

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»

---

В.В. Витушкин, Ю.Н. Жигулёвцев

**Автоматизированный  
лабораторный комплекс  
«Свободные колебания  
физического маятника» ТМл - 01М**

*Учебно-методическое пособие*



Москва

**ИЗДАТЕЛЬСТВО**

МГТУ им. Н. Э. Баумана

**2021**

УДК 531.8/534  
ББК 22.213  
В54

Издание доступно в электронном виде по адресу  
<https://bmstu.press/catalog/item/7132>

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Теоретическая механика»

*Рекомендовано Научно-методическим советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия*

**Витушкин, В.В.**

В54 Автоматизированный лабораторный комплекс «Свободные колебания физического маятника» ТМл-01М : учебно-методическое пособие / В. В. Витушкин, Ю. Н. Жигулёвцев. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. — 22, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5598-0

Приведено описание лабораторной работы по курсу «Теоретическая механика». Показана работа лабораторного комплекса, предназначенного для исследования с применением ПЭВМ свободных колебаний физического маятника при наличии сухого трения и в широком диапазоне изменения его инерционных и жесткостных характеристик. Комплекс позволяет в реальном времени измерять отклонения маятника от положения равновесия, отображать их на экране виртуального прибора, а также сопоставлять полученные экспериментальные данные с результатами теоретических расчетов. Приведены результаты теоретического анализа процесса колебаний, дано описание методики и порядка выполнения лабораторной работы.

Для студентов 2-го курса, обучающихся по машиностроительным и приборостроительным специальностям.

УДК 531.8/534  
ББК 22.213



*Уважаемые читатели! Пожелания, предложения, а также сообщения о замеченных опечатках и неточностях Издательство просит направлять по электронной почте: [info@baumanpress.ru](mailto:info@baumanpress.ru)*

ISBN 978-5-7038-5598-0

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021  
© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

## Предисловие

Описываемый в данной работе лабораторный комплекс является оригинальной научно-методической разработкой, выполненной на кафедре «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э.Баумана под руководством и при активном участии бывшего заведующего кафедрой В.В. Дубинина. Комплекс предназначен для более углубленного изучения студентами машиностроительных и приборостроительных специальностей одного из основных разделов курса теоретической механики — «Теория колебаний». Он включает в себя экспериментальную механическую модель (установку) — физический маятник, позволяет в реальном времени регистрировать его колебания и отображать их на экране виртуального прибора. Регистрируемые экспериментальные данные сопоставляются с результатами расчета колебаний маятника с учетом сухого трения на основании теории колебаний механических систем.

При проведении данной лабораторной работы студенты должны выявить теоретические закономерности процесса свободных колебаний физического маятника при наличии вязкого и сухого трения — установить зависимости частоты и условной амплитуды колебаний от трения, а также от инерционных и жесткостных характеристик маятника, провести математическое моделирование процесса колебаний и продемонстрировать соответствие результатов этого моделирования экспериментальным данным.

В процессе работы студенты получают навыки самостоятельной работы с лабораторным оборудованием, умение формулировать задачу исследования и целенаправленно ее осуществлять.

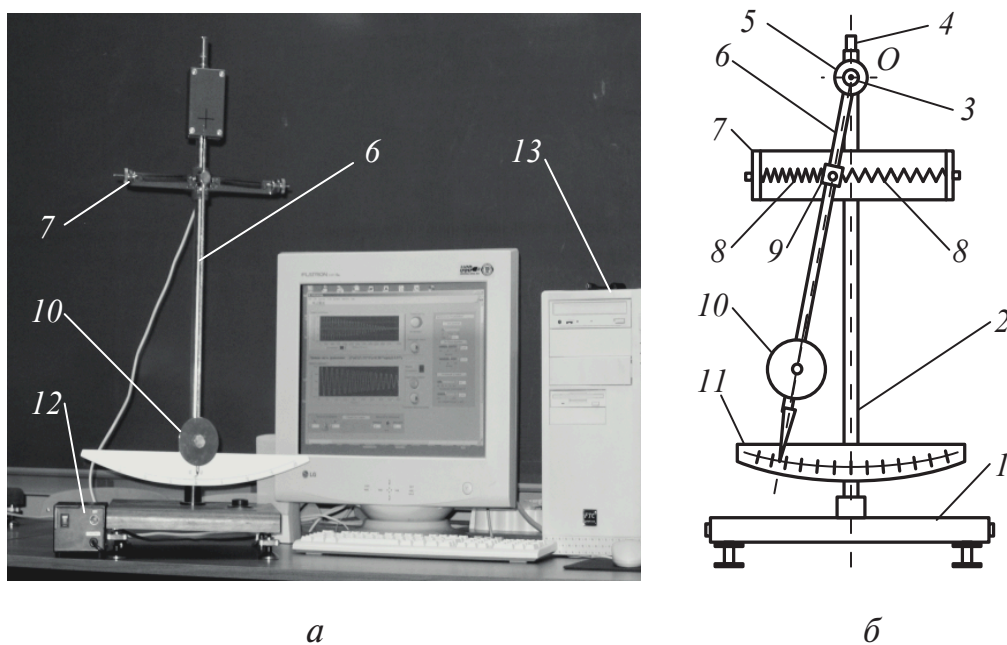
В результате выполнения работы, в дополнение к теоретическим занятиям, студенты приобретают компетенцию понимания процессов свободных колебаний механических систем и влияния различных характеристик систем на эти колебания.

## Описание лабораторного комплекса ТМл-01М

Лабораторный комплекс предназначен для исследования свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы с учетом сил упругости и трения и включает себя экспериментальную установку с физическим маятником, снабженную датчиком угла отклонения маятника от положения равновесия, блок питания датчика, аналого-цифровой преобразователь и ПЭВМ. В основу построения комплекса заложен принцип выявления взаимосвязи между теоретическим описанием процесса свободных колебаний, результатами его математического моделирования и данными экспериментального исследования. Результаты экспериментов обрабатываются на ПЭВМ и отображаются в реальном масштабе времени. Программное обеспечение комплекса выполнено как в оригинальном варианте, так и в существующей среде LabView.

Общий вид комплекса ТМл-01М и схема его экспериментальной установки приведены на рис. 1, *а* и *б* соответственно.

Лабораторный комплекс включает в себя экспериментальную установку (см. рис. 1, *б*), состоящую из основания 1 со стойкой 2, в верхней части которой посредством цилиндрического шарнира 3 с горизонтальной осью вращения  $Oz$  закреплен маятник в виде



**Рис. 1.** Общий вид (*а*) комплекса ТМл-01М и схема (*б*) его экспериментальной установки

однородного стержня *б* с грузом *10*. На стойке установлены кронштейн *7* с пружинами растяжения *8*, соединенными со стержнем посредством закрепленной на нем муфты *9*, и шкала *11* визуального отсчета угла  $\varphi$  отклонения маятника (его стержня) от вертикального положения равновесия. Пружинам задается начальная (статическая) деформация в положении равновесия маятника, обеспечивающая их работу только на растяжение. Соосно шарниру *3* на стойке установлен датчик *5* указанного угла, выполненный в виде потенциометра (резистора переменного сопротивления), на который поступает постоянное напряжение  $\pm 5$  В. Напряжение, пропорциональное углу  $\varphi$ , снимается с подвижного контакта потенциометра и подается на вход аналого-цифрового преобразователя. При этом комплекс снабжен блоком питания датчика *12* и блоком обработки его сигналов *13* — ПЭВМ.

