ответ: с вероятностью 0,36 – второму

3. Вал поступает на восстановление, если у него равновероятные повреждения трех типов: сорвана резьба, изогнута ось, задиры на поверхности. Неисправность первого типа встречается с вероятностью 0,2; второго — 0.6; третьего — 0.7. Повреждения каждого типа возникают независимо от других повреждений. Вычислить вероятность того, что вал поступает на восстановление из-за повреждений любого типа. *(6 баллов)*

H_1: первый тип
H_2: второй тип
H_3: третий тип
A: поступил на восстановление

$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = 1/3 \quad P(H_3) = 1/3$

$P(A|H_1) = 0{,}2 \quad P(A|H_2) = 0{,}6 \quad P(A|H_3) = 0{,}7$

$P(A) = \frac{0{,}2}{3} + \frac{0{,}6}{3} + \frac{0{,}7}{3} = 0{,}5.$

3. Играется матч из 6 партий между двумя шахматистами. Считаются только победы или поражения, в случае ничьей партия не имеет порядкового номера и переигрывается. Вероятность выигрыша партии первым шахматистом 2/3, вторым - 1/3. Найти вероятность выигрыша матча первым, вторым шахматистом и вероятность ничьей. *(6 баллов)*

игрок выиграет матч, если выиграет 4, 5, 6 партий.

Выиграет первый:

$P_4^1 = C_6^4 p_1^4 q_1^2 = \frac{6!}{2!4!} \frac{2^4}{3^4} \frac{1^2}{3^2} = 0{,}329$

$P_5^1 = C_6^5 p_1^5 q_1^1 = \frac{6!}{1!5!} \frac{2^5}{3^5} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}263$

$P_6^1 = C_6^6 p_1^6 q_1^0 = \frac{6!}{0!6!} \frac{2^6}{3^6} = 0{,}088$

$P_1 = P_4^1 + P_5^1 + P_6^1 = 0{,}329 + 0{,}263 + 0{,}088 = 0{,}68$

Выиграет второй:

$P_4^2 = C_6^4 p_2^4 q_2^2 = \frac{6!}{4!2!} \frac{1}{3^4} \frac{2^2}{3^2} = 0{,}247$

$P_5^2 = C_6^5 p_2^5 q_2^1 = \frac{6!}{5!1!} \frac{1}{3^5} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}016$

$P_6^2 = C_6^6 p_2^6 q_2^0 = \frac{6!}{6!0!} \frac{1}{3^6} = 0{,}001$

$P_2 = P_4^2 + P_5^2 + P_6^2 = 0{,}247 + 0{,}016 + 0{,}001 = 0{,}264$

$P_{ничья} = 1 - P_1 - P_2 = 1 - 0{,}68 - 0{,}264 = 0{,}056.$

3. M элементарных частиц регистрируются N счетчиками, причем каждая из частиц может с одинаковой вероятностью попасть в любой из счетчиков. Найти вероятность того, что в каких-то M счетчиках окажется по одной частице. *(6 баллов)*

каждая частица может попасть в N разных счетчиков $\Rightarrow$ число всех возможных исходов N^M

число благоприятствующих исходов для любой комбинации C_N^M

таких комбинаций M благоприятствующих

Общее число благоприятствующих событий: $C_N^M M!$

$$P = \frac{C_N^M M!}{N^M}$$

3. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на четыре группы. К зернам первой группы принадлежат 96%, ко второй — 2%, к третьей — 1%, к четвертой — 1% всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, в котором будет не менее 50 зерен, для семян первой группы составляет 0,5, второй — 0,2, третьей — 0,18, четвертой — 0,02. Определить вероятность того, что: из наудачу взятого зерна вырастет колос, в котором будет не менее 50 зерен. *(6 баллов)*

H_1: первая группа

H_2: вторая группа

H_3: третья группа

H_4: четвертая группа

A: более 50 зерен

$P(H_1) = 0,96$

$P(H_2) = 0,02$

$P(H_3) = 0,01$

$P(H_4) = 0,01$

$P(A|H_1) = 0,5$

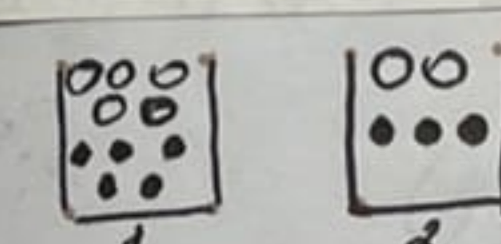
$P(A|H_2) = 0,2$

$P(A|H_3) = 0,18$

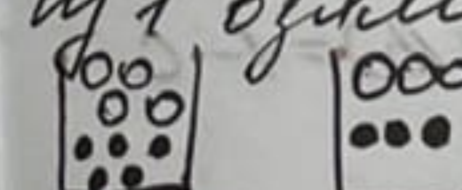
$P(A|H_4) = 0,02$

$P(A) = 0,96 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,2 + 0,01 \cdot 0,18 + 0,01 \cdot 0,02 = 0,486$

3. В двух урнах шары белого и черного цвета: в первой - 5 белых и 5 черных, а во второй - 2 белых и 3 черных. Из первой урны перекладывают один шар, не глядя на его цвет, во вторую урну. После этого берут из второй урны 1 шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется белым. *(6 баллов)*



из 1 взяли белый

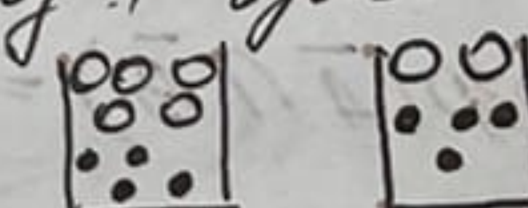


$P_{1б} = \frac{5}{10} = 0,5$

$P_{2б} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P_1 = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} = 0,25$

из 1 взяли черный



$P_{1ч} = \frac{5}{10}$

$P_{2б} = \frac{2}{6}$

$P_2 = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{6} = 0,167$

$P = P_1 + P_2 = 0,25 + 0,167 = 0,417$

3. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,6 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятностью того, что в день поступит: а) две заявки; б) не менее двух заявок. (6 баллов)

$p = 0,6 \quad q = 0,4$

$n = 10$

а) $m = 2$

$P_2 = C_{10}^2 p^2 q^8 = \frac{10!}{8!2!} 0,6^2 0,4^8 = 0,01$

б) не менее двух = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 = не 0, 1

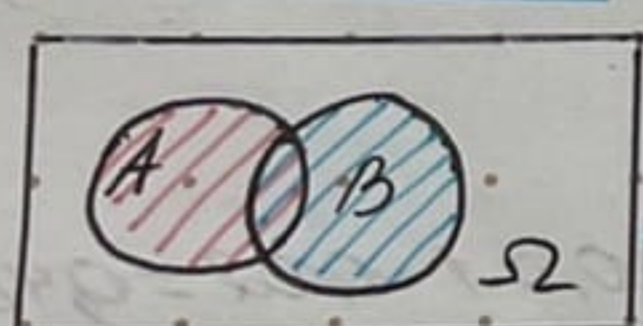
$P_0 = C_{10}^0 p^0 q^{10} = \frac{10!}{10!0!} 0,6^0 0,4^{10} = 0,0001$

$P_1 = C_{10}^1 p^1 q^9 = \frac{10!}{9!1!} 0,6 \cdot 0,4^9 = 0,0016$

$P_{<2} = P_0 + P_1 = 0,0001 + 0,0016 = 0,0017$

$P_{\geq 2} = 1 - P_{<2} = 1 - 0,0017 = 0,9983$

3. Известно, что $P(A) = a$, $P(B) = b$ и $P(A \cup B) = c$. Определите $P(A \cap \overline{B})$ и $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. (6 баллов)

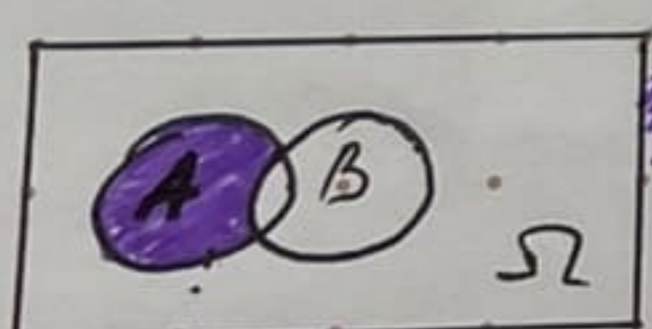


$P(A) = a$

$P(B) = b$

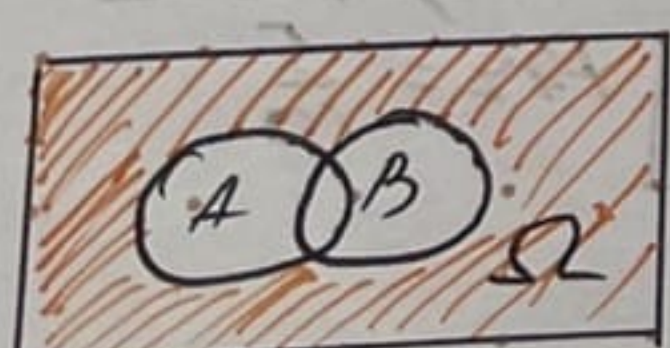
$P(A \cup B) = c$

P



$P(A \cap \overline{B}) = P(\Omega) - P(B) = 1 - P(A \cup B) - P(B) =$

$= 1 - c - b$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\Omega) = 1 - P(A \cup B) = 1 - c$

3. Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных, во втором — 50, из них 10 окрашенных, в третьем — 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной. (6 баллов)

Всего деталей: 120

H_1: 1 ящик 40 дет 20 окр

H_2: 2 ящик 50 дет 10 окр

H_3: 3 ящик 30 дет 15 окр

А: деталь окрашена

$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = \frac{5}{12} \quad P(H_3) = \frac{1}{4}$

$P(A|H_1) = \frac{1}{2} \quad P(A|H_2) = \frac{1}{5} \quad P(A|H_3) = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0,375$

3. В урне 10 шаров. Вероятность вытащить из нее два белых шара равна $\frac{2}{15}$. Сколько в урне белых шаров? (6 баллов)

Всего 10 шаров

из них x – белых

$P(б) = \frac{2}{15}$ – 2 белых шара

$P(x) = \frac{x}{10}$ – первый белый шар

$P(2x) = \frac{x-1}{9}$ – второй белый шар

$P(б) = P(x)P(2x) = \frac{x^2 - x}{90} = \frac{2}{15}$

$\frac{x^2 - x}{6} = 2$

$x^2 - x - 12 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 12 = 49 \Rightarrow \sqrt{D} = 7$

$x_1 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad x_2 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ не подх

Ответ: 4 белых шара

3. При исследовании больного имеется подозрение на одно из трех заболеваний A_1, A_2, A_3. Для больного вероятность заболевания каждой болезнью в данных условиях составит соответственно: $P_1 = 1/2$; $P_2 = 1/6$; $P_3 = 1/3$. Для уточнения диагноза назначен некоторый анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0,1 в случае заболевания A_1, с вероятностью 0,2— в случае заболевания A_2 и с вероятностью 0,9— в случае заболевания A_3. Анализ был проведен пять раз и дал четыре раза положительный результат и один раз отрицательный. Требуется определить вероятность каждого заболевания после анализа (5-ти кратного). (*6 баллов*)

H_1: болен A_1 $\quad P(H_1)=\frac{1}{2}$ $\quad p_1 = 1/10$

H_2: болен A_2 $\quad P(H_2)=1/6$ $\quad p_2 = 2/10$

H_3: болен A_3 $\quad P(H_3)=1/3$ $\quad p_3 = 9/10$

A: 4+ 4 1−

4 положит. и 1 отрицат. при A_1:

$$P(A|H_1)=C_5^4 p_1^4 q_1 = \frac{5!}{4!\,1!}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\frac{9}{10} = 0{,}00045$$

$$P(A|H_2)=C_5^4 p_2^4 q_2 = \frac{5!}{4!\,1!}\cdot\frac{2^4}{10^4}\cdot\frac{8}{10} = 0{,}0064$$

$$P(A|H_3)=C_5^4 p_3^4 q_3 = \frac{5!}{4!\,1!}\cdot\frac{9^4}{10^4}\cdot\frac{1}{10} = 0{,}32805$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}00045+\frac{1}{6}\cdot 0{,}0064+\frac{1}{3}\cdot 0{,}32805 = 0{,}11$$

$$P(H_1|A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}00045}{0{,}11} = 0{,}002$$

$$P(H_2|A)=\frac{\frac{1}{6}\cdot 0{,}0064}{0{,}11} = 0{,}0097$$

$$P(H_3|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}32805}{0{,}11} = 0{,}994$$

3. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0.2, второй вызов — 0.3, третий — 0.4. По условиям приема, события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит вызов. (*6 баллов*)

H_1: услышит 1 вызов

H_2: ~~услышит~~ вызов

H_3: услышит 3 вызов

A: примет вызов

$P(H_1)=1/3$ $\quad P(H_2)=1/3$ $\quad P(H_3)=1/3$

$P(A|H_1)=0{,}2$ $\quad P(A|H_2)=0{,}3$ $\quad P(A|H_3)=0{,}4$

$$P(A)=\frac{1}{3}0{,}2+\frac{1}{3}0{,}3+\frac{1}{3}\cdot 0{,}4 = 0{,}3$$

3. Вероятность пробоя каждого из четырех конденсаторов в приборе равна 0.1. Вероятность выхода прибора из строя при пробое одного конденсатора равна 0.2; при пробое двух— равна 0.4; при пробое трех— равна 0, 6; а при пробое всех четырех— равна 0.9. Найти вероятность выхода прибора из строя. (*6 баллов*)

I	II	III	IV
0	0	0	0 ✓
1	0	0	0 ✓
0	1	0	0 ✓
0	0	1	0 ✓
0	0	0	1 ✓
1	1	0	0 ✓
1	0	1	0 ✓
1	0	0	1 ✓
0	1	1	0 ✓
0	1	0	1 ✓
0	0	1	1 ✓
1	1	1	0 ✓
0	1	1	1 ✓
1	0	1	1 ✓
1	1	0	1 ✓
1	1	1	1

$p(0)=0{,}1$

$p(1)=0{,}9$

H_1: ~~−1~~

H_2: −2

H_3: −3

H_4 = −4

A: выход из строя

$P(H_1)=4\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1=0{,}2916$

$P(A|H_1)=0{,}2$

$P(H_2)=6\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486$

$P(A|H_2)=0{,}4$

$P(H_3)=4\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9=0{,}0036$

$P(A|H_3)=0{,}6$

$P(H_4)=1\cdot 0{,}1^4=0{,}0001$

$P(A|H_4)=0{,}9$

$$P(A)=0{,}2\cdot 0{,}2916+0{,}4\cdot 0{,}0486+0{,}6\cdot 0{,}0036+0{,}9\cdot 0{,}0001=$$
$$=0{,}05832+0{,}01944+0{,}00216+0{,}00009=$$
$$=0{,}08001$$

3. Имеются 2 урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй - 2 белых и 3 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из второй урны извлекают один шар. Какой состав переложенных шаров наиболее вероятен, если шар, извлеченный из второй урны, окажется белым? (*6 баллов*)

1 2

I переложили 2 белых

$P^1_{1б} = \frac{3}{7}$

$P^1_{2б} = \frac{2}{6}$

$P^2_{б} = \frac{4}{7}$

$P_I = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} = 0,082$

II переложили 1 белый 1 черный

$P^1_{1б} = \frac{3}{7}$

$P^1_{1ч} = \frac{4}{6}$

$P^2_{1б} = \frac{3}{7}$

$P_{II} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} = 0,122$

III переложили 2 черных

$P^1_{1ч} = \frac{4}{7}$

$P^1_{2ч} = \frac{3}{6}$

$P^2_{1б} = \frac{2}{7}$

$P_{III} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} = 0,082$

$P = P_I + P_{II} + P_{III} = 0,082 + 0,122 + 0,082 = 0,286$

3. При разрыве снаряда образуется 10% крупных осколков, 30% средних и 60% мелких. При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью $p_1 = 0.9$, средний – с вероятностью $p_2 = 0.2$ и мелкий с $p_3 = 0.05$. В результате выстрела броню пробил один осколок. К какой группе осколков вероятнее всего он принадлежит? (*6 баллов*)

H_1: крупный

H_2: средний

H_3: мелкий

A: пробил

$P(H_1) = 0,1$ $P(H_2) = 0,3$ $P(H_3) = 0,6$

$P(A|H_1) = 0,9$ $P(A|H_2) = 0,2$ $P(A|H_3) = 0,05$

$P(A) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,05 = 0,18$

$P(H_1|A) = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,18} = 0,5$

$P(H_2|A) = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,18} = 0,33$

$P(H_3|A) = \frac{0,6 \cdot 0,05}{0,18} = 0,167$

3. Сколько раз нужно выстрелить по мишени, чтобы с вероятностью не меньшей 0,8704, можно было утверждать, что мишень будет поражена хотя бы один раз, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4? (*6 баллов*)

$p = 0,4$ $q = 0,6$ $P_{общ} \geq 0,8704$ $n - ?$

хотя бы один раз = один и более

найдем P(ни одного)

$P(\text{ни одного}) = q^n$

$P(\text{хотя бы } 1) = 1 - q^n$

$1 - q^n \geq 0,8704$

$q^n \leq 1 - 0,8704$

$0,6^n \leq 0,1296$

$n \ln 0,6 \leq \ln 0,1296$ (меняем знак т.к $\ln 0,6 < 0$)

$n \geq \frac{\ln 0,1296}{\ln 0,6} \geq 4$

$n = 4$

3. Два автомата производят одинаковые детали. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Процент брака первого автомата - 40%, второго автомата 16%. Наудачу взятая деталь оказалась годной (не брак). Найти вероятность того, что эта деталь произведена 1-ым автоматом. (6 баллов)

3 части

2 - II 1 - I

H_1: первый автомат

H_2: второй автомат

A: деталь годная.