Отметим, что положения кронштейна *7* на стойке *2* и соответственно, муфты *9* на стержне, а также груза *10* на стержне *б* можно изменять, тем самым варьируя в широком диапазоне момент инерции маятника и моменты действующих на него сил относительно оси шарнира *3* — оси  $Oz$  колебаний маятника. Кроме того, стойка *2* может быть установлена в основание *1* своим верхним концом *4*, что дает возможность исследовать колебания маятника относительно положения равновесия, близкого к неустойчивому положению, или со смещением положения равновесия от вертикали.

Комплекс позволяет:

- визуально определять различие кинематических параметров колебаний маятника с разными его моментами инерции и моментами сил относительно оси колебаний;

- экспериментально получать характеристики колебательного движения путем преобразования электрических сигналов датчика углового положения маятника в цифровые сигналы, математической обработки этих сигналов и представления результатов обработки в виде графиков колебаний, выводимых на экран дисплея ПЭВМ и на принтер;

- математически моделировать процесс колебаний с помощью численного интегрирования дифференциального уравнения колебаний и проверять достоверность этого моделирования путем сравнения с экспериментальными данными.

## Задачи выполнения работы

При выполнении данной лабораторной работы студентам требуется решить следующие задачи:

- ознакомиться со структурой автоматизированного комплекса и конструкцией его экспериментальной установки;
- установить на основании лекционного материала и данных методических указаний теоретические основы изучаемого процесса колебаний;
- освоить последовательность действий при проведении экспериментов и теоретических расчетов;
- провести экспериментальные исследования колебаний маятника с регистрацией его перемещений;
- осуществить математическое моделирование процесса колебаний с подбором соответствующих коэффициентов вязкого и сухого трения;
- вывести полученные экспериментальные данные на печать, сравнить их с расчетными зависимостями и оформить полученные результаты в виде отчета о работе.

## Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с описанием лабораторного комплекса и основными положениями теоретической части, изложенными в данных методических указаниях.

2. Выполнить тарировку потенциометрического датчика угловых отклонений маятника путем измерения его показаний для заданных углов  $\varphi$  в последовательности, определяемой выводимыми на экран монитора ПЭВМ диалоговыми окнами.

3. Задать маятнику начальное отклонение и записать его колебания с помощью виртуального прибора.

4. Используя полученный экспериментальный график, подобрать в первом приближении параметры дифференциального уравнения колебаний ( $T_1$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ) и получить математическую модель колебаний.

5. Совместить в одном окне виртуального прибора экспериментальный график с расчетной зависимостью и путем подбора указанных параметров добиться наиболее точного их совпадения.

6. Распечатать полученные графики на принтере.

7. Дать оценку полученным результатам и при необходимости повторить эксперимент по исследованию колебаний маятника.

8. После проведения лабораторной работы с использованием полученных записей результатов экспериментов составить отчет о работе согласно установленной форме.

## Методика проведения работы

Лабораторная работа в данном автоматизированном комплексе проводится с применением разработанного в системе LabView виртуального прибора ТМЛ-01М.vi, передняя панель которого отображается на экране монитора ПЭВМ (рис. 2).

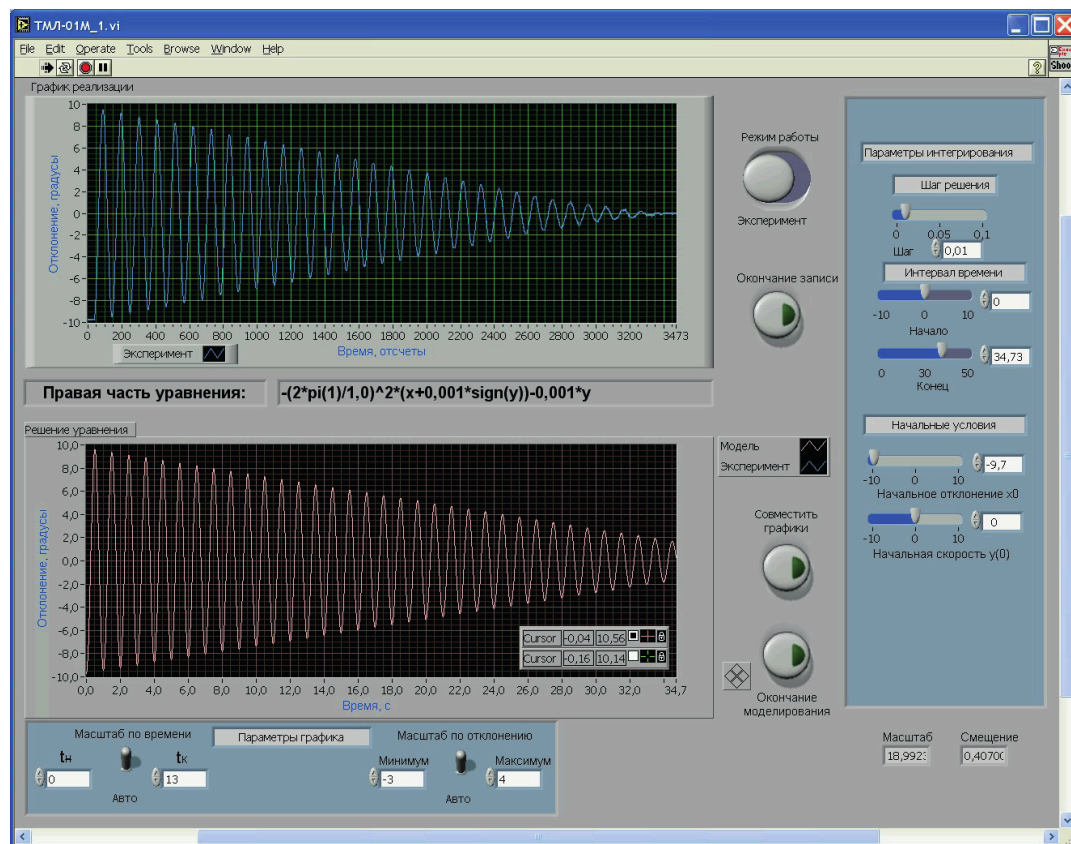


Рис. 2. Панель виртуального прибора лабораторной работы

В верхнем окне панели этого прибора воспроизводится запись экспериментального исследования колебаний маятника, а в нижнем окне — результаты их математического моделирования. В центральном окне размещается правая часть дифференциального уравнения колебаний маятника, записываемая здесь в нотации, принятой в среде LabView, константы в которой могут изменяться в процессе моделирования. Кроме того, в правой и нижней частях панели прибора расположены различные элементы (кнопки, переключатели, регуляторы и т.п.) управления программами обработки экспериментальных данных и моделирования процесса колебаний.