$P(H_1) = \frac{1}{3}$ $P(H_2) = \frac{2}{3}$

$P(A|H_1) = \frac{6}{10} = 0,6$ $P(A|H_2) = 0,84$

$P(A) = \frac{0,6}{3} + \frac{2 \cdot 0,84}{3} = 0,2 + 0,56 = 0,76$

$P(H_1|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,6}{0,76} = 0,263$

$DY = \int (y+\frac{1}{6})^2 \frac{2}{3} dy + \int (y+\frac{1}{2})^2 \frac{1}{3} dy =$

4. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2}, & x \in [1, 3]; \\ 0, & x \notin [1, 3]. \end{cases}$$

Для случайной величины $\eta = \xi^2 - 1$ определить плотность распределения вероятностей и математическое ожидание. (6 баллов)

4

Заменим для удобства: $\eta = y$, $\xi = x$

$y = x^2 - 1$

$x^2 = y + 1$

$\psi(y) = x = \sqrt{y+1}$

$\psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$

$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{3-\sqrt{y+1}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+1}} = \frac{3-\sqrt{y+1}}{4\sqrt{y+1}} =$

$= \frac{3}{4}(y+1)^{-1/2} - \frac{1}{4}$

найдем границы интервала:

$\sqrt{y+1} = 1$ $\sqrt{y+1} = 3$

$y+1 = 1$ $y+1 = 9$

$y = 0$ $y = 8$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{y+1}} - \frac{1}{4} & y \in [0;8] \\ 0 & y \notin [0;8] \end{cases}$$

$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y) dy = \int_0^8 \left(\frac{3y}{4\sqrt{y+1}} - \frac{y}{4}\right) dy = 8$

4. Скалярная случайная величина ξ распределена равномерно на интервале (0, 3), а

$$\eta = \begin{cases} -\xi, & 0 < \xi < 1; \\ \xi - 2, & 1 < \xi < 3. \end{cases}$$

Определите: а) плотность распределения вероятностей $f_\eta(y)$; б) $M[\eta]$ и $D[\eta]$. (6 баллов)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in (0;3) \\ 0 & x \in (0;3) \end{cases}$$

$f(y)$ ✓

$M(y)$

$D(y)$

$$y = \begin{cases} -x & 0 < x < 1 \\ x - 2 & 1 < x < 3 \end{cases}$$

Решение:

$g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)|$

1 интервал $x \in (0;1)$

$y = -x$

$\psi(y) = x = -y \qquad \psi'(y) = -1$

$g(y) = \frac{1}{3} \qquad y \in (-1;0)$

$\varphi(y) = x = -y \qquad \varphi'(y) = -1$

$g(y) = \frac{1}{3} \qquad y \in (-1;0)$

2 интервал: $x \in (1;3)$

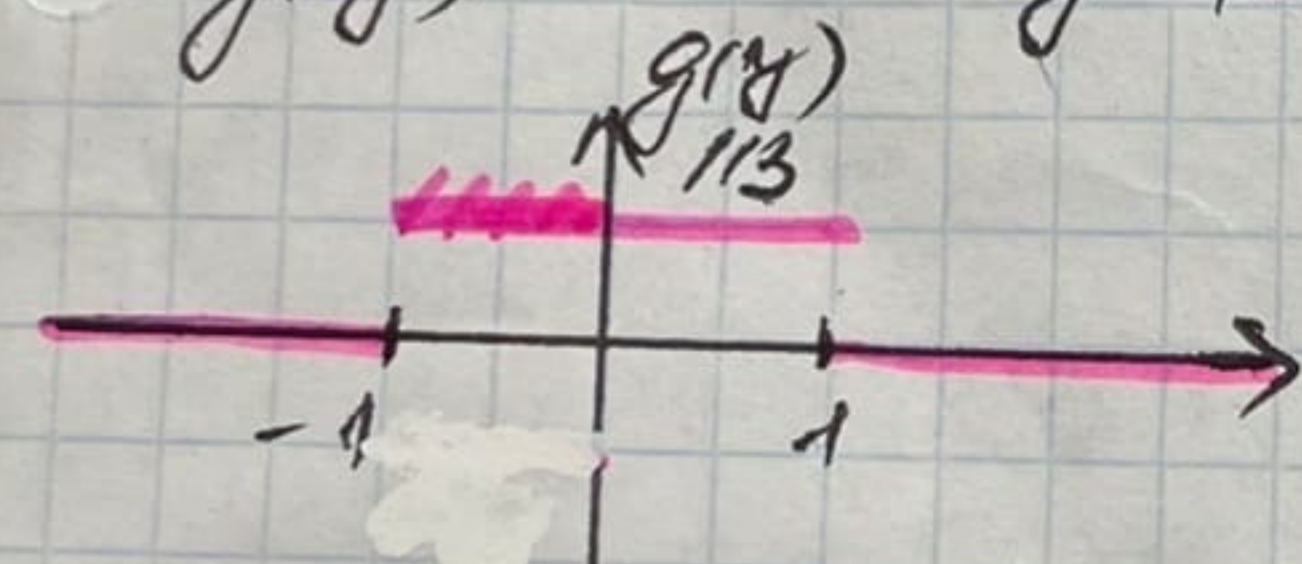
$y = x - 2$

$\varphi(y) = x = y + 2 \qquad \varphi'(y) = 1$

$g(y) = \frac{1}{3} \qquad y \in (-1;1)$

3 интервал: $x \notin (1;3)$

$g(y) = 0 \qquad y \notin (-1;1)$



$$g(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 2/3 & y \in (-1;0) \\ 1/3 & y \in (0;1) \\ 0 & y > 1 \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 2/3 & y \in (-1;0) \\ 1/3 & y \in (0;1) \\ 0 & y \notin (-1;1) \end{cases}$$

$$MY = \int_{-1}^{0} \frac{2}{3} y\,dy + \int_{0}^{1} \frac{1}{3} y\,dy = \frac{y^2}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{y^2}{6}\Big|_{0}^{1} = 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{}{6}$$

$$DY = \int_{-1}^{0} \left(y+\frac{1}{6}\right)^2 \frac{2}{3}\,dy + \int_{0}^{1} \left(y+\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{3}\,dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \left(y^2 + \frac{y}{3} + \frac{1}{36}\right) dy + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} \left(y^2 + \frac{y}{3} + \frac{1}{36}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{6} + \frac{y}{36}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{6} + \frac{y}{36}\right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{36}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{6} - 0 + \frac{1}{36} - 0\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{36} + \frac{1}{3}\cdot\frac{19}{36} = \frac{7}{54} + \frac{19}{108} = \frac{11}{36}$$

4. Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины $\eta(\omega) = \xi^2(\omega) - 1$, если $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. *(6 баллов)*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$y = x^2 - 1$$

$$\psi(y) = x = \sqrt{y+1} \qquad \psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

$$g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)| = \frac{1}{\pi(2+y)}\,\frac{1}{2\sqrt{y+1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{y+1}\,(y+2)}$$

4. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & x \notin [0;\pi]. \end{cases}$$

Найти M(Y), D(Y) и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^3$. *(6 баллов)*

$$y = x^3$$

$$\psi(y) = x = \sqrt[3]{y} \qquad \psi'(y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)| = \frac{1}{2}\sin y^{1/3} \cdot \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{6}y^{-2/3}\sin y^{1/3}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y^{-\frac{2}{3}}\sin y^{1/3} & y \in [0;\pi^3] \\ 0 & y \notin [0;\pi^3] \end{cases}$$

$$MY = \int_0^{\pi^3} \frac{1}{6}y^{\frac{1}{3}}\sin y^{1/3}\,dy = \frac{1}{6}\cdot 3{,}2 = 0{,}5$$

$$DY = \int_0^{\pi^3}(y - MY)^2\,\frac{1}{6}y^{-\frac{2}{3}}\sin(y^{1/3})\,dy = \int_0^{\pi^3}\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{6}y^{-\frac{2}{3}}\sin(y^{1/3})\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi^3}\frac{1}{6}y^{4/3}\sin(y^{1/3})\,dy - \int_0^{\pi^3}\frac{1}{6}y^{1/3}\sin(y^{1/3})\,dy + \int_0^{\pi^3}\frac{1}{24}y^{-\frac{2}{3}}\sin y^{1/3}\,dy =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 62 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\cdot 6 = 10{,}5.$$

$F(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 2x \qquad x \geq 0$ $\qquad f(x) - ?$

$MX - ?$

$y = \sqrt{x}$ $\qquad g(y) - ?$

а) $f(x) = F'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1+4x^2} = \frac{4}{\pi(1+4x^2)}$

$$MX = \int_0^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{1+4x^2}\,dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \frac{d(1+4x^2)}{(1+4x^2)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\ln(1+4x^2)\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi}(\ln\infty - \ln 1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln\infty = \frac{\infty}{2\pi} = \infty$$

б) $\psi(y) = x = y^2 \qquad \psi'(y) = 2y$

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| = \frac{4}{\pi(1+4y^4)} \cdot 2y = \frac{8y}{\pi(1+4y^4)}$$

интервал: $y = \sqrt{0} = 0$

$y \geq 0$

4. Скалярная случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $(-\pi;\pi)$, а $\eta=\sin\xi$. Определите плотность распределения вероятностей $f_\eta(y)$ и $D[\eta]$. (6 баллов)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & x\in(-\pi;\pi)\\ 0 & x\notin(-\pi;\pi)\end{cases}\qquad f(y)-?\quad D(y)-?$$

$y=\sin x$

$\psi(y)=x=\arcsin y \qquad \psi'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$g(y)=f(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}$

границы интервала:

$y=\sin(-\pi)$ $\qquad$ $y=\sin\pi$

$y=0$ $\qquad$ $y=0$

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} & y=0\\ 0 & y\neq 0\end{cases}$$ дурацкий интервал

$$MY=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,g(y)\,dy=\int_{\sin(-\pi)}^{\sin(\pi)}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{\sin(-\pi)}^{\sin\pi}\frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}=-\frac{1}{4\pi}\cdot 2\left(\sqrt{1-y^2}\right)\Big|_{\sin(-\pi)}^{\sin\pi}=-\frac{1}{2\pi}\cdot 0$$

$$DY=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-MY)^2\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}dy=\int_{\sin(-\pi)}^{\sin(\pi)}\frac{1}{2\pi}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=\int\frac{1}{2\pi}\frac{(y^2-1)+1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{1}{2\pi}\left(\int-\frac{1-y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy+\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\arcsin y-\int\sqrt{1-y^2}\,dy\right)=$$

$$=\frac{\arcsin y-y\sqrt{1-y^2}}{4\pi}\Big|_{\sin(-\pi)}^{\sin(\pi)}=0-0=0$$

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{A}{x^3}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

Определить: а) коэффициент A; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность $P(1<X<3)$ попадания случайной величины ξ в интервал $(2;3)$; г) вероятность того, что при 3-х независимых испытаниях случайная величина ξ ни разу не попадает в интервал $(1;3)$. (6 баллов)

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

$\int_1^{\infty}Ax^{-2}dx=A\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\infty}=-A\cdot\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{1}\right)=-A(0-1)=A=1$

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\geqslant 1\end{cases}$$

$x<1:\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dx=0$

$x\geqslant 1:\ F(x)=\int_{-\infty}^{1}0\,dx+\int_1^{x}x^{-2}dx=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{x}=-\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-\frac{1}{x}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1-\frac{1}{x} & x\geqslant 1\end{cases}$$

$P\{1<x<3\}=F(3)-F(1)=1-\frac{1}{3}-1+1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\bar{P}^1\{1<x<3\}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\bar{P}^3=(\bar{P}^1)^3=\frac{1}{27}$

4. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью $f(x)=Ce^{-2x}$, $x>0$. Найти: а) постоянную C; б) математическое ожидание, дисперсию и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=e^{-x}$. (6 баллов)

$f(x)=Ce^{-2x}\quad x>0$

а) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

$\int_0^{\infty}Ce^{-2x}dx=C\int_0^{\infty}e^{-2x}dx=-C\cdot\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty}=\frac{C}{2}=1\Rightarrow C=2$

$f(x)=2e^{-2x}\quad x>0$

б) $y=e^{-x}$

$x=-\ln y$

$\psi(y)=-\ln y \qquad \psi'(y)=-\frac{1}{y}$

$g(y)=f(\psi(y))\,|\psi'(y)|=2e^{2\ln y}\frac{1}{y}=2y^2\frac{1}{y}=2y$

$g(y)=2y\ ,\quad 0<y<1.$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x \in (-\pi; \pi) \\ 0 & x \notin (-\pi; \pi) \end{cases}$ $f(y) - ?$

$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y)\, dy = \int_0^1 2y^2 dy = 2\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$DY = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - MY)^2 g(y)\, dy = \int_0^1 (y - \frac{2}{3})^2 2y\, dy = \ldots = \frac{1}{18}$

4. Скалярная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2}, & x \geqslant 1; \\ 0, & x < 1, \end{cases}$$

Найдите постоянную C. Для случайной величины $\eta = \xi^{-1}$ определите: а) ...
вероятностей и математи...

$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

$y = \frac{1}{x}$

$C - ?$

$g(y)$

$M(Y)$

$P\{Y \in (0{,}01, 0{,}04)\}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$\int_1^\infty \frac{c}{x^2} dx = c(-\frac{1}{x})\Big|_1^\infty = c(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1}) = c(0+1) = c = 1$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

$\varphi(y) = x = \frac{1}{y}$ $\quad \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2}$

$g(y) = f(\varphi(y)) \cdot |\varphi'(y)| = y^2 \cdot \frac{1}{y^2} = 1$

$g(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$

интервал: $y = \frac{1}{1} = 1$

$M(Y) = \int_1^\infty y\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_1^\infty = \infty - \frac{1}{2} = \infty$

$G(Y) = \int_{-\infty}^{y} 0\, dy = 0 \quad (y < 1)$

$G(Y) = \int_{-\infty}^{1} 0\, dy + \int_1^y 1\, dy = 0 + y - 1 = y - 1 \quad (y \geq 1)$

$G(Y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ y - 1 & y \geq 1 \end{cases}$

$P\{0{,}01 < Y < 0{,}04\} = G(0{,}04) - G(0{,}01) = 0 - 0 = 0$

$M(Y^2) = \int_1^\infty y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Big|_1^\infty = \infty - \frac{1}{3} = \infty$

$DY = MY^2 - (MY)^2 = \infty - \infty = 0$

4. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью $f(x) = Ce^{-3x}$, $x > 0$. Найдите: а) постоянную C; б) математическое ожидание, дисперсию и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = e^x$. (*6 баллов*)

$f(x) = Ce^{-3x} \quad x > 0$

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$\int_0^\infty Ce^{-3x} dx = C(-\frac{1}{3}e^{-3x})\Big|_0^\infty = -\frac{C}{3}(e^{-\infty} - 1) = \frac{C}{3} = 1 \Rightarrow C = 3$

$f(x) = 3e^{-3x} \quad x > 0$

$y = e^x$

$\ln y = x \ln e$

$x = \ln y$

$\psi(y) = x = \ln y \quad \psi'(y) = \frac{1}{y}$

$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)| = 3e^{-3\ln y} \cdot \frac{1}{y} = 3y^{-3} \cdot y^{-1} = 3y^{-4}$

$g(y) = 3y^{-4} \quad y > 1$

$MY = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot y\, dy = \int_1^\infty 3y^{-3} dy = -\left(\frac{3}{2y^2}\right)\Big|_1^\infty =$

$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -\frac{3}{2}(0 - 1) = \frac{3}{2}$

$MY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) y^2 dy = \int_1^\infty 3 y^{-2} dy = -3\left(\frac{1}{y}\right)\Big|_1^\infty = 3(\frac{1}{\infty} - 1) = 3$

$D = MX^2 - (MX)^2 = 3 - \frac{9}{4} = 0{,}75.$

4. Дана плотность распределения вероятностей скалярной случайной величины ξ:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C\ln x, & x \in (1, e); \\ 0, & x \notin (1, e), \end{cases}$$

а $\eta = \ln \xi$. Определите: а) параметр C; б) плотность распределения вероятностей $f_\eta(y)$; в) $M[\eta]$. (*6 баллов*)

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^e C \ln x\, dx = C\int_1^e \ln x\, dx$

$\int_1^e \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u & \frac{1}{x}dx = du \\ dx = dv & x = v \end{matrix} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx =$

$= (e\ln e - \ln 1) - x\Big|_1^e = e - 0 - e + 1 = 1.$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = C = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x \in (1;e) \\ 0 & x \notin (1;e) \end{cases}$$

б) $y = \ln x$

$e^{y} = e^{\ln x}$

$x = e^{y}$

$\psi(y) = e^{y}$ $\quad \psi'(y) = e^{y}$

$g(y) = f(\psi(y)) \, |\psi'(y)| = \ln(e^{y}) \cdot e^{y} = y \ln e \; e^{y} =$

$= \quad y e^{y}$

$$g(y) = \begin{cases} y e^{y} & y \in (0;1) \\ 0 & y \notin (0;1) \end{cases}$$

$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, g(y) \, dy = \int_0^1 y^2 e^{y} \, dy = 0{,}71$

4. Три изделия независимо друг от друга испытываются на надёжность при одинаковых условиях. Вероятность пройти испытание для каждого из них равна 0.75. Пусть ξ — число изделий, прошедших испытание. Постройте функцию распределения вероятностей $F_\xi(x)$ и определите $M[\xi]$, $D[\xi]$. (*6 баллов*)

$p = 0{,}75 \quad q = 0{,}25$

$P(0) = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{3!0!} 1 \cdot 0{,}25^3 = 0{,}016$

$P(1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!2!} 0{,}75 \, 0{,}25^2 = 0{,}14$

$P(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} 0{,}75^2 \, 0{,}25 = 0{,}42$

$P(3) = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{0!3!} 0{,}75^3 \cdot 1 = 0{,}42$

ξ	0	1	2	3
p	0,016	0,14	0,42	0,42

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}016 & 0 \le x < 1 \\ 0{,}156 & 1 \le x < 2 \\ 0{,}576 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

$M\xi = \sum p_i x_i = 0 + 0{,}14 + 0{,}84 + 1{,}26 = 2{,}24$

$M\xi^2 = 0 + 0{,}14 + 1{,}68 + 3{,}78 = 5{,}6$

$DX = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 5{,}6 - 5{,}0176 = 0{,}5824$

4. Определите математическое ожидание и дисперсию скалярной случайной величины ξ, имеющей следующую функцию распределения вероятностей:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e{-}3x, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

С какой вероятностью можно утверждать, что при проведении 4х независимых испытаний, данная случайная величина ни разу не попадет в интервал $(1,3)$? (*6 баллов*)

$$f(x) = \begin{cases} -3 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$MX = \int_0^{\infty} -3 \, x \, dx = -3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\infty} = -3(\infty - 0) = -\infty$

$MX^2 = \int_0^{\infty} -3x^2 \, dx = -3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\infty} = -x^3 \Big|_0^{\infty} = -(\infty - 0) = -\infty$

$DX = MX^2 - (MX^2) = -\infty - \infty = -\infty$

попадёт в фон:

$P_1\{1<x<3\} = F(3)-F(1) = (1+e-9)-(1-e-3) = -6$?