# Теоретические основы исследования колебаний

## Составление дифференциального уравнения колебаний маятника

Расчетную зависимость  $\varphi = f(t)$  угла отклонения маятника от положения равновесия можно найти, интегрируя дифференциальное уравнение движения маятника, для составления которого следует рассмотреть систему действующих на маятник сил. На рис. 3 приведена схема маятника в произвольном отклоненном от равновесия положении с действующими на него внешними силами и реакциями связей (здесь нумерация позиций соответствует рис. 1).

На этом рисунке показаны:  $\bar{P}_Г$ ,  $\bar{P}_с$  и  $\bar{P}_м$  — силы тяжести груза 10, стержня 6 и муфты 9, соответственно равные:  $P_Г = m_Гg$ ,  $P_с = m_сg$  и  $P_м = m_мg$ , где  $m_Г$ ,  $m_с$  и  $m_м$  — их массы;

$\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  — силы натяжения пружин;

$\bar{X}_O$  и  $\bar{Y}_O$  — силы реакции, возникающие в шарнире  $O$ ;

$M_с$  — момент сил вязкого сопротивления внешней среды и трения в шарнире  $O$ ;

$M_{тр}$  — момент сил сухого трения в потенциометре;

$\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  — угол отклонения маятника от положения равновесия и его угловая скорость.

Пренебрегая вертикальным смещением точки  $M$ , определим модули сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ :

$$F_1 \approx F_0 - kl_M \sin \varphi; \quad F_2 \approx F_0 + kl_M \sin \varphi,$$

где  $F_0$  — сила начального (в положении равновесия) натяжения пружин;  $k$  — коэффициент жесткости (жесткость) пружин;  $l_M = OM$  — расстояние от центра шарнира  $O$  до точки крепления пружин к муфте.

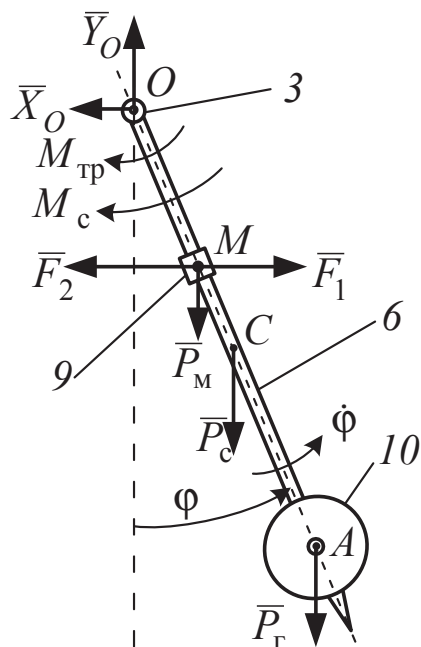


Рис. 3. Система действующих на маятник сил

Для составления дифференциального уравнения вращательно-го движения маятника вокруг оси  $Oz$  воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси:

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = \sum_{k=1}^N M_{Oz}(\bar{F}_k), \quad (1)$$

где  $K_{Oz} = J\dot{\varphi}$ ;  $J$  — момент инерции маятника относительно оси  $Oz$  (обобщенный коэффициент инерции), равный соответственно сумме моментов инерции стержня  $б$ , а также груза  $10$  и муфты  $9$ , рассматриваемых как материальные точки:

$$J = \frac{1}{3}m_c l^2 + m_\Gamma l_\Gamma^2 + m_M l_M^2.$$

Здесь  $l$  — длина стержня;  $l_\Gamma = OA$ ;  $\sum_{k=1}^N M_{Oz}(\bar{F}_k)$  — сумма моментов всех действующих на маятник сил относительно оси  $Oz$  (см. рис. 2), равная

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N M_{Oz}(\bar{F}_k) = \\ & = M_{Oz}(\bar{F}_1) + M_{Oz}(\bar{F}_2) + M_{Oz}(\bar{P}_M) + M_{Oz}(\bar{P}_C) + M_{Oz}(\bar{P}_\Gamma) + M_c + M_{тр}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $M_{Oz}(\bar{F}_1) = F_1 l_M \cos \varphi$ ;  $M_{Oz}(\bar{F}_2) = -F_2 l_M \cos \varphi$ ;  $M_{Oz}(\bar{P}_M) = -P_M l_M \sin \varphi$ ;  
 $M_{Oz}(\bar{P}_C) = -P_C \frac{l \sin \varphi}{2}$ ;  $M_{Oz}(\bar{P}_\Gamma) = -P_\Gamma l_\Gamma \sin \varphi$ .

Рассматривая движение маятника в рамках теории линейных колебаний, можно принять следующие допущения.

Пренебрегаем отклонениями осей пружин  $\delta$  (см. рис. 1) и соответственно линий действия сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  (см. рис. 1) натяжения пружин от горизонтали, принимаем зависимости этих сил от деформации пружин, а также сил вязкого сопротивления в воздухе и трения в шарнире  $O$  от угловой скорости вращения маятника линейными. Причем вследствие малости углов отклонения маятника от вертикали считаем  $\sin \varphi \approx \varphi$  и  $\cos \varphi \approx 1$ . При этих допущениях после подстановки в теорему (1) указанных соотношений и уравнения (2) дифференциальное уравнение движения маятника примет вид

$$J\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = M_{\text{тр}},$$

где  $c = 2ka^2 + \left(\frac{1}{2}m_c l + m_m l_m + m_r l_r\right)g$  — квазиупругий коэффициент (обобщенный коэффициент жесткости системы);  $b$  — обобщенный диссипативный коэффициент (обобщенный коэффициент вязкого сопротивления). Здесь момент сил сухого трения  $M_{\text{тр}}$  не зависит ни от положения маятника, ни от его угловой скорости, а его знак определяется направлением изменения угла  $\varphi$ , т. е. знаком угловой скорости  $\dot{\varphi}$ .

После сокращения на обобщенный коэффициент инерции  $J$  получаем дифференциальное уравнение движения маятника в приведенном виде:

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + \omega^2\varphi \pm \frac{M_{\text{тр}}}{J} = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + \omega^2[\varphi + \alpha \operatorname{sgn} \dot{\varphi}] = 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \frac{\mu}{2J}$  — коэффициент затухания колебаний;  $\omega = \sqrt{\frac{c}{J}}$  — частота собственных колебаний маятника без учета сопротивления;  $\alpha = \frac{M_{\text{тр}}}{c}$  — угол поворота маятника, который мог бы вызвать приложенный к нему момент сил сухого трения,

$$\operatorname{sgn} \dot{\varphi} = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{\varphi} > 0; \\ 0, & \text{если } \dot{\varphi} = 0; \\ -1, & \text{если } \dot{\varphi} < 0. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (3) является нелинейным, поэтому получить уравнение движения маятника  $\varphi = \varphi(t)$  в данном случае невозможно.