не попадёт в фон:

$1-P_1\{1<x<3\}$

не попадёт в четырёх:

$\overline{P}_4 = (1-P_1\{1<x<3\})^4$

4. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X контролируемого размера от номинала не превосходит 10 мм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением $\sigma = 5$. Считая, что X нормально распределена, выяснить: а) сколько процентов годных деталей изготавливает автомат; б) какой должна быть точность изготовления, чтобы процент годных деталей повысился до 98? (6 баллов)

$M=0$

$\sigma=5$

а) годная, если $-5<x<5$

$P\{-5<x<5\} = \Phi_0\left(\frac{b-M}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-M}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{5}{5}\right)-\Phi_0\left(\frac{-5}{5}\right) =$

$= 2\Phi_0(1) = 2\cdot 0{,}3413 = 0{,}6826$

б) $0{,}98 = 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)$

$\Phi_0\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}49$

$\frac{5}{\sigma} = 2{,}35$

$\sigma = \frac{5}{2{,}35} = 2{,}13$

$f(x) = \begin{cases} |x-1| & x\in[0;2] \\ 0 & x\notin[0;2] \end{cases}$ $\quad g(y)$ - ? $\quad M(y)$ - ?

$y = x^2+2$

$x^2 = y-2$

$\varphi(y) = \sqrt{y-2}$ $\quad \varphi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-2}}$

$g(y) = f(\varphi(y))\,|\varphi'(y)| = \frac{|\sqrt{y-2}-1|}{2\sqrt{y-2}}$

$g(y) = \begin{cases} \frac{|\sqrt{y-2}-1|}{2\sqrt{y-2}} & y\in[2;6] \\ 0 & y\notin[2;6] \end{cases}$

$g(y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{y-2}}{2\sqrt{y-2}} & y\in[2;3] \\ \frac{\sqrt{y-2}-1}{2\sqrt{y-2}} & y\in(3;6] \\ 0 & y\notin[2;6] \end{cases}$

$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y-2}}-\frac{1}{2} & y\in[2;3] \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{y-2}} & y\in(3;6] \\ 0 & y\notin[2;6] \end{cases}$

$MY = MY^{I} + MY^{II}$

$MY^{I} = \int_2^3 \frac{y}{2\sqrt{y-2}}dy - \int_2^3 \frac{y}{2}dy =$

$= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(y-2)+2}{\sqrt{y-2}}dy - \frac{y^2}{4}\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\left(\int_2^3\sqrt{y-2}\,dy + \int_2^3 \frac{2\,dy}{\sqrt{y-2}}\right) -$

$-\frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\int_2^3\sqrt{y-2}\,d(y-2) + 2\int_2^3\frac{d(y-2)}{\sqrt{y-2}}\right) - \frac{5}{4} =$

4. Измерение дальности до объекта сопровождается случайными погрешностями, подчиняющимися нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 50 м. Систематическая погрешность отсутствует. Найдите:
а) вероятность измерения дальности с погрешностью, не превосходящей по абсолютному значению 100 м;
б) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной. (*6 баллов*)

$\sigma = 50$

$M = 0$

а) $P\{-100 < X < 100\} = 2\Phi_0\left(\frac{100-0}{50}\right) = 2\Phi_0(2) = 0{,}9546$

б) $P\{-\infty \le X \le 0\} = \Phi_0\left(\frac{0-0}{50}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty}{50}\right) = \Phi_0(0) + \Phi(\infty) =$

$= 0 + 0{,}5 = 0{,}5$

4. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ (\sin x)/2, & 0 < x \leqslant \pi \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в результате испытаний случайной величины примет значение, заключенное в интервале $(0; \pi/4)$; в) вероятность того, что при 4-х независимых испытаниях случайная величина ни разу не попадает в интервал $(0; \pi/4)$. (*6 баллов*)

а) $x \le 0: F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$

$0 < x \le \pi: F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{\sin x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(-\cos x)\Big|_0^x = \frac{1}{2}(-\cos x + 1) = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}$

$x > \pi: F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{2}\,dx + \int_{\pi}^{x} 0\,dx = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2} & 0 < x \le \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases}$$

б) $P\{0 < x < \pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{\cos \pi/4}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}3$

в) $\bar{P}\{0 < x < \pi/4\} = 0{,}7$

$\bar{P}^4\{0 < x < \pi/4\} = 0{,}7^4 = 0{,}24$

4. Производится 3 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Рассматриваются 2 случайные величины: X — разность между числом попаданий и числом промахов, Y — сумма числа попаданий и числа промахов. Построить для каждой из случайных величин X,Y ряд распределения, найти функцию распределения. Найти их характеристики: M_x, D_x, M_y, D_y. (*6 баллов*)

X = попадания − промахи

Y = попадания + промахи

X может принимать значения:

$x_1 = -3$ (0 попаданий 3 промаха)

$x_2 = -1$ (1 попадание 2 промаха)

$x_3 = 1$ (2 попадания 1 промах)

$x_4 = 3$ (3 попадания 0 промахов)

$p(0) = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{3!0!} p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3$

$p(1) = C_3^1 p q^2 = \frac{3!}{2!1!} p(1-p)^2 = 3p(1-p)^2$

$p(2) = C_3^2 p^2 q = \frac{3!}{1!2!} p^2(1-p) = 3p^2(1-p)$

$p(3) = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{0!3!} p^3 = p^3$

X	-3	-1	1	3
p	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

$MX = \sum x_i p_i = -3(1-p)^3 - 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + 3p^3 = -3(1-p)^3 - 3p^3 + 9p^2 - 3p$

$MX^2 = 9(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + 9p^3 = 9(1-p)^3 + 9p^3 - 6p^2 + 6p$

$DX = MX^2 - (MX)^2 = (-3(1-p)^3 - 3p^3 + 9p^2 - 3p)^2 - 9(1-p)^3 + 9p^3 - 6p^2 + 6p$

Y может принимать значение 3

Y	3
p	1

$M = 3$

$D = 0$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & x\in(0;a)\\ 0 & x\notin(0;a)\end{cases}\qquad g(y)\qquad P\{-\lambda^2<y<0\}$$

$$y=x^2-2\lambda x \qquad a>2\lambda>0$$

$$x^2-2\lambda x-y=0$$

$$D=4\lambda^2+4y$$

$$x=\frac{2\lambda\pm2\sqrt{\lambda^2+y}}{2}$$

$$\psi(y)=x=\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+y}\qquad |\psi'(y)|=\frac{1}{2\sqrt{\lambda^2+y}}$$

$$g(y)=f(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|=\frac{1}{2a\sqrt{\lambda^2+y}}$$

интервал:

$$y=0-2\lambda 0=0\qquad y=a^2-2\lambda a=\overset{+}{a}(\overset{+}{a-2\lambda})$$

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2a\sqrt{\lambda^2+y}} & y\in(0;a^2-2\lambda a)\\ 0 & y\notin(0;a^2-2\lambda a)\end{cases}$$

$$G(y)=\int_0^y\frac{1}{2a\sqrt{\lambda^2+y}}dy=\frac{1}{2a}\int_0^y\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+y}}d(\lambda^2+y)=$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\left(2\sqrt{\lambda^2+y}\right)\Big|_0^y=\frac{1}{2a}\left(2\sqrt{\lambda^2+y}-2\lambda\right)=\frac{\sqrt{\lambda^2+y}-\lambda}{a}$$

$$G(y)=\begin{cases}0 & y\le0\\ \frac{\sqrt{\lambda^2+y}-\lambda}{a} & y\in(0;a^2-2\lambda a)\\ 1 & y\ge a^2-2\lambda a\end{cases}$$

$$P\{-\lambda^2<y<0\}=G(0)-G(-\lambda^2)=\frac{\sqrt{\lambda^2}-\lambda}{a}-0=$$

$$=\frac{\lambda-\lambda}{a}-0=0$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{l} & x\in(-\frac{l}{2};\frac{l}{2})\\ 0 & x\notin(-\frac{l}{2};\frac{l}{2})\end{cases}\qquad g(y)\qquad M(y)$$

$$y=\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$$

$$\frac{2\pi}{l}x=\arcsin\frac{y}{\alpha}$$

$$\psi(y)=x=\frac{l}{2\pi}\arcsin\frac{y}{\alpha}$$

$$\psi'(y)=\frac{l}{2\pi\alpha\sqrt{1-y^2/\alpha^2}}=\frac{l}{2\pi\sqrt{\alpha^2-y^2}}$$

$$g(y)=f(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2-y^2}}$$

интервал:

$$y=\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(-\frac{l}{2}\right)\right)\qquad y=\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{l}\frac{l}{2}\right)$$

$$y=\alpha\sin(-\pi)\qquad y=\alpha\sin(\pi)$$

$$y=0\qquad y=0$$

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2-y^2}} & y=0\\ 0 & y\ne0\end{cases}\qquad \text{интервал}$$

$$MY=\int_{\alpha\sin(-\pi)}^{\alpha\sin(\pi)}\frac{1}{2\pi}\frac{y\,dy}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\alpha\sin(-\pi)}^{\alpha\sin(\pi)}\frac{d(\alpha^2-y^2)}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}=-\frac{1}{4\pi}2\sqrt{\alpha^2-y^2}\Big|_{\alpha\sin(-\pi)}^{\alpha\sin\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}(\alpha-\alpha)=0$$

$f(x) = \max\{0;\ 1-|x|\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$y = |x|$

$\varphi(y) = x = \pm y \qquad y \geq 0 \Rightarrow |x| = y$

$|\varphi'(y)| = 1$

$g(y) = f(\varphi(y))\,|\varphi'(y)| = 1-y$

$$g(y) = \begin{cases} 1-y & y<1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$MY = \int_{-\infty}^{1}(1-y)y\,dy = \int_{0}^{1}(y-y^2)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f(x)=\begin{cases} C\cos^2 x & x\in(-\pi/2;\pi/2)\\ 0 & x\notin(-\pi/2;\pi/2)\end{cases}$$

C - ?
$g(y)$
MY
$P\{Y<M(Y)\}$

$y=2x+3$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} C\cos^2 x\,dx = C\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\frac{C\pi}{2}=1 \Rightarrow C=\frac{2}{\pi}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x & x\in(-\pi/2;\pi/2)\\ 0 & x\notin(-\pi/2;\pi/2)\end{cases}$$

$2x=y-3$

$\psi(y)=x=\frac{y-3}{2}$ $\quad\psi'(y)=\frac{1}{2}$

$$g(y)=f(\psi(y))\,|\psi'(y)|=\frac{2}{\pi}\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

интервал:

$y=-\frac{2\cdot\pi}{2}+3=3-\pi$ $\quad y=\frac{2\cdot\pi}{2}+3=3+\pi$

$$g(y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right) & y\in(3-\pi;3+\pi)\\ 0 & y\notin(3-\pi;3+\pi)\end{cases}$$

$$MY=\int_{3-\pi}^{3+\pi}\frac{y}{\pi}\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right)dy=\frac{1}{\pi}3\pi=3$$

$$G(y)=\int_{3-\pi}^{y}\frac{1}{\pi}\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right)dy=\frac{2}{\pi}\int_{3-\pi}^{y}\cos^2\left(\frac{y-3}{2}\right)d\left(\frac{y-3}{2}\right)=$$

$$=\left|\frac{y-3}{2}=t\right|=\frac{2}{\pi}\int_{3-\pi}^{y}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{2}{\pi}\left(\int_{3-\pi}^{y}\frac{dt}{2}+\int_{3-\pi}^{y}\frac{\cos 2t}{4}d2t\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{t}{2}\Big|_{3-\pi}^{y}+\frac{\sin 2t}{4}\Big|_{3-\pi}^{y}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{y-3}{4}+\frac{\sin(y-3)}{4}\right)\Big|_{3-\pi}^{y}=\frac{y-3+\sin(y-3)}{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{2}=\frac{y+\sin(y-3)-3+\pi}{2\pi}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 3-\pi \\ \dfrac{y + \sin(y-3) - 3 + \pi}{2\pi} & y \in (3-\pi; 3+\pi) \\ 1 & y \geq 3+\pi \end{cases}$$

$-0{,}14 \quad 6{,}14$

$$P\{Y < MY\} = P\{Y < 3\} = G(3) - G(-\infty) =$$

$$= \frac{3 + \sin(3-3) + \pi - 3}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

5

5. Имеется две независимые случайные величины X и Y. Величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$. Величина Y распределена равномерно в интервале (0;2). Определить: 1) $M(X+Y)$, 2) $M(XY)$, 3) $M(X^2)$, 4) $M(X-Y^2)$, 5) $D(X+Y)$, 6) $D(X-3Y)$. (*6 баллов*)

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$$

$MX = 1 \quad DX = 4$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0;2) \\ 0 & x \notin (0;2) \end{cases}$$

$MY = \int_0^2 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - 0\right) = 1$

$MY^2 = \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{4}{3}$

$DY = MY^2 - (MY)^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

1) $M(X+Y) = MX + MY = 1 + 1 = 2$

2) $M(XY) = MX \cdot MY = 1 \cdot 1 = 1$

3) $M(X^2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} dx =$

4) $M(X - Y^2) = MX - MY^2 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

5) $D(X+Y) = DX + DY = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$

6) $D(X - 3Y) = DX - 9DY = 4 - 9 \cdot \frac{1}{3} = 4 - 3 = 1$

5. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин Y_1 и Y_2, где $Y_1 = 3X_1 - 2X_2$, $Y_2 = 5X_2 - X_1$, а случайные величины X_1 и X_2 имеют следующие числовые характеристики: $\mathbf{M}[X_1] = -0.5$, $\mathbf{M}[X_2] = 1$, $\mathbf{D}[X_1] = 3$, $\mathbf{D}[X_2] = 2{,}9$, $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 2$. (*6 баллов*)

$Y_1 = 3X_1 - 2X_2 \quad ; \quad Y_2 = -X_1 + 5X_2$

$M(Y_1) = M(3X_1 - 2X_2) = 3MX_1 - 2MX_2 = 3 \cdot (-0{,}5) - 2 \cdot 1 = -3{,}5$

$D(Y_1) = D(3X_1 - 2X_2) = 9DX_1 + 4X_2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \operatorname{cov}(X_1, X_2) =$
$= 9 \cdot 3 + 4 \cdot 2{,}9 - 12 \cdot 2 = 27 + 11{,}6 - 24 = 14{,}6$

$M(Y_2) = M(-X_1 + 5X_1) = -MX_1 + 5MX_2 = -(-0{,}5) + 5 \cdot 1 = 5{,}5$

$D(Y_2) = D(-X_1 + 5X_2) = DX_1 + 25DX_2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \operatorname{cov}(X_1, X_2) =$
$= 3 + 25 \cdot 2{,}9 - 10 \cdot 2 = 3 + 72{,}5 - 20 = 55{,}5$

$\operatorname{cov}(3X_1 - 2X_2; -X_1 + 5X_2) = 3 \cdot (-1) DX_1 + (-2) \cdot 5 DX_2 + (3 \cdot 5 + 2 \cdot 1) \operatorname{cov}(X_1, X_2) =$
$= -3 \cdot 3 - 10 \cdot 2{,}9 + 17 \cdot 2 = -9 - 29 + 34 = -4$

5. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.95, утверждать, что частота выпадения герба попадет в интервал (0.4, 0.6)? Решите задачу с помощью неравенства Чебышева и с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа. (*6 баллов*)

Y_n - число гербов
$\hat{p} - \frac{Y_n}{n}$ - частота выпадения

$p = 0{,}5 \quad q = 0{,}5$

$MY_n = pn \Rightarrow M\hat{p} = p = 0{,}5$

$DY_n = pqn \Rightarrow D\hat{p} = \frac{pq}{n} = \frac{0{,}25}{n}$

интервал $(0{,}4; 0{,}6) \Rightarrow \varepsilon = 0{,}1$

Чебышев:

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2}$

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| < \varepsilon\} > 1 - \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2}$

$1 - \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2} < 0{,}95$

$1 - 0{,}95 < \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2}$

$\frac{0{,}25}{n \cdot 0{,}1^2} = 0{,}05$

$\frac{1}{n} = \frac{0{,}1^2 \cdot 0{,}05}{0{,}25}$

$n = \frac{0{,}25}{0{,}1^2 \cdot 0{,}05}$

$n = 500$

Муавра-Лапласа

$P\{0{,}4 < \frac{Y_n}{n} < 0{,}6\} = \Phi_0\left(\frac{0{,}6 - M\hat{p}}{\sqrt{D\hat{p}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{0{,}4 - M\hat{p}}{\sqrt{D\hat{p}}}\right) =$

$= \Phi_0\left(\frac{(0{,}6 - 0{,}5)}{0{,}5}\sqrt{n}\right) - \Phi_0\left(\frac{(0{,}4 - 0{,}5)}{0{,}5}\sqrt{n}\right) = \Phi_0(0{,}2\sqrt{n}) - \Phi_0(-0{,}2\sqrt{n}) =$

$= 2\Phi_0(0{,}2\sqrt{n}) = 0{,}95$

$\Phi_0(0{,}2\sqrt{n}) = 0{,}475$

$0{,}2\sqrt{n} = 1{,}96$

$\sqrt{n} = 9{,}8 \qquad n = 96{,}04 \Rightarrow n = 97$

5. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что частота появления грани с номером „6" при 200 бросаниях правильной игральной кости отклонится от вероятности ее появления не более, чем на 0,05. Найденный ответ сравните с результатом, полученным с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа. *(6 баллов)*

$p = \frac{1}{6}$ $\quad q = 5/6 \quad n = 200 \quad \varepsilon = 0{,}05$

y_n - число появлений 6

$\hat{p} = \frac{y_n}{n}$ - частота

$My_n = pn \Rightarrow M\hat{p} = p = \frac{1}{6}$

$Dy_n = qpn \Rightarrow D\hat{p} = \frac{qp}{n}$

Чебышев:

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| < \varepsilon\} \geq -\frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2} + 1$

$P \geq 1 - \frac{qp}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 200\cdot 0{,}05^2} = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$

Муавра-Лапласа:

$P\{\frac{7}{60} < \hat{p} < \frac{13}{60}\} = \Phi_0\left(\frac{\frac{13}{60} - M\hat{p}}{\sqrt{D\hat{p}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{\frac{7}{60} - M\hat{p}}{\sqrt{D\hat{p}}}\right) =$

$= \Phi_0(1{,}9) - \Phi_0(-1{,}9) = 2\Phi_0(1{,}9) = 2\cdot 0{,}4713 = 0{,}9426$

5. Имеются две случайные величины X и Y, при этом Y=2-4X. Известно, что M[X]=-1, D[X]=4. Определить: 1)M[Y], D[Y]; 2)коэффициент корреляции $\rho_{x,y}$. *(6 баллов)*

$Y = 2 - 4X$

$MY = M(2-4X) = 2 - 4MX = 2 - 4\cdot(-1) = 2 + 4 = 6$

$DY = D(2-4X) = 16DX = 16\cdot 4 = 64$

$|cov(X,Y)| = \sqrt{DXDY}$

$|\rho_{xy}| = \left|\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}\right| = \frac{\sqrt{DXDY}}{\sqrt{DXDY}} = 1$

5. Известно, что случайная величина ξ имеет равномерное распределение на интервале (a, b) и $M\xi = D\xi = 3$. Найдите числа a и b. *(6 баллов)*

$f\xi = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \xi \in (a;b) \\ 0 & \xi \notin (a,b) \end{cases}$

$M\xi = \int_a^b \xi \frac{1}{b-a} d\xi = \frac{1}{b-a}\frac{\xi^2}{2}\Big|_0^b = \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2} = 3$

$b - a = 6$

$b = a + 6$

$D\xi = \int_a^{a+6} (\xi - M\xi)^2 \frac{1}{a+6-a} d\xi = \frac{1}{6}\int_a^{a+6} (\xi - \frac{6a}{2})^2 d\xi = \frac{1}{6}\int_a^{a+6} \xi^2 - 6\xi + 9\, d\xi =$

$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_a^{a+6} - (3\xi^2)\Big|_a^{a+6} + 9(\xi)\Big|_a^{a+6}\right) =$

$= \frac{1}{6}(6a^2 + \cancel{36a} + 72 - \cancel{36a} - 108 + 54) = \frac{1}{6}(6a^2 + 18) =$

$= a^2 + 3$

$D\xi = a^2 + 3 = 3$

$a^2 = 0$

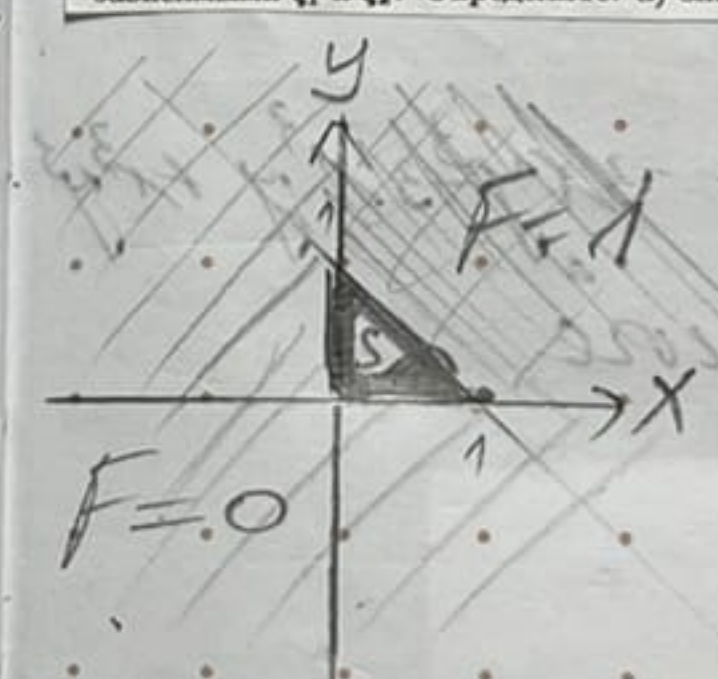
$a = 0$

$b = a + 6 = 6$

5. Двумерный случайный вектор $\xi = [\xi_1; \xi_2]^T$ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} C(x_1 + x_2), & (x_1, x_2) \in G; \\ 0, & (x_1, x_2) \notin G, \end{cases}$$

где $G \subset R^2$ – треугольник, ограниченный прямыми $x_1 + x_2 = 1$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Являются ли зависимыми ξ_1 и ξ_2? Определите: а) значение константы C; б) $M[\xi_1]$. *(6 баллов)*



а) $\iint_S f(x,y)\,dxdy = 1$

$C\iint_S x + y\,dxdy = C\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x + y\,dy =$

$= C\int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\,dx = C\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{C}{6} = 1 \Rightarrow C = 6$

$f(x,y) = \begin{cases} 6(x+y) & (x,y) \in G \\ 0 & (x,y) \notin G \end{cases}$

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 6(x+y)\,dy = \int_0^{1-x} 6x\,dy + \int_0^{1-x} 6y\,dy =$

$= 6xy\Big|_0^{1-x} + 3y^2\Big|_0^{1-x} = 6x(1-x) + 3(1 - 2x + x^2) =$

$= \cancel{6x} - 6x^2 + 3 \cancel{- 6x} + 3x^2 = 3 - 3x^2$

$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{1-y} 6x + 6y\,dx = \int_0^{1-y} 6x\,dx + \int_0^{1-y} 6y\,dx =$

$= 3x^2\Big|_0^{1-y} + 6xy\Big|_0^{1-y} = 3(1 - 2y + y^2) + 6y(1-y) =$

$= 3 \cancel{- 6y} + 3y^2 \cancel{+ 6y} - 6y^2 = 3 - 3y^2$

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 3x-3x^3\,dx=3\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right)=$$
$$=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=0{,}75$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy=\int_0^x\int_0^y 6x+6y\,dx\,dy=$$
$$=6\int_0^x\int_0^y x+y\,dx\,dy=6\int_0^x xy+\frac{y^2}{2}\,dx=6\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}\right)=$$
$$=3x^2y+3xy^2$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0;\ y<0\\ 3x^2y+3xy^2 & x\in G\\ 1 & x\geq 0;\ y\geq 0;\ x\notin G\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_0^x 3-3x^2\,dx=3x-\frac{3x^3}{3}=3x-x^3$$
$$F(y)=\int_{-\infty}^{y} f(y)\,dy=\int_0^y 3-3y^2\,dy=3y-\frac{3y^3}{3}=3y-y^3$$

$$F(x)\cdot F(y)=(3x-x^3)(3y-y^3)=9xy-3xy^3-3x^3y+x^3y^3$$

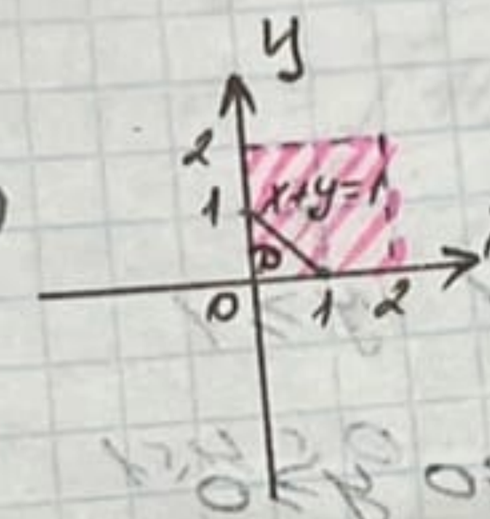
$F(x)\cdot F(y)\neq F(x,y) \Rightarrow$ зависимые

5. Двумерная случайная величина $(\xi;\eta)$ подчинена закону распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Область D — треугольник, ограниченный прямыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$. Найти: а) величину A; б) математические ожидания величин ξ и η; в) вероятность попадания вектора в квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=2$; г) будут ли случайные величины ξ и η независимыми? (6 баллов)

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$



$$A\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y\,dy=$$
$$=A\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}x\,dx=\frac{A}{2}\int_0^1 x^3-2x^2+x\,dx=$$
$$=\frac{A}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{A}{24}\Rightarrow A=24$$

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy=\int_0^{1-x}24xy\,dy=12xy^2\Big|_0^{1-x}=12(x^3-2x^2+x)$$

$$MX=\int_0^1 x f(x)\,dx=\int_0^1(12x^4-24x^3+12x^2)\,dx=$$
$$=\frac{12x^5}{5}-6x^4+4x^3\Big|_0^1=0{,}4$$

$$f(y)=\int_0^{1-y} f(x,y)\,dx=\int_0^{1-y}24xy\,dx=12yx^2\Big|_0^{1-y}=12(y^3-2y^2+y)$$

$$MY=\int_0^1 y f(y)\,dy=\int_0^1(12y^4-24y^3+12y^2)\,dy=$$
$$=\frac{12y^5}{5}-6y^4+4y^3\Big|_0^1=0{,}4$$

$$P\{(x,y)\in S\}=\iint f(x,y)\,dx\,dy=24\int_0^2 x\,dx\int_0^2 y\,dy=$$
$$=24\int_0^2 2x\,dx=96$$

$$F(x,y)=\int_0^x 24x\,dx\int_0^y y\,dy=24\int_0^x x\frac{y^2}{2}\,dx=\frac{24x^2y^2}{4}=6x^2y^2$$

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x(12x^3-24x^2+12x)\,dx=$$
$$=(3x^4-8x^3+6x^2)\Big|_0^x=3x^4-8x^3+6x^2$$

$$F(y) = \int_0^y f(y)dy = \int_0^y (12y^3 - 24y^2 + 12y)\,dy =$$
$$= (3y^4 - 8y^3 + 6y^2)\Big|_0^y = 3y^4 - 8y^3 + 6y^2$$

$F(x)F(y) \neq F(x,y) \Rightarrow$ зависимы

$F(x,y) = F(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 \qquad 0 \le x \le 1 \quad y > 1$

$F(x,y) = F(y) = 3y^4 - 8y^3 + 6y^2 \qquad x > 1 \quad 0 \le y \le 1$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad y < 0 \\ 6x^2y^2 & (x,y) \in D \\ 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 & 0 \le x \le 1 \quad y > 1 \\ 3y^4 - 8x^3 + 6x^2 & x > 1 \quad 0 \le y \le 1 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \quad 0 \le x \le 1;\ (x,y) \notin D \\ & x > 1 \quad y > 1 \end{cases}$$

$$P\{0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2\} = F(0,0) + F(2,2) - F(0;2) - F(2,0) =$$
$$= 0 + 1 - 0 - 0 = 1$$

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{(-2x-3y)} & x\geq 0 \quad y\geq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$A\int_0^\infty e^{-2x}dx\int_0^\infty e^{-3y}dy=A\int_0^\infty \frac{1}{3}e^{-2x}dx=\frac{A}{6}=1 \Rightarrow A=6$$

$$f(x,y)=\begin{cases} 6e^{(-2x-3y)} & x\geq 0 \quad y\geq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty 6e^{-2x}e^{-3y}dy=2e^{-2x}$$

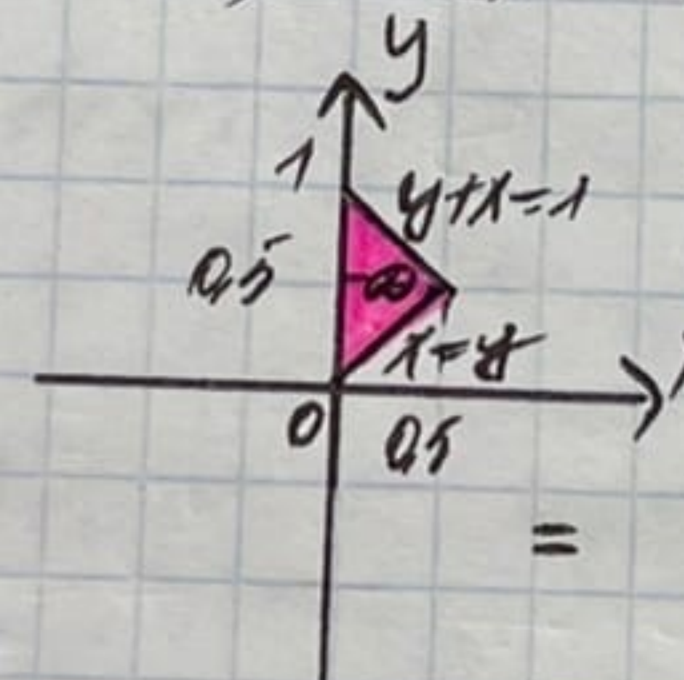
$$f(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx=\int_0^\infty 6e^{-2x}e^{-3y}dx=3e^{-3y}$$

$$F(x,y)=\int_0^x 6e^{-2x}dx\int_0^y e^{-3y}dy=(1-e^{-3y})(1-e^{-2x})$$

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x 2e^{-2x}dx=(1-e^{-2x})$$

$$F(y)=\int_0^y f(y)dy=\int_0^y 3e^{-3y}dy=(1-e^{-3y})$$

$F(x)F(y)=F(x,y) \Rightarrow$ независимы



$$P\{(x,y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^{0,5} 6e^{-2x}dx\int_x^{1-x} e^{-3y}dy=2\int_0^{0,5} e^{-2x}(e^{-3x}-e^{3x-3})dx=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{e^{-2,5}}{5}+e^{-3}-e^{-2,5}=\frac{1}{5}+e^{-3}-\frac{6}{5}e^{-2,5}=$$

$$=\frac{1+5e^{-3}-6e^{-2,5}}{5}=0,15$$

$= \frac{1}{5} + e \quad - \frac{6}{5} e =$

$0{,}15$

$= 1{,}4 + 1{,}6e^{-2{,}5} - e^{-2} - 2e^{-2}$

5. Случайные величины ξ и η имеют следующие числовые характеристики: $M\xi = 10$, $\sigma_\xi = 0{,}1$, $M\eta = 5$, $\sigma_\eta = 0{,}05$; $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0{,}8$. Найти MU, σ_U, MV, σ_V, $\operatorname{cov}(U, V)$, где $U = 3\xi + \eta$, $V = \xi - \eta$. (6 баллов)

$MU = M(3\xi + \eta) = 3M\xi + M\eta = 3 \cdot 10 + 5 = 35$

$\sigma_\xi = 0{,}1 \Rightarrow D\xi = 0{,}01$

$\sigma_\eta = 0{,}05 \Rightarrow D\eta = 0{,}0025$

$DU = D(3\xi + \eta) = 9D\xi + D\eta + 2 \cdot 3 \cdot 1 \operatorname{cov}(\xi, \eta) =$
$= 9 \cdot 0{,}01 + 0{,}0025 + 6 \cdot 0{,}8 = 4{,}8125$

$\sigma_U = 2{,}19$

$MV = M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta = 10 - 5 = 5$

? $DV = D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta - 2\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0{,}01 + 0{,}0025 - 2 \cdot 0{,}8 =$
$= -1{,}5875.$

$\operatorname{cov}(U, V) = \operatorname{cov}(3\xi + \eta; \xi - \eta) = 3 \cdot 1 D\xi + 1(-1)D\eta +$
$+ (3 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1)\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 3D\xi - D\eta - 2 \cdot \operatorname{cov}(\xi, \eta) =$
$= 3 \cdot 0{,}01 - 0{,}0025 - 2 \cdot 0{,}8 = -1{,}5725.$

5. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что при 10 000 бросаниях правильной игральной кости частота появления грани с четным числом очков отклонится от вероятности ее появления не более чем на 0,01. Ответ сравните с результатом, полученным с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа. *(6 баллов)*

Y_n - число раз

$\hat{p} = \frac{Y_n}{n}$ - частота

$p = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$ $n = 10\,000$ $\varepsilon = 0{,}01$

$MY_n = pn \Rightarrow M\hat{p} = p = 1/2 = 0{,}5$

$DY_n = pqn \Rightarrow D\hat{p} = \frac{pq}{n} = \frac{1}{4 \cdot 10000}$

Чебышев:

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| \geq \varepsilon\} < \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2}$

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| < \varepsilon\} > 1 - \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2}$

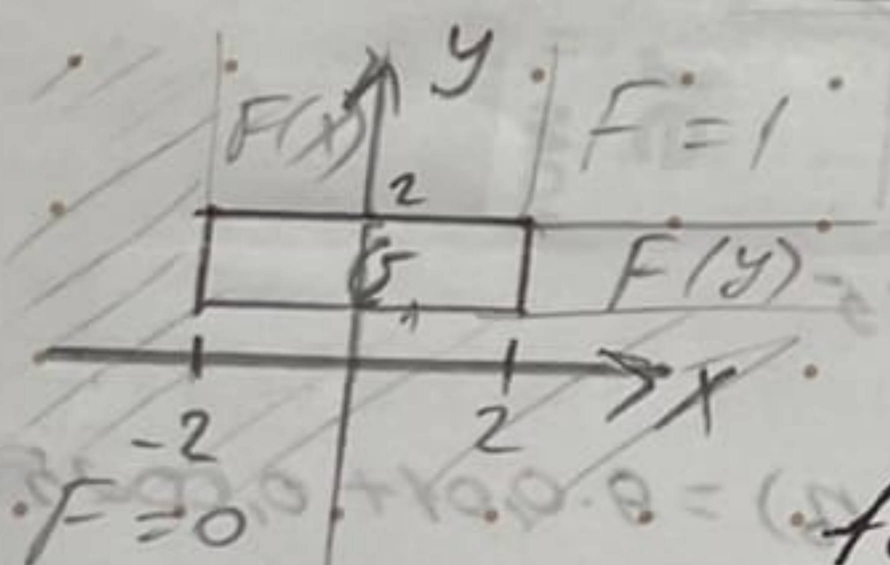
$P > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10000 \cdot 0{,}01^2} = 0{,}75$

М-Л:

$P\{0{,}49 < \hat{p} < 0{,}51\} = \Phi_0\left(\frac{0{,}51 - 0{,}5}{0{,}005}\right) - \Phi_0\left(\frac{0{,}49 - 0{,}5}{0{,}005}\right) =$

$= \Phi_0(2) + \Phi_0(2) = 2\Phi_0(2) = 2 \cdot 0{,}4773 = 0{,}9546$

5. Случайный вектор (X_1, X_2) распределен равномерно внутри прямоугольника $G = \{(x,y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$. Записать выражение для совместной функции плотности распределения вероятностей $f(x,y)$. Найти $F(x,y)$, MX, DX. Будут ли случайные величины X и Y некоррелированными? *(6 баллов)*



$S = 4 \cdot 1 = 4$

$f(x,y) = \begin{cases} 0{,}25 & (x,y) \in G \\ 0 & (x,y) \notin G \end{cases}$

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_1^2 0{,}25\,dy = \frac{y}{4}\Big|_1^2 =$