## Влияние сухого и вязкого трения на движение маятника

Для учета и сопоставления влияния сил сопротивления на движение маятника рассмотрим две отдельные модели — сухого и вязкого трения.

В первом случае будем считать, что основной вклад в рассеяние энергии вносят силы сухого трения. Тогда дифференциальное уравнение (3) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(\varphi \pm \alpha) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим движение маятника в этом случае поэтапно — в одну и другую стороны по углу  $\varphi$

Пусть в начальный момент времени стержень маятника отклонен на угол  $\varphi = \varphi_0 > 0$ , т. е. вправо от положения равновесия (см. рис. 3), и отпущен без начальной скорости. Тогда в первом интервале движения (от крайнего правого положения до крайнего левого положения) в уравнении (4) следует поставить перед  $\alpha$  знак минус:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(\varphi - \alpha) = 0.$$

Введем в это уравнение новую переменную  $\varphi_1 = (\varphi - \alpha)$ :

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega^2\varphi_1 = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5), удовлетворяющее заданным начальным условиям:  $t = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0 > 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$  (при этом  $\varphi_1(0) = (\varphi_0 - \alpha) > 0$ ), есть

$$\varphi_1 = (\varphi_0 - \alpha) \cos \omega t$$

и соответственно

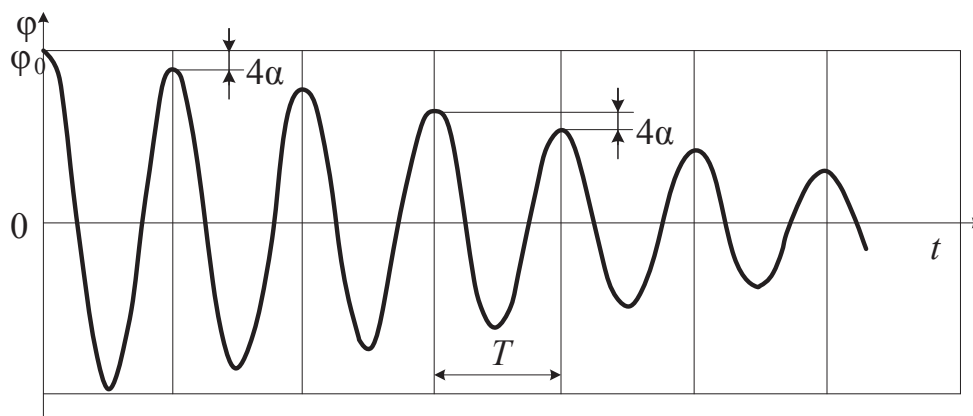
$$\varphi = \alpha + (\varphi_0 - \alpha) \cos \omega t.$$

Это решение применимо, пока маятник движется влево, как это и предполагалось при выводе уравнения (5). Крайнее левое положение будет достигнуто по истечении промежутка времени, равного  $\pi/\omega$ . В этом положении маятника его отклонение от вертикального положения составит  $\varphi = \varphi_0 - 2\alpha$ . Рассматривая два крайних положения маятника, определяемых углами  $\varphi(0) = \varphi_0$

и  $\varphi(\pi/\omega) = \varphi_0 - 2\alpha$ , можно заключить, что за половину цикла колебаний их амплитуда уменьшается на  $2\alpha$ . При этом время, необходимое для половины цикла колебаний, здесь такое же, что и в случае свободных колебаний без сопротивления. Следовательно, постоянный момент сил трения не влияет на частоту колебаний.

Рассматривая теперь движение маятника от крайнего левого положения вправо и применяя те же соображения, можно показать, что за вторую половину цикла произойдет дальнейшее уменьшение амплитуды на величину  $2\alpha$ . Следовательно, амплитуда убывает по закону арифметической прогрессии. Наконец маятник остановится в одном из крайних положений, как только отклонение станет меньше, чем  $\alpha$ , поскольку в этом положении момент сил трения окажется достаточным для того, чтобы уравновесить силы упругости пружин и силы тяжести, стремящиеся вернуть маятник в вертикальное положение.

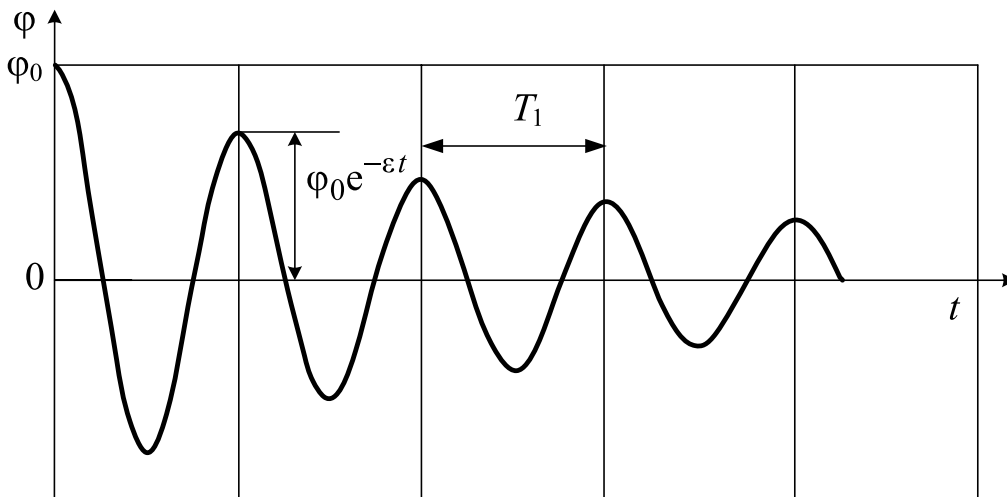
Таким образом, маятник будет совершать затухающие колебания, при которых амплитуда будет уменьшаться по линейному закону. В качестве примера на рис. 4 приведен график таких колебаний, где  $T = 2\pi/\omega$  — период собственных (без учета сопротивления) колебаний маятника.



**Рис. 4.** Затухающие по линейному закону колебания маятника

Рассмотрим вторую модель влияния сил сопротивления на движение маятника — случай вязкого трения. Запишем дифференциальное уравнение (3) движения маятника для этой модели:

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (6)$$



**Рис. 5.** Колебания маятника, затухающие по экспоненциальному закону

В случае малого сопротивления ( $\varepsilon < \omega$ ) решение уравнения (6) при заданных начальных условиях будет иметь вид

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \left( \varphi_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\varphi}_0 + \varepsilon \varphi_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = 2\pi/T_1$  — частота свободных колебаний с вязким сопротивлением;  $T_1$  — период этих колебаний.

При начальных условиях  $t = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0 > 0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = -\varepsilon \varphi_0$  уравнение колебаний принимает более удобную для анализа форму

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \cos \omega_1 t. \quad (7)$$

Из полученного решения (7) видно, что в случае вязкого сопротивления маятник должен совершать затухающие колебания, при которых амплитуда будет уменьшаться по экспоненциальному закону, как это показано на рис. 5.

### Интегрирование дифференциального уравнения колебаний

В экспериментальной установке данного комплекса присутствует как сухое, так и вязкое трение, поэтому движение маятника описывается дифференциальным уравнением (3):

$$\ddot{\phi} + 2\varepsilon\dot{\phi} + \omega^2 [\phi + \alpha \operatorname{sgn} \dot{\phi}] = 0,$$

$$\text{где } \operatorname{sgn} \dot{\phi} = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{\phi} > 0; \\ 0, & \text{если } \dot{\phi} = 0; \\ -1, & \text{если } \dot{\phi} < 0; \end{cases} \quad \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \varepsilon^2 \text{ — квадрат частоты сво-}$$

бодных колебаний без учета сопротивления.

Как указано выше, данное уравнение является нелинейным и его решение можно получить только численным методом. Для этого введем обозначения переменных согласно нотации, принятой в системе LabView, и представим это уравнение в нормальной форме Коши путем подстановок:

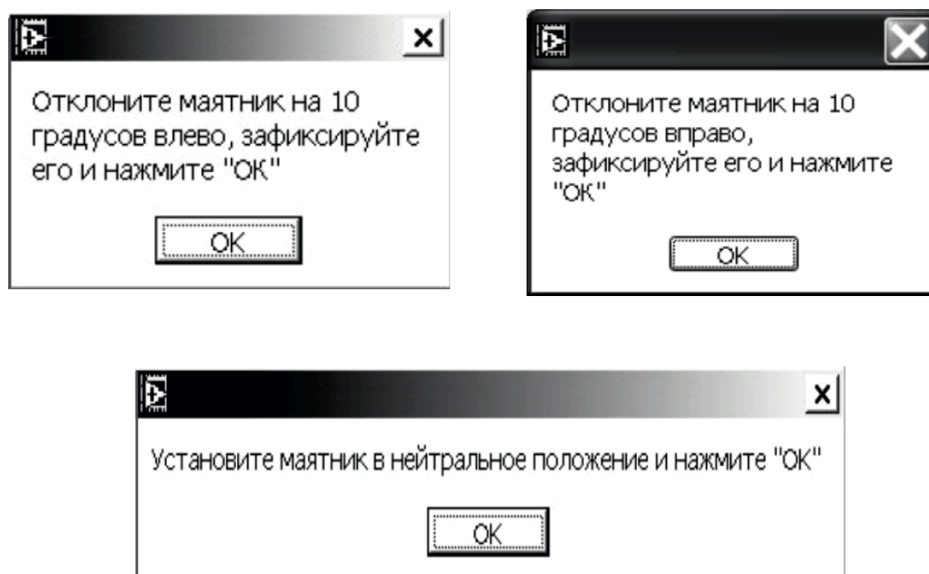
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2\varepsilon y - \left[ \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \varepsilon^2 \right] [x + \alpha \operatorname{sgn} y], \end{cases} \quad (8)$$

где  $x = \phi$ ,  $y = \dot{\phi}$ ,  $\dot{y} = \ddot{\phi}$ ;  $T_1$  — период колебаний, который можно определить по экспериментальному графику (см. рис. 5), разделив интервал времени нескольких полных периодов колебаний на число этих периодов;  $\varepsilon$  — коэффициент затухания колебаний, который можно найти по формуле  $\varepsilon = \frac{\ln \Delta A}{T_1}$ , в которой

$\Delta A = \frac{A_i}{mA_{i+m}}$  — декремент колебаний, где  $A_i = \phi_0 e^{-\varepsilon t}$  — условная амплитуда колебаний (максимальное отклонение маятника от положения равновесия) в данный момент времени;  $m$  — число полных периодов.

### Экспериментальное исследование колебаний

Сначала осуществляется тарировка измерительной системы путем измерения показаний потенциометрического датчика угловых отклонений маятника для заданных углов  $\phi$ : например,  $-10$ ,  $+10$  и  $0^\circ$ . С этой целью на экран монитора ПЭВМ последовательно выводятся диалоговые окна, показанные на рис. 6. При этом необходимо четко фиксировать маятник в соответствующих угловых положениях, что можно осуществить с помощью какого-либо

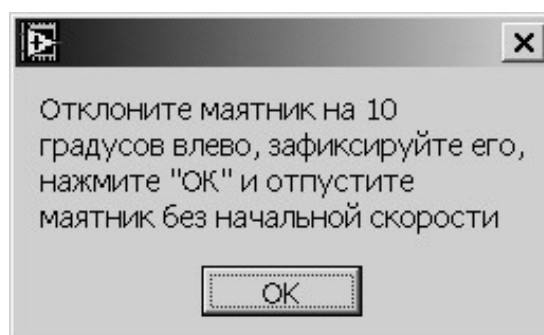


**Рис. 6.** Диалоговые окна режима тарировки измерительной системы

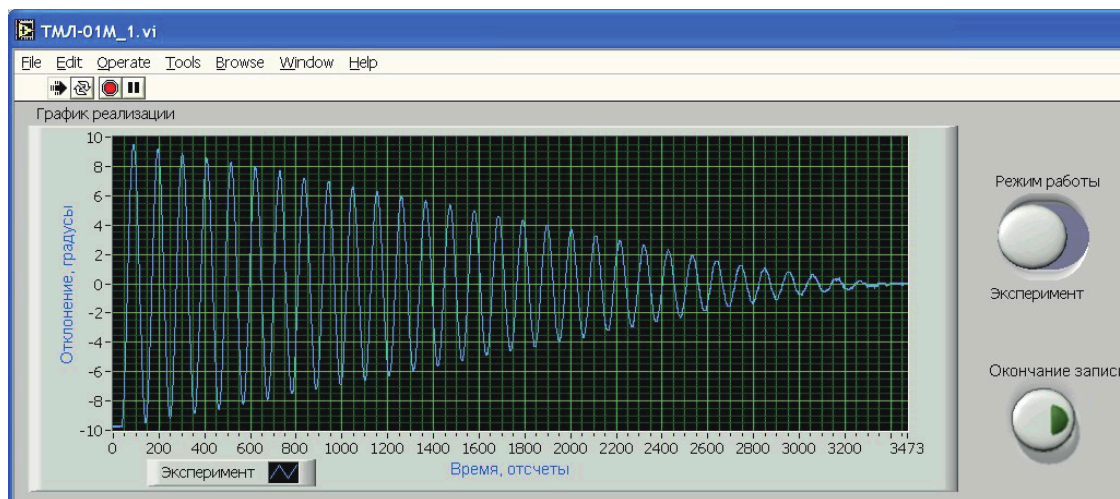
стержня (или пальца), прижимая его к шкале *11* (см. рис. 1, б) визуального отсчета угла  $\varphi$  отклонения маятника.

После этого включается режим записи свободных колебаний маятника и на экран монитора ПЭВМ выводится соответствующее диалоговое окно, показанное на рис. 7.