$= \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}\,dx = \frac{x}{4}\Big|_{-2}^{2} = \frac{2+2}{4} = 1$

$MX = \int_{-2}^{2} 0{,}25x\,dx = \frac{x^2}{8}\Big|_{-2}^{2} = \frac{4-4}{8} = 0$

$DX = \int_{-2}^{2} (x-0)^2\,dx = \int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{8+8}{3} = \frac{16}{3}$

$MY = \int_1^2 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4-1}{2} = 3/2$

$MY^2 = \int_1^2 y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$

$DY = MY^2 - (MY)^2 = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{12}$

1) $(x,y) \in G$

$F(x,y) = \int_{-2}^{x} dx \int_1^{y} 0{,}25\,dy = 0{,}25(y-1)(x+2)$

2) $-2 < x < 2$ $y > 2$

$F(x,y) = F(x) = \int_{-2}^{x} f(x)\,dx = \int_{-2}^{x} \frac{1}{4}\,dx = \frac{x+2}{4}$

3) $x > 2$ $1 < y < 2$

$F(x,y) = F(y) = \int_1^{y} f(y)\,dy = \int_1^{y} dy = y - 1$

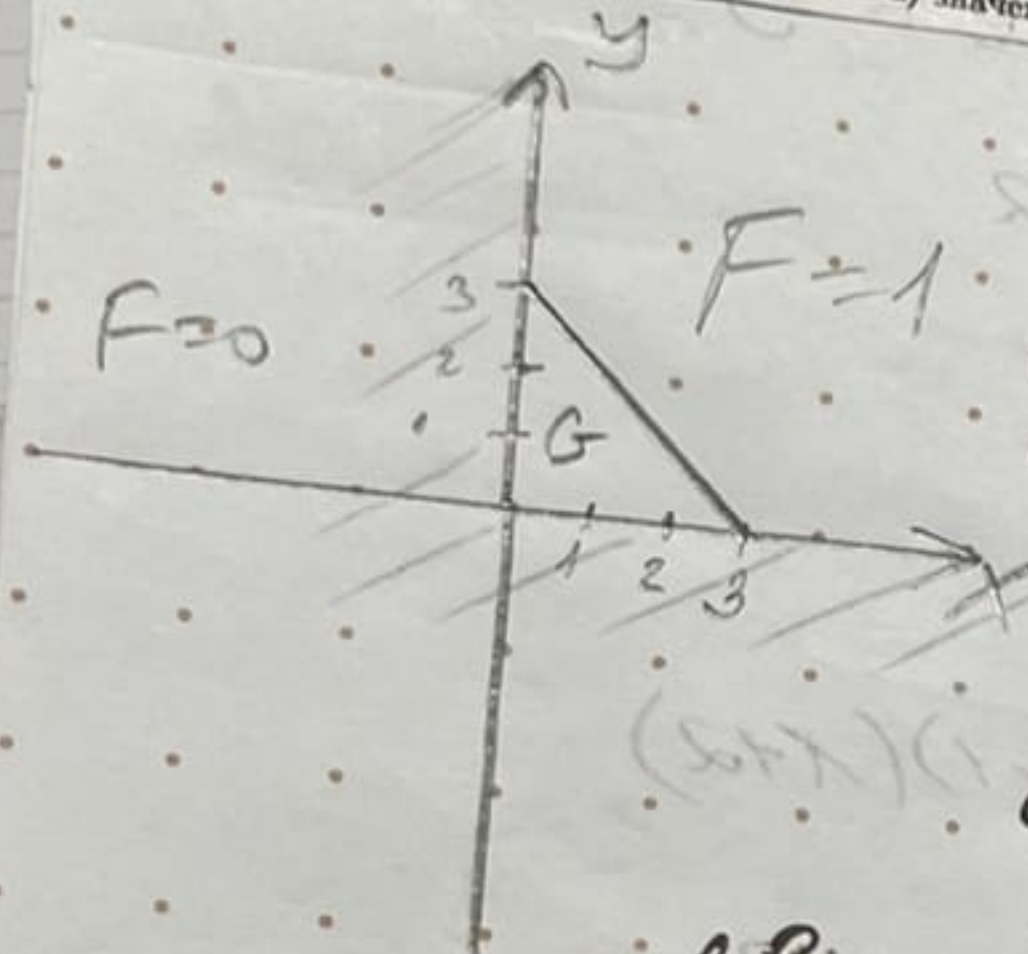
$F(x,y) \begin{cases} 0 & x < -2 \quad y < 1 \\ 0{,}25(y-1)(x+2) & (x,y) \in G \\ \frac{x+2}{4} & -2 < x < 2 \quad y > 2 \\ y - 1 & x > 2 \quad 1 < y < 2 \\ 1 & x > 2 \quad y > 2 \end{cases}$

$F(x)\,F(y) = F(x,y) \Rightarrow X$ и Y независимые

5. Двумерный случайный вектор $\xi = [\xi_1; \xi_2]^T$ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} Cx_1x_2, & (x_1,x_2) \in G; \\ 0, & (x_1,x_2) \notin G, \end{cases}$$

где $G \subset R^2$ – треугольник, ограниченный прямыми $x_1 + x_2 = 3$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Являются ли зависимыми ξ_1 и ξ_2? Определите: а) значение константы C; б) $M[\xi_1]$. (*6 баллов*)



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$C\int_0^3 x\,dx \int_0^{3-x} y\,dy = \frac{C}{2}\int_0^3 x(9-6x+x^2)\,dx =$$

$$= \frac{C}{2}\int_0^3 (x^3-6x^2+9x)\,dx = \frac{27}{8}C = 1$$

$$C = \frac{8}{27}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{27}xy & (x,y) \in G \\ 0 & (x,y) \notin G \end{cases}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{3-x} \frac{8}{27}xy\,dy = \frac{4}{27}(x^3-6x^2+9x)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{3-y} \frac{8}{27}xy\,dx = \frac{4}{27}(y^3-6y^2+9y)$$

$$MX = \int_0^3 \frac{4}{27}(x^4-6x^3+9x^2)\,dx = 1,2$$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{4}{27}(x^3-6x^2+9x) = \frac{4}{27}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right) =$$

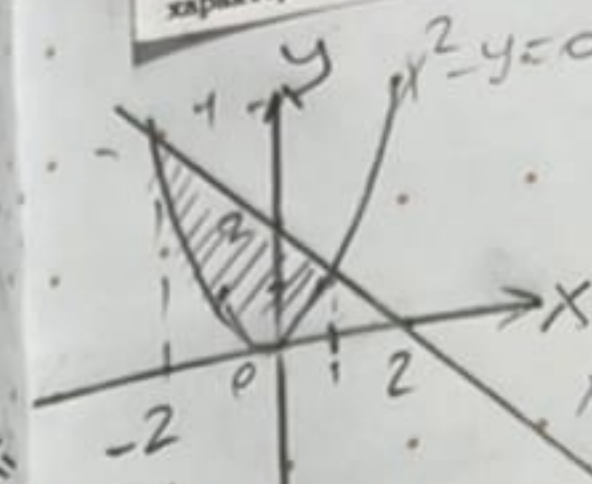
$$= \frac{4}{27}\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right)$$

$$F(y) = \int_0^y f(y)\,dy = \int_0^y \frac{4}{27}(y^3-6y^2+9y) = \frac{4}{27}\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right)$$

$$F(x,y) = \int_0^x \frac{8}{27}x\,dx \int_0^y y\,dy = \frac{2x^2y^2}{27}$$

$F(x)F(y) \neq F(x,y) \Rightarrow$ зависимые

5. Случайный вектор $\xi = [\xi_1; \xi_2]^T$ имеет равномерное распределение в области в множестве D, заданном неравенствами $x > 0$, $x + y < 2$, $x^2 < y$. Являются ли зависимыми скалярные случайные величины ξ_1 и ξ_2? Определите плотность распределения вероятностей этих величин и числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$. (*6 баллов*)



$$S = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} dy = 4,5$$

$$f(x,y) = \frac{1}{S} = \frac{2}{9}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & (x,y) \in S \\ 0 & (x,y) \notin S \end{cases}$$

$$f(x) = \int_{x^2}^{2-x} \frac{2}{9}\,dy = \frac{2}{9}(2-x-x^2)$$

$$f(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2-y} \frac{2}{9}\,dx = \frac{2}{9}(2-y-\sqrt{y})$$

$$MX = \int_{-2}^{1} \frac{2}{9}(2x-x^2-x^3)\,dx = -0,5$$

$$MX^2 = \int_{-2}^{1} \frac{2}{9}(2x^3-x^3-x^4)\,dx = 3,15$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 2,9$$

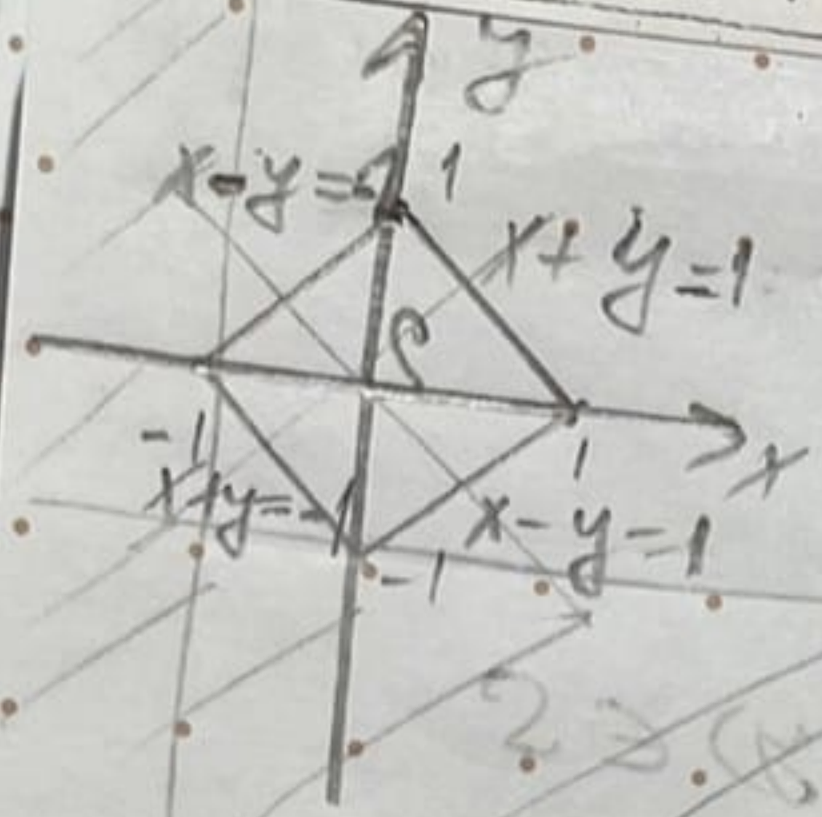
$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{9}(2-x-x^2)\,dx = \frac{2}{9}\left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$F(y) = \int_0^y \frac{2}{9}(2-y-\sqrt{y}) = \frac{2}{9}\left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2y^{3/2}}{3}\right)$$

$$F(x,y) = \int_{\sqrt{y}}^{x} \frac{2}{9}\,dx \int^{y} dy = \int_{\sqrt{y}}^{x} \frac{2}{9}(y-x^2)\,dx = \frac{2}{9} = xy - \frac{x^3}{3} - \frac{2y^{3/2}}{3}$$

$F(x)F(y) \neq F(x,y) \Rightarrow$ зависимые

Случайный вектор $[X;Y)]^T$ равномерно распределен в квадрате с вершинами в точках: (1,0); (0,1); (−1,0); (0,−1). Найдите $F_{XY}(x,y)$, $f_Y(y)$, $M[Y]$ (6 баллов)



$S=1 \quad f_{x,y}=\frac{1}{S}$

$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in S\\ 0 & (x,y)\notin S\end{cases}$

$f(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=$

$=\int\limits_{y-1}^{1-y} dx+\int\limits_{-1-y}^{y+1} dx = 1-y-y+1+\cancel{y}+1+1+\cancel{y}=4$

$MY=\int\limits_{-1}^{1} 4y\,dy=0$

$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} dx\,dy=\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-1-y}^{0} dx+\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{0}^{y+1} dx+$

$+\int\limits_{0}^{y} dy\int\limits_{y-1}^{x} dx=\int\limits_{-1}^{0}(1+y)\,dy+\int\limits_{-1}^{0} y+1\,dy+\int\limits_{0}^{y}(x-y+1)\,dy=$

$=2\int\limits_{-1}^{0}(y+1)\,dy+\int\limits_{0}^{y}(x-y+1)\,dy=2\left(\frac{1}{2}\right)+xy-\frac{y^2}{2}+y=$

$=1+y+xy-\frac{y^2}{2}$

5. Вероятность некоторого случайного события равна 0.7. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0.98 можно было ожидать, что наблюденная частота этого события отклонится от его вероятности не более, чем на 0.05? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа. (*6 баллов*)

Y_n – число событий

$\hat{p} = \frac{Y_n}{n}$ – частота событий

$p = 0{,}7 \quad q = 0{,}3$

$P = 0{,}98$

$\varepsilon = 0{,}05$

$MY_n = pn \Rightarrow M\hat{p} = p$

$DY_n = qpn \Rightarrow D\hat{p} = \frac{qp}{n}$

Чебышев

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2}$

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2}$

$0{,}98 \geq 1 - \frac{qp}{n\varepsilon^2}$

$\frac{qp}{n\varepsilon^2} > 0{,}02$

$qp > 0{,}02\, n\varepsilon^2$

$n < \frac{qp}{0{,}02\,\varepsilon^2} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{0{,}02 \cdot 0{,}05^2} = 4200$

абсурд?

М-Л:

$P\{0{,}65 < p < 0{,}75\} = \Phi_0\left(\frac{0{,}75 - 0{,}7}{\sqrt{0{,}7 \cdot 0{,}3}}\sqrt{n}\right) - \Phi_0\left(\frac{0{,}65 - 0{,}7}{\sqrt{0{,}7 \cdot 0{,}3}}\sqrt{n}\right) =$

$= \Phi_0(0{,}1\sqrt{n}) - \Phi_0(-0{,}1\sqrt{n}) = 2\Phi_0(0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}98$

$\Phi_0(0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}49$

$0{,}1\sqrt{n} = 2{,}35$

$\sqrt{n} = 23{,}5$

$n = 552{,}25$

$n = 553.$

5. Дана плотность распределения вероятности системы случайных величин (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти: а) постоянную A; б) функцию распределения; в) математические ожидания X и Y; г) будут ли X и Y независимыми? (6 баллов)

а) $A\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}(x+y)\,dy = A\int_0^{\pi/2}\left(x\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)dy = \frac{\pi^3+\pi^4}{16}\cdot A = 1$

$A = \frac{16}{\pi^3+\pi^4}$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{16}{\pi^3+\pi^4}(x+y) & 0 \le x \le \pi/2 \quad 0 \le y \le \pi/2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$F(x,y) = \int_0^x \frac{16}{\pi^3+\pi^4}dx\int_0^y (x+y)\,dy = \frac{16}{\pi^3+\pi^4}\int_0^x \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)dx =$

$= \left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}\right)\frac{16}{\pi^3+\pi^4}$

$f(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{16}{\pi^3+\pi^4}(x+y)\,dy = \frac{8x+2\pi}{\pi^2+\pi^3}$

$f(y) = \int_0^{\pi/2}\frac{16}{\pi^3+\pi^4}(x+y)\,dx = \frac{8y+2\pi}{\pi^2+\pi^3}$

$MX = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\pi^2+\pi^3}(8x^2+2\pi x)\,dx = \frac{13\pi}{12(\pi+1)} = 0{,}82$

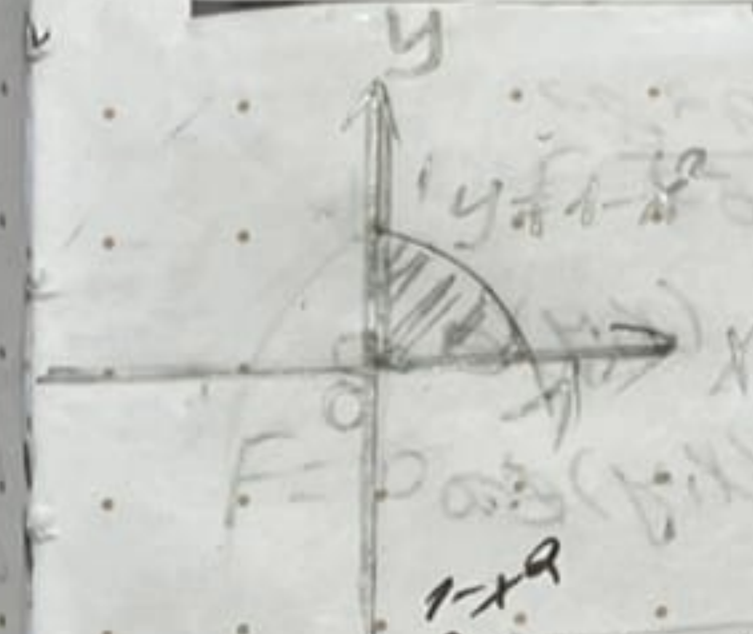
$MY = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\pi^2+\pi^3}(8y^2+2\pi y)\,dy = \frac{13\pi}{12(\pi+1)} = 0{,}82$

$F(x) = \int_0^x \frac{16}{\pi^3+\pi^4}(x+y)\,dx = \frac{8x(x+2y)}{\pi^3+\pi^4}$

$F(y) = \int_0^y \frac{16}{\pi^3+\pi^4}(x+y)\,dy = \frac{8y(y+2x)}{\pi^3+\pi^4}$

$F(x)F(y) \neq F(x)F(y) \Rightarrow$ зависимы

5. Случайный вектор $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ распределен равномерно в области $D \subset R^2$, границы которого заданы неравенствами $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_2 \leqslant 1 - x_1^2$. Являются ли зависимыми скалярные случайные величины ξ_1 и ξ_2? Определите $M[\xi_1]$ и $D[\xi_1]$. (6 баллов)



$S = \int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}dy = \int_0^1(1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}$

$f(x,y) = \frac{1}{S}$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2} & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$

$f(x) = \int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy = \int_0^{1-x^2}\frac{3}{2}dy = \frac{3y}{2}\Big|_0^{1-x^2} = \frac{3-3x^2}{2}$

$f(y) = \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx = \int_0^{\sqrt{1-y}}\frac{3}{2}dy = \frac{3\sqrt{1-y}}{2}$