При проведении записи колебаний необходимо отклонить маятник на заданный угол и после нажатия клавиши «ОК» (щелчком мыши на соответствующей кнопке диалогового окна, при этом допустимо и более удобно нажимать клавишу «пробел») и отпустить его без начальной скорости. Рекомендуется отпускать маятник чуть позже нажатия клавиши, чтобы записать процесс свободных колебаний с самого начала. Сразу после этого на экран монитора выводится изображение панели виртуального прибора лабораторной работы (см. рис. 2), фрагмент которой с записью колебаний маятника в верхнем окне панели показан на рис. 8 в увеличенном масштабе.



**Рис. 7.** Диалоговое окно включения режима записи колебаний маятника



**Рис. 8.** Экспериментальный график колебаний маятника

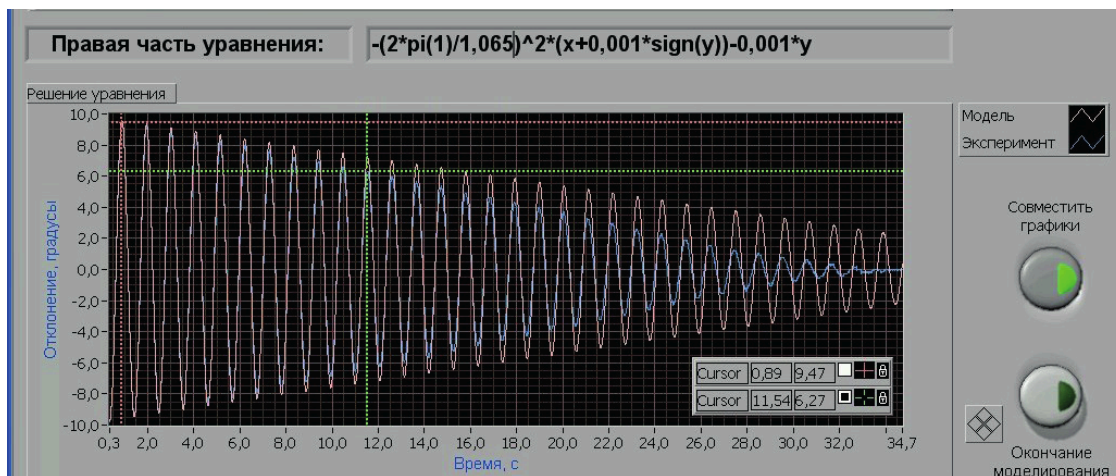
В верхнем окне панели этого прибора в реальном времени представлена запись затухающих свободных колебаний маятника для одного из вариантов его геометрических и инерционных характеристик. Остановить процесс регистрации можно в любой момент нажатием клавиши «Окончание записи» в правой части панели прибора. График отображается в режиме автоматического масштабирования по шкале времени, так что весь процесс от начала до конца регистрируется на экране монитора. Оцифровка шкалы времени для экспериментального графика осуществляется в числе отсчетов сигнала, что соответствует дискретному характеру ввода экспериментальных данных. Перейти к значениям реального времени можно, умножив число отсчетов на установленный интервал дискретизации — 10 мс, совпадающий с шагом численного решения дифференциального уравнения колебаний.

### **Математическое моделирование процесса колебаний**

Математическое моделирование процесса колебаний маятника осуществляется посредством задания с помощью клавиатуры и мыши значений констант ( $T_1$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ) правой части дифференциального уравнения колебаний (8), представленной в центральном окне панели виртуального прибора (см. рис. 5). При этом после каждого изменения какой-либо из указанных констант выполняется численное интегрирование дифференциального уравнения (8) в заданном интервале времени, результат которого ото-

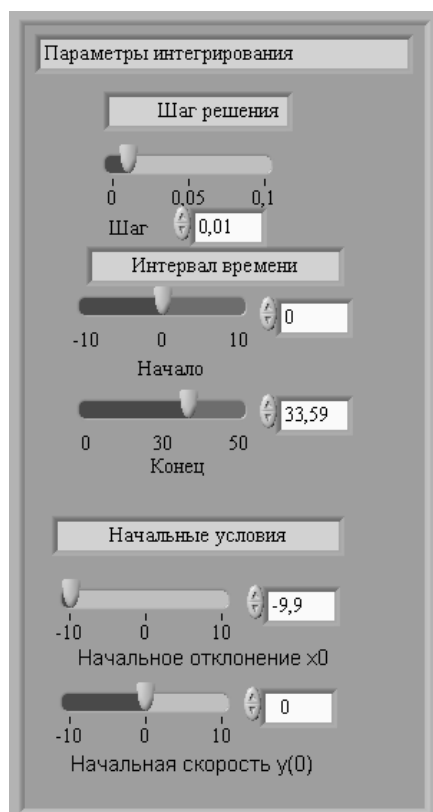
бражается в нижнем окне панели прибора. Здесь следует отметить, что для упрощения процедуры численного интегрирования в правую часть уравнения вместо периода собственных колебаний  $T$  подставляется условный период затухающих колебаний  $T_1$ , достаточно просто определяемый по экспериментальному графику в верхнем окне панели прибора. Это вполне допустимо, поскольку значения  $T$  и  $T_1$  в данном случае практически совпадают вследствие малости коэффициента затухания  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \leq 0,001$ ).

Сопоставление экспериментального и расчетного графиков колебаний (рис. 9) показывает их значительное несовпадение, что связано с существенным отличием значений констант в правой части интегрируемого дифференциального уравнения от их истинных значений.



**Рис. 9.** Расчетный и экспериментальный графики в одном окне

Основной задачей математического моделирования процесса колебаний маятника в данной работе является достижение как можно более точного совпадения расчетной и экспериментальной зависимостей. В этом случае использованные при численном интегрировании значения указанных выше констант будут соответствовать их реальным значениям. Чтобы достичь наиболее точного совпадения расчетной зависимости с экспериментальной, нужно совместить их в одном окне. Для этого нажимаем (посредством мыши) кнопки «Совместить графики» (см. рис. 5, 8) на правой части панели виртуального прибора экспериментальный график перемещают в нижнее окно и накладывают на результат численного решения уравнения (см. рис. 9).



**Рис. 10.** Пульт задания параметров интегрированием дифференциального уравнения колебаний

Создание математической модели колебаний маятника реализуется с использованием библиотечного модуля. Параметры этой процедуры задаются с помощью соответствующих органов управления, отображенных на отдельном пульте, расположенном справа от окон графиков панели прибора (см. рис. 2) и показанном отдельно на рис. 10.

Для изменения параметров интегрирования дифференциального уравнения (шага решения, начального отклонения и начальной скорости) на пульте размещены соответствующие кнопки-указатели и измерительные шкалы. Перемещение указателей относительно шкал осуществляется с помощью мыши. При изменении любого из параметров (так же, как и констант в правой части уравнения) процедура решения уравнения повторяется.

Для достижения более точного совпадения по частоте и отклонениям от положения равновесия расчетной зависимости с экспериментальным гра-

фиком колебаний на панели виртуального прибора отображен пульт управления параметрами этой зависимости, который расположен в нижней части панели. На рис. 11 показан фрагмент панели с указанным пультом.

Для изменения масштабов изображения графиков по времени и по амплитуде на пульт выведены соответствующие управляющие элементы: переключатели и кнопки регулирования. Такая регулировка позволяет получить изображения графиков в нижнем окне панели прибора в нужном интервале времени колебаний и в более крупном масштабе, как это показано на рис. 11, что и позволяет повысить точность подбора констант ( $T_1$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ) в интегрируемом дифференциальном уравнении.

Рекомендуется вначале добиться совпадения начальных условий интегрирования с экспериментальным графиком. Для этого переключатель «Масштаб времени» переводят в положение «Ручной»,

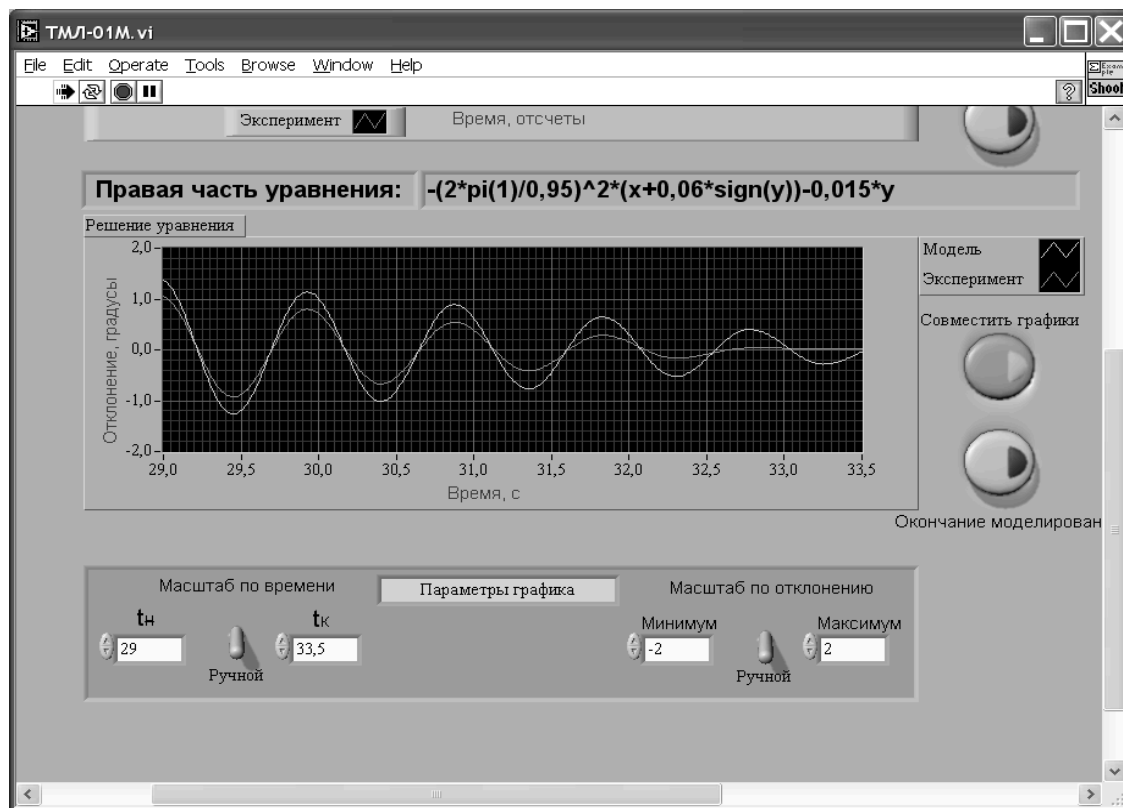
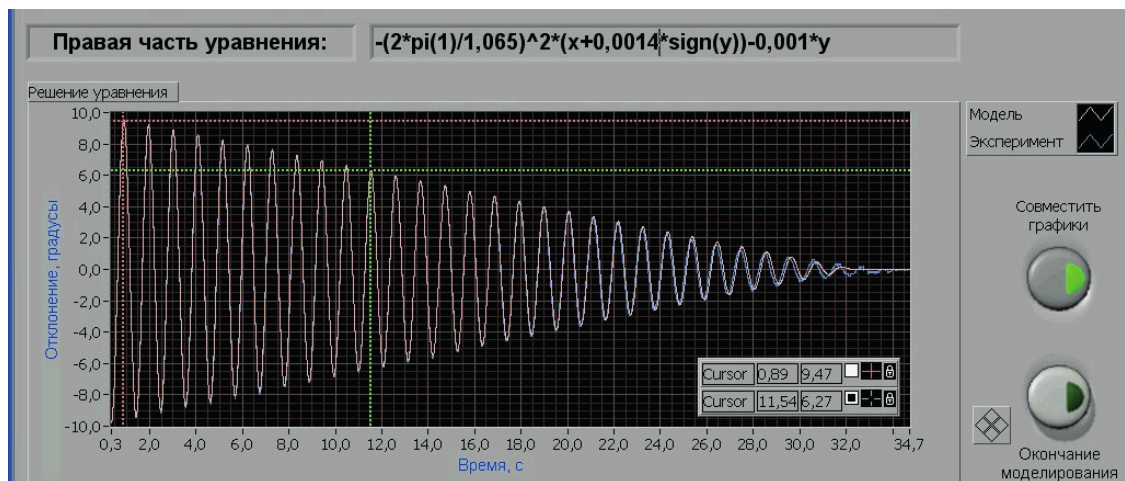


Рис. 11. Пример изменения масштабов отображения графиков

переключатель « $t$ » устанавливают в положение, соответствующее примерно одному периоду колебаний, и переключателями «Начальное отклонение  $x_0$ » и «Начало» подбирают значения начальных условий по амплитуде и времени для совмещения начальных участков графиков эксперимента и модели.

Далее для подбора периода колебаний необходимо измерить условный период с помощью двух курсоров, отображаемых на графике пунктирными линиями (рис. 12). При подведении указателя мыши к вертикальной линии курсора вид указателя меняется, показывая возможность перемещения курсора вправо или влево, при этом горизонтальная линия курсора «отслеживает» текущее значение графика эксперимента. Для более точного оценивания периода рекомендуется с помощью двух курсоров выделить интервал времени трех-четырех периодов колебаний таким образом, чтобы уровни горизонтальных линий максимально точно совпали вблизи нулевого значения. Период вычисляют делением разности вертикальных отсчетов второго и первого курсора на число захваченных периодов и подставляют в дифференциальное уравнение.



**Рис. 12.** Совмещение расчетного и экспериментального графиков колебаний маятника

Индикатор числовых значений положения курсоров размещен в правом нижнем углу нижнего графика.

С помощью курсоров можно также провести оценку декремента колебаний, последовательно устанавливая перекрестье курсора в положения экстремумов экспериментального графика.

В результате выполнения указанной процедуры подбора параметров интегрирования дифференциального уравнения достигается наиболее точное совпадение расчетного графика колебаний с экспериментальной зависимостью  $\varphi = \varphi(t)$  (см. рис. 12). Это, в свою очередь, означает, что применяемый метод моделирования позволяет с достаточно высокой степенью точности определять коэффициенты вязкого и сухого трения в данной экспериментальной установке, значения которых другими способами определить весьма затруднительно.