$MX = \int_0^1\frac{3}{2}(x-x^3)\,dx = 0{,}375$

$MY = \int_0^1\frac{3}{2}y\sqrt{1-y}\,dy = 0{,}4$

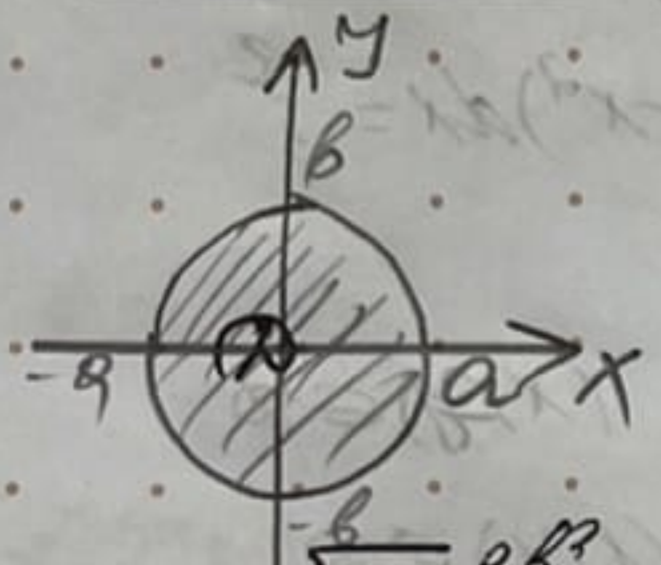
$F(x,y) = \frac{3}{2}\int_0^x dx\int_0^y dy = \frac{3}{2}\int_0^x y\,dx = \frac{3xy}{2}$

$F(x) = \int_0^x\frac{3}{2}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{3x-x^3}{2}$

$F(y)\ \int_0^y\frac{3}{2}\sqrt{1-y}\,dy = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(1-y)^{3/2} = -(1-y)^{3/2}$

$F(x)\cdot F(y) \neq F(x,y) \Rightarrow$ зависимые

5. Случайный вектор $\xi = [\xi_1; \xi_2]^T$ имеет равномерное распределение в множестве D, заданном неравенством $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leqslant 1$. Являются ли зависимыми скалярные случайные величины ξ_1 и ξ_2? Определите плотность распределения вероятностей этих величин и числовые характеристики $M[\xi_1]$ и $D[\xi_1]$. (6 баллов)



$$S=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} r\,dr = \frac{\pi a^2 b^3}{a^2+b^2}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{a^2+b^2}{\pi a^2 b^2} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$f(x)=\int_{-\sqrt{b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}}^{+\sqrt{b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}} \frac{a^2+b^2}{\pi a^2b^2}\,dy = \frac{2(a^2+b^2)}{\pi a^2b^2}\sqrt{b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}$$

$$f(y)=\int_{-\sqrt{a^2-\frac{y^2a^2}{b^2}}}^{\sqrt{a^2-\frac{y^2a^2}{b^2}}} \frac{a^2+b^2}{\pi a^2b^2}\,dx = \frac{2(a^2+b^2)}{\pi a^2b^2}\sqrt{a^2-\frac{y^2a^2}{b^2}}$$

$$MX=\int_{-a}^{a}\frac{2(a^2+b^2)}{\pi a^2b^2}x\sqrt{b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}\,dx = \frac{2b(a^2+b^2)}{\pi a^2b^2}\int_{-a}^{a}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$DX=\int_{-a}^{a}\frac{2(a^2+b^2)}{\pi a^2b^2}\sqrt{b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}(x-MX)\,dx=\ldots$$

5. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей:

$$f(x,y) = \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}.$$

Найти коэффициент a, плотности распределения вероятностей отдельных величин. Выяснить, зависит ли X и Y друг от друга. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в первую четверть системы координат. (6 баллов)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy = a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\pi\,dx = a\pi^2=1 \Rightarrow a=\frac{1}{\pi^2}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dy = \frac{\pi}{\pi^2(1+x^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dx = \frac{\pi}{\pi^2(1+y^2)} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\,dx\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{(\operatorname{arctg} y+\frac{\pi}{2})(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2})}{\pi^2}$$

$$P\{0<x<\pi/2;\ 0<y<\pi/2\} = F(0,0)+F(\pi/2,\pi/2)-F(0,\pi/2)-F(\tfrac{\pi}{2},0)=$$

$$=\frac{\pi^2}{4\pi^2}+1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}-0{,}4-0{,}4=1$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} y+\frac{\pi}{2}\right),$$

$F(x)F(y) = F(x,y) \Rightarrow$ независимые

5. Случайный вектор $\xi = [\xi_1; \xi_2]^T$ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_\xi(x_1, x_2) = \frac{C}{4 + x_1^2 + 4x_2^2 + x_1^2 x_2^2}.$$

Являются ли зависимыми ξ_1 и ξ_2? Найдите: а) коэффициент C; б) плотности распределения вероятностей случайных величин $\xi_1(x_1)$ и $\xi_2(x_2)$; в) вероятность $P\{\xi \in D\}$, где множество D задано неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. *(6 баллов)*

а) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{(4+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy = C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy =$

$= C\frac{\pi^2}{2} \Rightarrow C = \frac{2}{\pi^2}$

$f(x,y) = \frac{2}{\pi^2(4+x^2)(1+y^2)}$

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi^2(4+x^2)(1+y^2)}dy = \frac{2}{\pi(4+x^2)}$

$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi^2(4+x^2)(1+y^2)}dx = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\frac{2\,dx}{\pi^2(4+x^2)}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}dy = \frac{(\mathrm{arctg}\,y+\frac{\pi}{2})(\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})}{\pi^2}$

$P\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\} = F(0,0)+F(1;1)-F(1;0)-F(0;1) =$

$= \frac{1}{4} + 0{,}48 - 0{,}32 - 0{,}375 = 0{,}035$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{2\,dx}{\pi(4+x^2)} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\frac{2}{\pi} = \frac{\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}}{\pi}$

$F(y) = \int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\pi(1+y^2)}dy = \frac{\mathrm{arctg}\,y+\frac{\pi}{2}}{\pi}$

$F(x)\cdot F(y) = F(x,y) \Rightarrow$ независимые

5. Вероятность случайного события равна 0.9. Выполнено 6400 испытаний. Какова вероятность того, что наблюдаемая частота случайных событий лежит в интервале 0.9 ± 0.01? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа. *(6 баллов)*

$p = 0{,}9$ $\quad q = 0{,}1$ $\quad n = 6400$ $\quad \varepsilon = 0{,}01$

y_n = число

$\hat{p} = \frac{y_n}{n}$ – частота

$My_n = np \Rightarrow M\hat{p} = p$

$Dy_n = pqn \Rightarrow D\hat{p} = \frac{pq}{n}$

Чебышев:

$P\{|\hat{p} - M\hat{p}| < \varepsilon\} > 1 - \frac{D\hat{p}}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{6400\cdot 0{,}01^2} = 0{,}86$

М-Л:

$P\{0{,}89 < \hat{p} < 0{,}91\} = \Phi_0\left(\frac{0{,}91-0{,}9}{\sqrt{0{,}9\cdot 0{,}1}}80\right) - \Phi_0\left(\frac{0{,}89-0{,}9}{\sqrt{0{,}9\cdot 0{,}1}}80\right) =$

$= 2\Phi_0(2{,}7) = 2\cdot 0{,}496 = 0{,}992$

5. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое 500 измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превышает 0,5, оценить вероятность того, что отклонение найденного таким образом значения величины от истинного не превысит 0,2. *(6 баллов)*

$n = 500$ $\quad \varepsilon = 0{,}2$

$\sigma = 0{,}5$

$D_1 = 0{,}25$

$D_{500} = \frac{D_1}{500} = \frac{0{,}25}{500}$

Дисперсия 500 измерений в 500 раз меньше дисперсии одного измерения.

$P\{|p - M| < 0{,}2\} > 1 - \frac{D_{500}}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}25}{500\cdot 0{,}2^2} = 0{,}9875$

5. Двумерная случайная величина (X, Y) подчинена закону распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} c\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}, & x^2+y^2<a^2, \\ 0, & x^2+y^2 \geqslant a^2. \end{cases}$$

Найти константу c, $P\{(X,Y)\} \in D$, где $D = \{(x,y) \mid x>0, y>0\}$, MX, MY. Будут ли X и Y некоррелированными? (6 баллов)

$f(x) \; f(y)$

$F(x) \; F(y)$

$F(r, y)$

$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} c\sqrt{a^2-r^2} & r^2<a^2 \\ 0 & r^2 \geqslant a^2 \end{cases}$$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} c\sqrt{a^2-r^2} & r<a \\ 0 & r \geqslant a \end{cases}$$

$$c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\, r\,dr = \frac{-c}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\, d(a^2-r^2) =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_0^a d\varphi = \frac{ca^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi a^3 c}{3} = 1$$

$$c = \frac{3}{2\pi a^3}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi a^3}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)} & x^2+y^2<a^2 \\ 0 & x^2+y^2 \geqslant a^2 \end{cases}$$

5. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в прямоугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$. Найти: 1) совместную функцию распределения; 2) частные плотности распределения случайных величин X и Y; 3) вероятность попадания случайной величины (X, Y) в круг $(x-3)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$; 4) будут ли случайные величины X и Y независимыми. (6 баллов)

$S = 3 \quad f(x,y) = \frac{1}{S}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}$$

$$f(y) = \int_0^3 f(x,y)\,dx = \int_0^3 \frac{1}{3}\,dx = 1$$

$$F(x,y) = \int_0^x dx \int_0^y \frac{1}{3}\,dy = \int_0^x \frac{y}{3}\,dx = \frac{xy}{3} \quad (x \in S)$$

$$F(x,y) = F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{3}\,dx = \frac{x}{3} \quad (1<x<3;\ y>1)$$

$$F(x,y) = F(y) = \int_0^y f(y)\,dy = \int_0^y dy = y \quad (x>3;\ 0<y<1)$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0,\ y<0 \\ \frac{xy}{3} & x \in S \\ x/3 & 1<x<3;\ y>1 \\ y & x>3;\ 0<y<1 \\ 1 & x>3\ \ y>1 \end{cases}$$

$F(x)\,F(y) = F(x,y) \Rightarrow$ независимые

$$P\{(x;y) \in D\} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int dx \int dy = \frac{1}{3} S_{кр}$$

$S_{кр} = \pi r^2 = \pi$

$P = \frac{\pi}{3} = 1$

5. Двумерная случайная величина (X, Y) подчинена закону распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} A(xy+y^2), & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти A, $P\{X+Y<2\}$, $f(x)$, MX. (6 баллов)

$$A\int_0^2 dx\int_0^2 (xy+y^2)\,dy = A\int_0^2 \left(2x+\frac{8}{3}\right)dx = A\,\frac{28}{3}=1 \Rightarrow A=\frac{3}{28}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{28}(xy+y^2) & 0\le x\le 2\quad 0\le y\le 2\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^2 \frac{3}{28}(xy+y^2)\,dy=\frac{3x+4}{14}$$

$$f(y)=\int_0^2\frac{3}{28}(xy+y^2)\,dx=\frac{3(y+y^2)}{14}$$

$$\checkmark\ MX=\int_0^2\frac{1}{14}(3x^2+4x)\,dx=\frac{8}{7}$$

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x\frac{3x+4}{14}\,dx=\frac{3x^2+8x}{28}$$

$$F(y)=\int_0^y f(y)\,dy=\int_0^y\frac{3}{14}(y+y^2)\,dy=\frac{3y^2+2y^3}{28}$$

$$F(x,y)=\int_0^x dx\int_0^y\frac{3}{28}(xy+y^2)\,dy=\frac{3xy^2+2y^3}{56}$$

$$\checkmark\ MY=\int_0^2\frac{3}{14}(y^2+y^3)\,dy=\frac{10}{7}$$

$$Mx^2=\int_0^2\frac{1}{14}(3x^3+4x^2)\,dx=\frac{34}{21}$$

$$MY^2=\int_0^2\frac{3}{14}(y^3+y^4)\,dy=\frac{78}{35}$$

$$DX=MX^2-(MX)^2=\frac{46}{147}=0{,}31 \Rightarrow \sigma_x=0{,}56$$

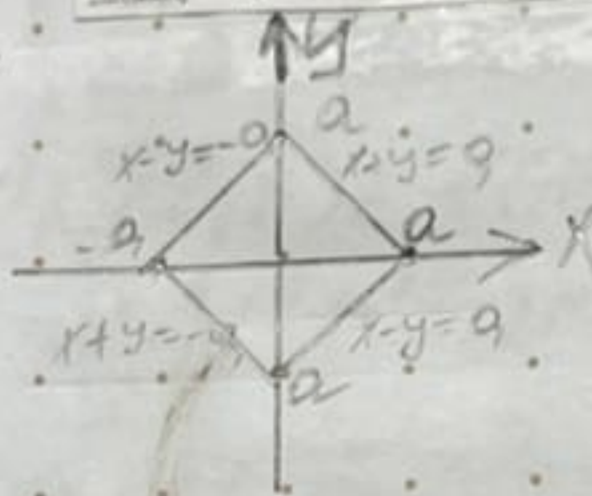
$$DY=MY^2-(MY)^2=\frac{46}{245}=0{,}19\Rightarrow \sigma_y=0{,}43$$

$\xi=X+Y$; $M\xi=MX+MY=\frac{18}{7}=2{,}6$; $D\xi=DX+DY=\frac{368}{735}=0{,}5$

$$P\{-\infty<\xi<2\}=\Phi_0\left(\frac{2-18/7}{\sqrt{0{,}5}}\right)-\Phi_0\left(\frac{-\infty-18/7}{\sqrt{0{,}5}}\right)=\Phi_0(-0{,}8)-\Phi_0(-\infty)=$$

$$=\Phi_0(\infty)-\Phi_0(0{,}8)=0{,}5-0{,}2881=0{,}2119$$

5. Случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в квадрате со сороной a и диагоналями, совпадающими с осями координат. Установить, зависимы или независимы его компоненты. Найти $M[X]$ и $P\{X^2+Y^2<a^2/4\}$. (6 баллов)



$S=a^2$ $\quad f(x,y)=\frac{1}{S}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2} & (x,y)\in S\\ 0 & (x,y)\notin S\end{cases}$$

$$f(x)=\int_{-a-x}^{x+a}\frac{1}{a^2}\,dy+\int_{x-a}^{a-x}\frac{1}{a^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{a^2}(x+a+a+x+a-x-x+a)=\frac{4a}{a^2}=\frac{4}{a}$$

$$f(y)=\int_{y-a}^{a-y}\frac{1}{a^2}\,dx+\int_{-a-y}^{a+y}\frac{1}{a^2}\,dx=\frac{1}{a^2}(a-y-y+a+a+y+a+y)=\frac{4a}{a^2}=\frac{4}{a}$$

$$MX=\int_{-a}^{a}\frac{4}{a}x\,dx=\frac{4}{a}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{a}\left(\frac{a^2}{a}-\frac{a^2}{a}\right)=0$$

$$F(x,y)=\frac{1}{a^2}\left(\int_{-a}^{0}dx\int_{-a-x}^{0}dy+\int_0^a dx\int_{x-a}^0 dy+\int_{-a}^x dx\int_0^y dy\right)=$$

$$=xy+ay$$

$$F(x)=\frac{4}{a}\left(\int_{y-a}^{x}dx+\int_{-y-a}^{x}dx\right)=\frac{4}{a}(x-y+a+x+y+a)=$$

$$=\frac{2(x+a)4}{a}=\frac{8(x+a)}{a}$$

$$F(y)=\frac{4}{a}\left(\int_{-a-x}^{y}dy+\int_{x-a}^{y}dy\right)=\frac{4}{a}(y+a+x+y-x+a)=$$

$$=\frac{8(y+a)}{a}$$

$F(x)F(y)\ne F(x,y)\Rightarrow$ зависимы

P-?

6

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{\vartheta^3}{2!}x^2 e^{-\vartheta x}, \quad x > 0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (4, 1, 3, 5, 7)$? (*6 баллов*)

1) $L(\vec{x},\vartheta) = f(X=x_1)\cdot\ldots\cdot f(X=x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\vartheta^3}{2!} x_i^2 e^{-\vartheta x_i} =$

$= \left(\frac{1}{2!}\right)^n \vartheta^{3n} \prod x_i^2 e^{-\vartheta \sum x_i}$

2) $\ln L(\vec{x}_n,\vartheta) = \ln(2!^{-n}) + \ln(\vartheta^{3n}) + \sum \ln x_i^2 - \vartheta \sum x_i =$

$= -n\ln 2! + 3n\ln\vartheta + 2\sum \ln x_i - \vartheta\sum x_i$

3) Уравнение правдоподобия:

$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{3n}{\vartheta} - \sum x_i = 0$

$3n = \vartheta \sum x_i$

$\vartheta = \frac{3n}{\sum x_i}$

4) Проверим, что это максимум:

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2} = -\frac{3n}{\vartheta^2} < 0 \Rightarrow$ максимум

$\hat{\vartheta}(\vec{X}_n) = \frac{3n}{\sum x_i}$

$\hat{\vartheta}(\vec{x}_5) = \frac{3\cdot 5}{4+1+3+5+7} = \frac{15}{20} = 0{,}75$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{1}{4!\vartheta^5} x^4 e^{-x/\vartheta}, \quad x > 0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (1, 4, 5, 2, 7)$? *(6 баллов)*

1) $L(\vec{X}, \vartheta) = f(X = x_1) \cdot \ldots \cdot f(X = x_n) = \prod \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{\vartheta^5} x_i^4 e^{-\frac{x_i}{\vartheta}} =$
$= (4!)^{-n} \vartheta^{-5n} \prod x_i^4 \, e^{-\frac{1}{\vartheta}\sum x_i}$

2) $\ln L(\vec{x}_n, \vartheta) = -n \ln 4! - 5n \ln \vartheta + \sum \ln x_i^4 - \frac{1}{\vartheta}\sum x_i$

3) Уравнение правдоподобия

$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = -\frac{5n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2}\sum x_i = 0$

$5n = \frac{\sum x_i}{\vartheta}$

$\vartheta = \frac{\sum x_i}{5n}$

4) Проверим, что это максимум:

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2}\Big|_{\hat\vartheta} = \frac{5n}{\vartheta^2} - \frac{2\sum x_i}{\vartheta^3}\Big|_{\hat\vartheta} = \frac{5n(5n)^2}{(\sum x_i)^2} - \frac{2\sum x_i (5n)^3}{(\sum x_i)^3} =$

$= \frac{(5n)^3}{(\sum x_i)^2} - \frac{2(5n)^3}{(\sum x_i)^2} = -\frac{(5n)^3}{(\sum x_i)^2} < 0 \Rightarrow$ максимум

$\hat{\vartheta}(\vec{x}_n) = \frac{\sum x_i}{5n}$

$\hat{\vartheta}(\vec{x}_5) = \frac{1+4+5+2+7}{5 \cdot 5} = 0{,}76$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{\vartheta}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\vartheta+1}, \quad x > 3.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (7, 3, 4, 5, \cancel{2})$? *(6 баллов)*

все, что с x не учитываем ни в x_n, ни в n

1) $L(\vec{X}_n, \vartheta) = f(X = x_1) \cdot \ldots \cdot f(X = x_n) = \prod \frac{1}{3} \vartheta \, 3^{\vartheta+1} x_i^{-\vartheta-1} =$
$= 3^{-n} \vartheta^n \cdot 3^{n\vartheta+n} \prod x_i^{-\vartheta-1} = 3^{n\vartheta} \vartheta^n \prod x_i^{-\vartheta-1}$

2) $\ln L(\vec{x}_n, \vartheta) = n\vartheta \ln 3 + n \ln \vartheta - (\vartheta+1)\sum \ln x_i =$
$= n\vartheta \ln 3 + n \ln \vartheta - \vartheta \sum \ln x_i - \sum \ln x_i$

3) Уравнение правдоподобия:

$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{n}{3} + \frac{n}{\vartheta} - \sum_1^n \ln x_i = 0$

$\frac{n}{\vartheta} = \sum_1^n \ln x_i - \frac{n}{3}$

$\vartheta = \frac{n}{\sum_1^n \ln x_i - \frac{n}{3}}$

4) Проверим, что это максимум

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2} = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0 \Rightarrow$ максимум

$\hat{\vartheta}(\vec{x}_n) = \frac{n}{\sum_1^n \ln x_i - \frac{n}{3}}$

$\hat{\vartheta}(\vec{x}_4) = \frac{4}{\ln 7 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 - \frac{4}{3}} = 0{,}85$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{1}{2\theta^3} x^2 e^{(-x/\theta)}, \quad x > 0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (3, 5, 6, 2, 9)$? *(6 баллов)*

1) $L(\vec{X}_n, \theta) = f(X = x_1) \cdot \ldots \cdot f(X = x_n) = \prod \frac{1}{2} \theta^{-3} x_i^2 e^{-\frac{x_i}{\theta}} =$
$= 2^{-n} \theta^{-3n} \prod x_i^2 e^{-\frac{1}{\theta} \sum x_i}$

2) $\ln L(\vec{x}_n, \theta) = -n \ln 2 - 3n \ln \theta + 2 \sum \ln x_i - \frac{1}{\theta} \sum x_i$

3) Уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{3n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\theta} = 3n$$

$$\theta = \frac{\sum x_i}{3n}$$

4) Проверим, что это максимум:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right|_{\theta} = \left.\frac{3n}{\theta^2} - \frac{2 \sum x_i}{\theta^3}\right|_{\theta} = \frac{(3n)^3}{(\sum x_i)^2} - \frac{2 \sum x_i (3n)^3}{(\sum x_i)^3} =$$

$$= -\frac{(3n)^3}{(\sum x_i)^2} < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

$$\hat{\theta}(\vec{X}_n) = \frac{\sum x_i}{3n}$$

$$\hat{\theta}(\vec{x}_5) = \frac{3+5+6+2+9}{3 \cdot 5} = \frac{5}{3}$$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 2.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (4, 7, 5, 3, 9)$? *(6 баллов)*

1) $L(\vec{X}_n, \theta) = f(X = x_1) \cdot \ldots \cdot f(X = x_n) = \prod \theta \cdot 2^{-1} \cdot 2^{\theta+1} \cdot x_i^{-\theta-1} =$
$= \prod \theta 2^{\theta} x_i^{-\theta-1} = \theta^n 2^{\theta n} \prod x_i^{-\theta-1}$

2) $\ln L(\vec{x}_n, \theta) = n \ln \theta + n\theta \ln 2 - \theta \sum \ln x_i - \sum \ln x_i$

3) Уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + n \ln 2 - \sum_1^n \ln x_i = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = \sum_1^n \ln x_i - n \ln 2$$

$$\theta = \frac{n}{\sum_1^n \ln x_i - n \ln 2}$$

4) Проверим, что это максимум

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

$$\hat{\theta}(\vec{X}_n) = \frac{n}{\sum_1^n \ln x_i - n \ln 2}$$

$$\hat{\theta}(\vec{x}_5) = \frac{5}{\ln 4 + \ln 7 + \ln 5 + \ln 3 + \ln 9 - 5 \ln 2} = 1{,}05$$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{\vartheta^7}{6!} x^6 e^{-\vartheta x}, \quad x > 0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (5, 10, 15, 17, 4)$? *(6 баллов)*

1) $L(\vec{X}_n, \vartheta) = f(X=x_1) \cdot \ldots \cdot f(X=x_n) = \prod \vartheta^7 6!^{-1} x_i^6 e^{-\vartheta x} =$
$= \vartheta^{7n} (6!)^{-n} \prod x_i^6 e^{-\vartheta \sum x_i}$

2) $\ln L(\vec{X}_n, \vartheta) = 7n \ln \vartheta - n \ln 6! + 6 \sum \ln x_i - \vartheta \sum x_i$

3) Уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{7n}{\vartheta} - \sum x_i = 0$$

$$\frac{7n}{\vartheta} = \sum x_i$$

$$\vartheta = \frac{\sum x_i}{7n}$$

4) Проверим, что это максимум

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2} = -\frac{7n}{\vartheta^2} < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

$$\hat{\vartheta}(\vec{X}_n) = \frac{\sum x_i}{7n}$$

$$\hat{\vartheta}(\vec{X}_5) = \frac{5+10+15+17+4}{7 \cdot 5} = \frac{51}{35}$$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \vartheta^2 x e^{-\vartheta x}, \quad x > 0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (6, 3, 4, 9, 2)$? *(6 баллов)*

1) $L(\vec{X}_n, \vartheta) = f(X=x_1) \ldots f(X=x_n) = \prod \vartheta^2 x_i e^{-\vartheta x_i} =$
$= \vartheta^{2n} \prod x_i \, e^{-\vartheta \sum x_i}$

2) $\ln L(\vec{X}_n, \vartheta) = 2n \ln \vartheta + \sum \ln x_i - \vartheta \sum x_i$

3) Уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{2n}{\vartheta} - \sum x_i = 0$$

$$\frac{2n}{\vartheta} = \sum x_i$$

$$\vartheta = \frac{2n}{\sum x_i}$$

4) Проверим, что это максимум:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2} = -\frac{2n}{\vartheta^2} < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

$$\hat{\vartheta}(\vec{X}_n) = \frac{2n}{\sum x_i}$$

$$\hat{\vartheta}(\vec{X}_5) = \frac{2 \cdot 5}{6+3+4+9+2} = \frac{5}{12}$$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$P\{X=k\} = \frac{\vartheta^k}{k!}e^{-\vartheta}, \quad k \in N_0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (1,3,4,5,7)$? *(6 баллов)*

1) $L(\overline{X}_k, \vartheta) = P(X=x_1)\cdot\ldots\cdot P(X=x_k) = \prod \vartheta^k k!^{-1} e^{-\vartheta} =$

$= \vartheta^{k^2}\cdot(k!)^{-k} e^{-\vartheta k}$

2) $\ln L(\overline{x}_n, \vartheta) = k^2\ln\vartheta - k\ln k! - \vartheta k$

3) Уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{k^2}{\vartheta} - k = 0$$

$$\frac{k^2}{\vartheta} = k$$

$$\vartheta = \frac{k^2}{k} = k$$

4) Проверим, что это максимум:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2} = -\frac{k^2}{\vartheta^2} < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

$$\hat\vartheta(\overline{X}_k) = \frac{k}{k}$$

$$\hat\vartheta(\overline{x}_5) = 5.$$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{1}{\vartheta^4 3!}e^{-x/\vartheta}, \quad x > 0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (2,7,4,3,6)$? *(6 баллов)*

1) $L(\overline{X}_n, \vartheta) = f(X=x_1)\cdot\ldots\cdot f(X=x_n) = \prod \vartheta^{-4}(3!)^{-1} e^{-\frac{x}{\vartheta}} =$

$= \vartheta^{-4n}(3!)^{-n} e^{-\frac{1}{\vartheta}\sum x_i}$

2) $\ln L(\overline{x}_n, \vartheta) = -4n\ln\vartheta - n\ln 3! - \frac{1}{\vartheta}\sum x_i$

3) Уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{-4n}{\vartheta} + \frac{\sum x_i}{\vartheta^2} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\vartheta} = 4n$$

$$\vartheta = \frac{\sum x_i}{4n}$$

4) Проверим, что это максимум

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2}\Big|_{\hat\vartheta} = \frac{4n}{\vartheta^2} - \frac{2\sum x_i}{\vartheta^3}\Big|_{\hat\vartheta} = \frac{(4n)^3}{(\sum x_i)^2} - 2\frac{\sum x_i (4n)^3}{(\sum x_i)^3} =$$

$$= -\frac{(4n)^3}{(\sum x_i)^2} < 0 \Rightarrow \text{максимум.}$$

$$\hat\vartheta(\overline{x}_n) = \frac{\sum x_i}{4n}$$

$$\hat\vartheta(\overline{x}_5) = \frac{2+7+4+3+6}{4\cdot 5} = 1{,}1$$

6. С использованием метода максимального правдоподобия найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}, \quad x > 0.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (2, 5, 6, 8, 10)$? *(6 баллов)*

1) $L(\bar{X}_n, \vartheta) = f(X=x_1)\cdot\ldots\cdot f(X=x_n) = \prod 2\cdot\vartheta\cdot x_i\cdot e^{-\vartheta x_i^2} =$
$= 2^n\cdot\vartheta^n\cdot\prod x_i\cdot e^{-\vartheta\sum x_i^2}$

2) $\ln L(\bar{x}_n, \vartheta) = n\ln 2 + n\ln\vartheta + \sum\ln x_i - \vartheta\sum x_i^2$

3) Уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{n}{\vartheta} - \sum x_i^2 = 0$$

$$\frac{n}{\vartheta} = \sum x_i^2$$

$$\vartheta = \frac{n}{\sum x_i^2}$$

4) Проверим, что это максимум

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \vartheta^2} = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

$$\hat\vartheta(\vec{X}_n) = \frac{n}{\sum x_i^2}$$

$$\hat\vartheta(\vec{x}_5) = \frac{5}{4+25+36+64+100} = \frac{5}{229}.$$

6. С использованием метода моментов найти точечную оценку параметров заданного закона распределения генеральной совокупности X

$$f_X(x) = \frac{\theta}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 3.$$

Чему равно значение точечной оценки для выборки $\vec{x}_5 = (4, 7, 5, 6, 9)$? *(6 баллов)*

$$f(x) = \frac{\vartheta}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\vartheta+1} = \vartheta\cdot 3^{-1}\cdot 3^{\vartheta+1}\cdot x^{-\vartheta-1}$$

$$f(x) = \vartheta 3^{\vartheta} x^{-\vartheta-1}$$

$$M = \int_3^{\infty} \vartheta 3^{\vartheta} x^{-\vartheta} dx = \vartheta 3^{\vartheta}\int_3^{\infty} x^{-\vartheta} dx = \vartheta 3^{\vartheta}\left(\frac{x^{-\vartheta+1}}{1-\vartheta}\right)\Big|_3^{\infty} =$$

$$= \vartheta 3^{\vartheta}\left(\lim_{a\to\infty}\frac{a^{1-\vartheta} - 3^{1-\vartheta}}{1-\vartheta}\right) = \vartheta 3^{\vartheta}\left(\frac{0 - 3^{1-\vartheta}}{1-\vartheta}\right) = -\frac{3^{1-\vartheta}\cdot 3^{\vartheta}\cdot\vartheta}{1-\vartheta} =$$

$$= -\frac{\vartheta\cdot 3}{1-\vartheta} = \frac{3\vartheta}{\vartheta - 1}$$

$$M = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\frac{3\vartheta}{\vartheta-1} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$3\vartheta n = \sum x_i \vartheta - \sum x_i$$

$$3\vartheta n - \sum x_i \vartheta = -\sum x_i$$

$$\vartheta(3n - \sum x_i) = -\sum x_i$$

$$\hat\vartheta(\bar{X}_n) = \frac{\sum x_i}{\sum x_i - 3n}$$

$$\hat\vartheta(\bar{x}_5) = \frac{4+7+5+6+9}{4+7+5+6+9-3\cdot 5} = \frac{31}{31-15} = \frac{31}{16} = 1{,}9$$

$f(x) = \vartheta^3 \cdot \frac{1}{2} x^2 e^{-\vartheta x}$

$MX = \int_0^\infty \frac{1}{2} \vartheta^3 x^3 e^{-\vartheta x} dx = \frac{1}{2\vartheta} \int_0^\infty \vartheta^3 x^3 e^{-\vartheta x} d(\vartheta x) =$

$= \frac{1}{2\vartheta} \int_0^\infty (-\vartheta x)^3 e^{-\vartheta x} d(-\vartheta x) = \left| -\vartheta x = t \right| =$

$= \frac{1}{2\vartheta} \int_0^\infty t^3 e^t dt = \left| \begin{matrix} u = t^3 & du = 3t^2 dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{2\vartheta} \left(t^3 e^t - 3 \int_0^\infty t^2 e^t dt \right) = \left| \begin{matrix} u = t^2 & du = 2t dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{2\vartheta} \left(t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6 \int_0^\infty t e^t dt \right) = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{2\vartheta} \left(t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6te^t - 6 \int_0^\infty e^t dt \right) =$

$= \frac{1}{2\vartheta} \left(t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6te^t - 6e^t \right) \Big|_0^\infty =$

$= \frac{1}{2\vartheta} \underbrace{\left(-\vartheta^3 x^3 e^{-\vartheta x} - 3\vartheta^2 x^2 e^{-\vartheta x} - 6\vartheta x e^{-\vartheta x} - 6e^{-\vartheta x} \right)}_{A} \Big|_0^\infty \ominus$

$A(\infty) = -\vartheta^3 \infty e^{-\infty} - 3\vartheta^2 \infty e^{-\infty} - 6\vartheta \infty e^{-\infty} - 6e^{-\infty} = 0$

$A(0) = -\vartheta^3 0 e^0 - 3\vartheta^2 0 e^0 - 6\vartheta 0 e^0 - 6e^0 = -6$

$\ominus \frac{1}{2\vartheta}(0+6) = \frac{6}{2\vartheta} = \frac{3}{\vartheta}$

$MX = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3}{\vartheta}$

$\hat{\vartheta}(\vec{X_n}) = \frac{3n}{\sum x_i}$; $\hat{\vartheta}(\vec{X_5}) = \frac{3 \cdot 5}{7+3+4+5+2} = \frac{5}{7}$

$f(x) = \vartheta^5 \cdot \frac{1}{24} x^4 e^{-\vartheta x}$

$MX = \frac{1}{24} \int_0^\infty (\vartheta x)^5 e^{-\vartheta x} dx = \frac{1}{24\vartheta} \int_0^\infty (-\vartheta x)^5 e^{-\vartheta x} d(-\vartheta x) =$

$= \left| t = -\vartheta x \right| = \frac{1}{24\vartheta} \int_0^\infty t^5 e^t dt = \left| \begin{matrix} u = t^5 & du = 5t^4 dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{24\vartheta} \left(t^5 e^t - 5 \int_0^\infty t^4 e^t dt \right) = \left| \begin{matrix} u = t^4 & du = 4t^3 dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{24\vartheta} \left(t^5 e^t - 5t^4 e^t + 20 \int_0^\infty t^3 e^t dt \right) = \left| \begin{matrix} u = t^3 & du = 3t^2 dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{24\vartheta} \left(t^5 e^t - 5t^4 e^t + 20t^3 e^t - 60 \int_0^\infty t^2 e^t dt \right) = \left| \begin{matrix} u = t^2 & du = 2t dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right|$

$= \frac{1}{24\vartheta} \left(t^5 e^t - 5t^4 e^t + 20t^3 e^t - 60t^2 e^t + 120 \int_0^\infty t e^t dt \right) = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{24\vartheta} \left(t^5 e^t - 5t^4 e^t + 20t^3 e^t - 60t^2 e^t + 120te^t - 120 \int_0^\infty e^t dt \right) =$

$= \frac{1}{24\vartheta} \left(t^5 e^t - 5t^4 e^t + 20t^3 e^t - 60t^2 e^t + 120te^t - 120e^t \right) \Big|_0^\infty =$

$= \frac{1}{24\vartheta} \underbrace{\left(-\vartheta^5 x^5 e^{-\vartheta x} - 5\vartheta^4 x^4 e^{-\vartheta x} - 20\vartheta^3 x^3 e^{-\vartheta x} - 60\vartheta^2 x^2 e^{-\vartheta x} - 120\vartheta x e^{-\vartheta x} - 120e^{-\vartheta x} \right)}_{A} \Big|_0^\infty \ominus$