В программном обеспечении данного лабораторного комплекса предусмотрен также режим его работы «Имитация». В этом режиме вместо реальной экспериментальной установки (см. рис. 1, 4) используется ее виртуальная модель с геометрическими, жесткостными и инерционными характеристиками, соответствующими их значениям в реальной установке в одном из вариантов крепления в ней муфты и груза к стержню маятника. Виртуальный эксперимент на этой модели проводится с использованием того же прибора ТМЛ-01М.vi, что и в экспериментах на реальной установке. При этом все действия выполняются в той же последовательности и в том же объеме, включая сравнение результатов такого вир-

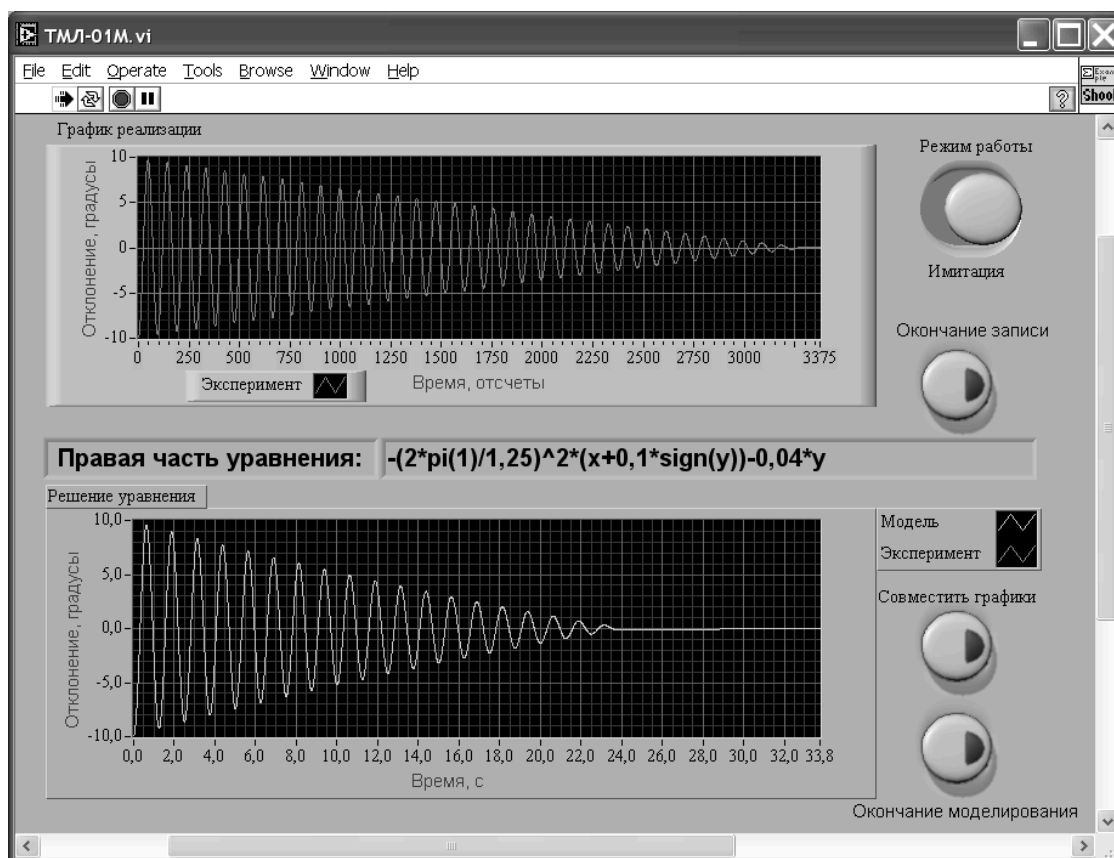


Рис. 13. Панель виртуального прибора в режиме «Имитация»

туального эксперимента с данными численного решения дифференциального уравнения (рис. 13).

Применение режима «Имитация» позволяет демонстрировать выполнение лабораторной работы по исследованию свободных колебаний физического маятника и вне лаборатории, например при проведении лекций или семинарских занятий по теории колебаний, что должно способствовать более глубокому освоению студентами основных положений теории колебаний.

## Форма отчета о лабораторной работе

Отчет должен содержать следующее.

1. Титульный лист отчета с указанием названия дисциплины, названия лабораторной работы, Ф.И.О. студента, шифр группы, дату проведения работы, Ф.И.О. преподавателя.

2. Теоретическая часть: схема установки с действующими силами, дифференциальные уравнения движения маятника для случаев сухого и вязкого трения, а также для их одновременного действия, графики решений указанных уравнений и их основные характеристики.

3. Распечатки экспериментального графика колебаний маятника и зависимости, полученной в результате математического моделирования этого процесса.

### Вопросы для самопроверки и защиты лабораторной работы

1. Как записываются дифференциальные уравнения колебаний маятника при сухом и вязком трении?

2. Как в лабораторной установке изменяются жесткостные и инерционные характеристики маятника?

3. В чем состоит различие процессов свободных колебаний при сухом и вязком трении?

4. При каком виде трения (сухом или вязком) выше частота свободных колебаний?

5. Как в лабораторной работе реализуется математическая модель колебаний?

6. Как определяются в данной работе коэффициенты вязкого сопротивления и сухого трения?

### Литература

Курс теоретической механики: учебник / под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. 5-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 584 с.

*Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики: учебник. 6-е изд. СПб.: Лань, 2010. 720 с.

*Бутенин Н.В.* Курс теоретической механики: учебное пособие / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд. СПб.: Лань, 2009. 736 с.

## Содержание

Предисловие .....	3
Описание лабораторного комплекса ТМл-01М .....	4
Задачи выполнения работы .....	6
Порядок выполнения работы .....	6
Методика проведения работы .....	7
Теоретические основы исследования колебаний.....	8
Составление дифференциального уравнения колебаний маятника .....	8
Влияние сухого и вязкого трения на движение маятника .....	11
Интегрирование дифференциального уравнения колебаний .....	13
Экспериментальное исследование колебаний .....	14
Математическое моделирование процесса колебаний .....	16
Форма отчета о лабораторной работе .....	22
Вопросы для самопроверки и защиты лабораторной работы .....	22
Литература .....	22

*Учебное издание*

**Витушкин Вячеслав Валентинович**  
**Жигулёвцев Юрий Николаевич**

**Автоматизированный лабораторный комплекс**  
**«Свободные колебания физического маятника» ТМл-01М**

Редактор *С.А. Серебрякова*  
Корректор *Е.А. Моисеева*  
Художник *Э.Ш. Мурадова*  
Компьютерная верстка *Г.Ю. Молотковой*

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 13.04.2021. Формат 60×90/16.  
Усл. печ. л. 1,5. Тираж 100 экз. Изд. № 799-2020. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1.  
press@baumanpress.ru    <https://bmstu.press>

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1.  
baumanprint@gmail.com