$A(\infty) = e^{-\infty} = 0 \qquad A(0) = -120e^0 = -120$

$= \frac{1}{24\vartheta}(0+120) = \frac{120}{24\vartheta} = \frac{5}{\vartheta}$

$MX = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5}{\vartheta}$

$\hat{\vartheta}(\vec{X_n}) = \frac{5n}{\sum x_i}$

$\hat{\vartheta}(\vec{X_5}) = \frac{5 \cdot 5}{1+3+4+9+2} = \frac{25}{19}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi x}} e^{-\theta x}$$

$$MX = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\theta x}}{\sqrt{\pi}} e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\theta x}\, e^{-\theta x} d(\theta x) = \left| t = \sqrt{\theta x} \right| =$$

$$= \frac{1}{\theta\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t e^{-t^2} dt = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-t^2} dt & v = -2t e^{-t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\theta\sqrt{\pi}} \left(-2t e^{-t^2} + \int_0^\infty 2t e^{-t^2} dt \right)$$

$$\int_0^\infty t e^{-t^2} dt = ?$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}}$$

$$MX = \int_2^\infty \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} dx = \theta \int_2^\infty \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} d\left(\frac{x-2}{\theta}\right) =$$

$$= \theta \int_2^\infty \frac{(x-2)+2}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} d\left(\frac{x-2}{\theta}\right) =$$

$$= \theta\left(\int_2^\infty \frac{x-2}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} d\left(\frac{x-2}{\theta}\right) + \int_2^\infty \frac{2}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} d\left(\frac{x-2}{\theta}\right) \right) =$$

$$\int_2^\infty \frac{x-2}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} d\left(-\frac{x-2}{\theta}\right) = \left| -\frac{x-2}{\theta} = t \right| = \int_2^\infty t e^{t} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix} \right| = \left(t e^t - \int_2^\infty e^t dt \right) = \left(t e^t - e^t \right)\Big|_2^\infty =$$

$$= \left(-\frac{x-2}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} - e^{-\frac{x-2}{\theta}} \right)\Big|_2^\infty = 0 + 1 = 1$$

$$-\int_2^\infty \frac{2}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} \left(d - \frac{x-2}{\theta} \right) = \left| -\frac{x-2}{\theta} = t \right| = -\frac{2}{\theta} \int_2^\infty e^t dt = -\frac{2e^t}{\theta}\Big|_2^\infty =$$

$$= \left(-\frac{2}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} \right)\Big|_2^\infty = 0 + \frac{2}{\theta} = \frac{2}{\theta}$$

$$= \theta\left(1 + \frac{2}{\theta}\right) = \theta + 2$$

$$MX = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \theta + 2$$

$$\hat{\theta}(\vec{X_n}) = \frac{\sum x_i}{n} - 2$$

$$\hat{\theta}(\vec{X_5}) = \frac{6+3+4+9+12}{5} - 2 = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

6. Оценка дисперсии $\hat{\sigma}_x$, полученная путем обработки результатов 8 независимых наблюдений нормально распределенной случайной величины X, равна 5.75. Используя доверительный интервал, определите с какой вероятностью можно утверждать, что среднее значение X заключено в интервале (25, 37.4), если середина этого интервала совпадает с выборочным средним значением X? (*6 баллов*)

$\hat{\sigma} = 5{,}75$ $n = 8$

$25 < M < 37{,}4$

$\frac{37{,}4 - 25}{2} = 6{,}2$

$\bar{x} = 31{,}2$

$\gamma = ?$

$\alpha = 1 - \gamma$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$

$T(\vec{X}_n) = \frac{M - \bar{x}}{\hat{\sigma}} \sqrt{n-1}$

$t_{\alpha_1}^{(n-1)} < \frac{M-\bar{x}}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1} < t_{1-\alpha_2}^{(n-1)}$

$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{\alpha_1}^{(n-1)} < M - \bar{x} < \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_2}^{(n-1)}$

$\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_2}^{(n-1)} < M < \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_2}(n-1)$

$\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_2}(n-1) = 25$

$31{,}2 - \frac{5{,}75}{\sqrt{7}} t_{1-\alpha_2}^{(7)} = 25$

$t_{1-\alpha_2}^{(7)} = \frac{(31{,}2 - 25)\sqrt{7}}{5{,}75}$

$t_{1-\alpha_2}^{(7)} = 2{,}85.$

$1 - \alpha_2 = 0{,}97$

$\alpha_2 = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$; $\gamma = 1 - 2\alpha_2 = 1 - 2 \cdot 0{,}03 = 0{,}94$

6. В результате 16 испытаний инерционного звена определены значения статистических характеристик случайной величины t: $\hat{\mu}_1 = 120.1$ с; $\hat{\sigma}_1^2 = 9.64$ с^2. Считая закон распределения случайной величины нормальным, построить для параметров μ_1 и σ_1^2 доверительные интервалы, отвечающие доверительным вероятностям $\gamma_1 = 0.95$ и $\gamma_2 = 0.90$ соответственно. (*6 баллов*)

$\gamma = 1 - 2\alpha_i$

$n = 16$

$\bar{x} = 120{,}1$

$\hat{\sigma} = \sqrt{9{,}64}$

$\gamma_1 = 0{,}95$

$\gamma_2 = 0{,}90$

Мат. ожидание:

$\gamma_1 = 1 - 2\alpha_1$

$\alpha_1 = \frac{1-\gamma_1}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$

$T(\vec{X}_n) = \frac{M - \bar{x}}{\hat{\sigma}} \sqrt{n-1}$

$-t_{1-\alpha}^{(n-1)} < \frac{M-\bar{x}}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1} < t_{1-\alpha}^{(n-1)}$

$-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha} < M - \bar{x} < \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha}$

$\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha} < M < \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha}^{(n-1)}$

$120{,}1 - \sqrt{\frac{9{,}64}{15}}\, 2{,}3 < M < 120{,}1 + \sqrt{\frac{9{,}64}{15}}\, 2{,}3$

$118{,}25 < M < 121{,}943$

Дисперсия:

$\gamma_2 = 1 - 2\alpha_2$

$\alpha_2 = \frac{1-\gamma_2}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05$

$T(\vec{X}_n) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} n$

$h_{\alpha_2}^{(15)} < \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} n < h_{1-\alpha_2}^{(15)}$

$\frac{h_{\alpha_2}(15)}{\hat{\sigma}^2 n} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{h_{1-\alpha_2}(15)}{\hat{\sigma}^2 n}$

$\frac{h_{1-\alpha_2}(15)}{\hat{\sigma}^2 n} < \sigma^2 < \frac{h_{\alpha_2}(15)}{\hat{\sigma}^2 n}$

$\frac{1}{0{,}216} = 1/\sqrt{\frac{7{,}26}{9{,}64 \cdot 16}} < \sigma < \sqrt{\frac{25}{9{,}64 \cdot 16}}^{\,-1} = 1/0{,}403$

6. Расстояние от места измерения до навигационного знака оценивают средним арифметическим результатов независимых измерений данного расстояния, выполненных некоторым количеством дальномеров. Измерения не содержат систематической ошибки и производятся каждым дальномером один раз, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma = 10$ м. Используя доверительный интервал, определите сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении расстояния до навигационного знака с вероятностью 0.9 не превышала 10 м? (*6 баллов*)

$\sigma = 10$

$\gamma = 0{,}9$

$|M - \bar{x}| \le 10$

$n = ?$ $\quad \alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$

$$T(\vec{X}_n) = \frac{M - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$-u_{1-\alpha_1} < \frac{M - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_1}$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1} < M - \bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1}$$

$$M - \bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1} \le 10$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{10}{\sigma u_{1-\alpha_1}}$$

$$\sqrt{n} \ge \frac{\sigma u_{1-\alpha_1}}{10}$$

$$n \ge \left(\frac{\sigma u_{1-\alpha_1}}{10}\right)^2 \ge \left(\frac{10 \cdot 1{,}645}{10}\right)^2 \ge 2{,}7 \ge 3$$

6. С помощью 5 секундомеров, позволяющих производить измерения со средним квадратичным отклонением 0.15 м/с, найдены такие значения времени вывода космического аппарата на орбиту (в м/с): 425.5; 425.3; 426.1; 425.7; 425.9. Полагая, что ошибки измерения секундомеров подчинены нормальному закону распределения, построить 95%-й доверительный интервал для истинного времени вывода аппарата на орбиту. (*6 баллов*)

$$\gamma = 1 - 2\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$$

$n = 5$

$\sigma = 0{,}15$

$\bar{x} = 425{,}7$

$T(\vec{X}_n) \sim N$

$\gamma = 0{,}95$

$M - ?$

$$-u_{1-\alpha_1} < \frac{M - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_1}$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1} < M - \bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1}$$

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1} < M < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1}$$

$$425{,}7 - \frac{0{,}15}{\sqrt{5}} \cdot 1{,}960 < M < 425{,}7 + \frac{0{,}15}{\sqrt{5}} \cdot 1{,}960$$

$$425{,}569 < M < 425{,}831$$

6. Известно, что измерительный прибор не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки каждого измерения подчиняются закону нормального распределения с одними и теми же параметрами. Используя доверительный интервал, определите сколько надо провести измерений для определения оценки значения измеряемой величины, чтобы с доверительной вероятностью 0.9 абсолютное значение ошибки в определении этой величины было не более 20% от σ? (*6 баллов*)

$\gamma = 0{,}9$ $\quad n - ?$

$|M - \bar{x}| \le 0{,}2\sigma$

$$\gamma = 1 - 2\alpha_1$$

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$$

$$-u_{1-\alpha_1} < \frac{M - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_1}$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1} < M - \bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1}$$

$$M - \bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1} \le 0{,}2\sigma$$

$$\frac{u_{1-\alpha_1}}{\sqrt{n}} \le 0{,}2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{0{,}2}{u_{1-\alpha_1}}$$

$$n \ge \left(\frac{u_{1-\alpha_1}}{0{,}2}\right)^2 \ge \left(\frac{1{,}645}{0{,}2}\right)^2 \ge 67{,}6 \ge 68$$

6. Средняя квадратичная ошибка измерения угла теодолитом составляет 7″. Сколько независимых измерений следует произвести, чтобы с вероятностью $\gamma = 0.95$ гарантировать измерение угла с ошибкой, по абсолютной величине не превышающей 5″? Предполагается, что ошибки измерений распределены по нормальному закону. (*6 баллов*)

$\sigma = 7$ $\quad n = ?$

$\gamma = 0{,}95$

$|\bar{X} - M| \le 5$

$$T(\bar{X}_n) = \frac{\bar{X} - M}{\sigma}\sqrt{n} \qquad \alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}025$$

$$-U_{1-\alpha_1} < \frac{\bar{X} - M}{\sigma}\sqrt{n} < U_{1-\alpha_1}$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\alpha_1} < |\bar{X} - M| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\alpha_1}$$

$$|\bar{X} - M| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\alpha_1} \le 5$$

$$\frac{\sigma U_{1-\alpha_1}}{\sqrt{n}} \le 5$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{5}{\sigma U_{1-\alpha_1}}$$

$$\sqrt{n} \ge \frac{U_{1-\alpha_1}\sigma}{5}$$

$$n \ge \frac{\sigma^2 U_{1-\alpha_1}^2}{25}$$

$$n \ge \frac{40 \cdot 1{,}96^2}{25} \ge 7{,}5 \ge 8$$

6. В результате проведенных испытаний получены следующие значения начальной скорости снаряда (в м/с): 422.2; 418.7; 425.6; 420.3; 425.8; 423.1; 431.5; 428.2; 438.3; 434.0; 411.3; 423.0. Определить точечные оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения начальной скорости, а также построить для указанных параметров 90%-е доверительные интервалы, считая распределение начальной скорости нормальным. (*6 баллов*)

$\bar{X} = 425{,}17$

$n = 12$

$\gamma = 0{,}9$

$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$

Точечные оценки:

$$M = \bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 425{,}17$$

$$D = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = 47{,}997$$

$$\sigma = \sqrt{D} = 6{,}93$$

инт. оценки:

σ неизвестна.

$$-t_{1-\alpha_1}^{(n-1)} < \frac{M - \bar{X}}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1} < t_{1-\alpha_1}^{(n-1)}$$

$$-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)} < M - \bar{X} < \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)}$$

$$\bar{X} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)} < M < \bar{X} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)}$$

$$425{,}17 - \frac{6{,}93}{\sqrt{11}} \cdot 2{,}2 < M < 425{,}17 + \frac{6{,}93}{\sqrt{11}} \cdot 2{,}2$$

$$420{,}57 < M < 429{,}77$$

$$h_{\alpha_1}^{(n-1)} < \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} n < h_{1-\alpha_1}^{(n-1)}$$

$$\frac{h_{\alpha_1}^{(11)}}{\hat{\sigma}^2 n} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{h_{1-\alpha_1}^{(11)}}{\hat{\sigma}^2 n}$$

$$\frac{\hat{\sigma}^2 n}{h_{1-\alpha_1}^{(11)}} < \sigma^2 < \frac{\hat{\sigma}^2 n}{h_{\alpha_1}^{(11)}}$$

$$\left(\frac{47{,}997 \cdot 12}{4{,}57}\right)^{1/2} < \sigma < \left(\frac{47{,}997 \cdot 12}{19{,}7}\right)^{1/2}$$

$$5{,}4 < \sigma < 11{,}23$$

6. В результате пусков 10 ракет получены следующие значения боковых отклонений точек попадания от точки прицеливания (в км): 1.0; 0.2; 1.0; −0.1; −0.5; 5.0; −1.0; 3.0; 0.5; 1.0. Необходимо оценить среднее значение бокового отклонения и построить для него 95%-й доверительный интервал, считая случайное отклонение нормально распределенным. *(6 баллов)*

$n = 10$

$\gamma = 0,95$

$\alpha = \frac{1-\gamma}{2} = 0,025$

$\sigma - ?$

$$\chi^{(n-1)}_{\alpha} < \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\, n < \chi^{(n-1)}_{1-\alpha}$$

$$\frac{\chi^{(9)}_{\alpha}}{n\hat{\sigma}^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^{(9)}_{1-\alpha}}{n\hat{\sigma}^2}$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^{(9)}_{1-\alpha}} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^{(9)}_{\alpha}}$$

$\bar{x} = 1,01$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 2,8349$

$$\sqrt{\frac{10\cdot 2,8349}{2,7}} < \sigma < \sqrt{\frac{10\cdot 2,8349}{19}}$$

$$1,22 < \sigma < 3,24$$

6. Даны результаты измерений постоянной величины (м): 9.9; 12.5; 10.3; 9.2; 6.0; 10.9; 10.3; 11.8; 11.6; 9.8; 14.0. Ошибки измерений распределены по нормальному закону, систематические ошибки отсутствуют. Определить: а) оценки измеряемой величины и среднего квадратичного отклонения; б) вероятность того, что абсолютное значение ошибки при определении истинного значения измеряемой величины меньше 2%. *(6 баллов)*

$n = 11$

а) точечные оценки:

$M^* = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{n} = 10,57$

$D^* = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 3,83$

б) $|M - \bar{x}| < 0,02M$ $\quad \gamma = ?$

$$-t^{(10)}_{1-\alpha} < \frac{M-\bar{x}}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1} < t^{(10)}_{1-\alpha}$$

$$-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}t^{(10)}_{1-\alpha} < M - \bar{x} < \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}t^{(10)}_{1-\alpha} < 0,02M$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}t^{(10)}_{1-\alpha} < 0,02\bar{x}$$

$$t^{(10)}_{1-\alpha} < \frac{0,02\bar{x}\sqrt{n-1}}{\hat{\sigma}} = \frac{0,02\cdot 10,57\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{3,83}} = 0,34$$

$1-\alpha \div 0,25$

$\alpha = 1 - 0,25 = 0,75$

$\gamma = 1 - 2\alpha = -0,5$ что-то не то.

6. Давление в баке с горючим измерено 8 раз манометром. Получены следующие данные (в Па): 3.25; 2.82; 3.07; 3.12; 2.93; 2.87; 3.09; 3.17. Считая, что ошибки измерений подчинены нормальному закону распределения, определить по этим результатам оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения давления в баке, а также построить для этих оценок 95%-й доверительный интервал. (*6 баллов*)

$n = 8$

$\bar{x} = 3{,}04 = MX$ $\qquad \gamma = 1 - 2\alpha_1 = 0{,}95$

$\hat{\sigma}^2 = 0{,}0128 = DX$ $\qquad \alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}025$

$\sigma = \sqrt{DX} = 0{,}1131$

$$-t_{1-\alpha_1}^{(7)} < \frac{M - \bar{x}}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1} < t_{1-\alpha_1}^{(7)}$$

$$-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(7)} < M - \bar{x} < \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(7)}$$

$$\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(7)} < M < \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(7)}$$

$$3{,}04 - \frac{0{,}1131}{\sqrt{7}} \cdot 2{,}6 < M < 3{,}04 + \frac{0{,}1131}{\sqrt{7}} \cdot 2{,}6$$

$$2{,}898 < M < 3{,}151$$

$$h_{\alpha_1}^{(7)} < \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} n < h_{1-\alpha_1}^{(7)}$$

$$\frac{h_{\alpha_1}^{(7)}}{\hat{\sigma}^2 n} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{h_{1-\alpha_1}^{(7)}}{\hat{\sigma}^2 n}$$

$$\frac{0{,}0128 \cdot 8}{16} = \frac{\hat{\sigma}^2 n}{h_{\alpha_1}^{(7)}} < \sigma^2 < \frac{\hat{\sigma}^2 n}{h_{1-\alpha_1}^{(7)}} = \frac{0{,}0128 \cdot 8}{1{,}69}$$

$$0{,}0064 < D < 0{,}06$$

$$0{,}08 < \sigma < 0{,}246$$

6. При определении прочности стержня на разрыв испытывались 8 образцов. В результате испытаний получены следующие значения усилия разрыва (в кг): 500; 510; 545; 600; 560; 530; 525; 540. Требуется определить доверительные интервалы уровня $\gamma = 0.90$ для среднего значения прочности и ее среднего квадратичного отклонения, если закон распределения прочности нормальный. (*6 баллов*)

$n = 8$ $\qquad \gamma = 1 - 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$

$\gamma = 0{,}9$ $\qquad \bar{x} = 538{,}75$

$M - ?$ $\qquad \hat{\sigma}^2 = 854{,}6875$

$\sigma - ?$ $\qquad \hat{\sigma} = 29{,}24$

1) $$-t_{1-\alpha_1}^{(n-1)} < \frac{M - \bar{x}}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1} < t_{1-\alpha_1}^{(n-1)}$$

$$-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)} < M - \bar{x} < \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)}$$

$$\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)} < M < \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{1-\alpha_1}^{(n-1)}$$

$$538{,}75 - \frac{29{,}24}{\sqrt{7}} 2{,}36 < M < 538{,}75 + \frac{29{,}24}{\sqrt{7}} 2{,}36$$

$$512{,}67 < M < 564{,}83$$

$$h_{\alpha_1}^{(7)} < \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} n < h_{1-\alpha_1}^{(7)}$$

$$\frac{h_{\alpha_1}^{(7)}}{\hat{\sigma}^2 n} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{h_{1-\alpha_1}^{(7)}}{\hat{\sigma}^2 n}$$

$$\frac{\hat{\sigma}^2 n}{h_{\alpha_1}^{(7)}} < \sigma^2 < \frac{\hat{\sigma}^2 n}{h_{1-\alpha_1}^{(7)}}$$

$$\sqrt{\frac{854{,}6875 \cdot 8}{14{,}1}} < \sigma < \sqrt{\frac{854{,}6875 \cdot 8}{2{,}17}}$$

$$22{,}02 < \sigma < 56{,}13$$