

Тепловое излучение - излучение, которое тела испускают за счет собственной внутренней энергии. (Природа: ЭМ волны)

1 вопрос

Характеристики:

1) Р. Энергетическая светимость - энергия испускаемая единицей поверхности тела за единицу времени во всех направлениях

$$R = \frac{dW}{dSdt}$$

2) Испускательная способность - энергия испускаемая за ед. времени единицей площади поверхности тела, но в ед. интервале круговых частот

$$r_{\omega, T} = \frac{dR}{d\omega} = \frac{dW}{dSdt d\omega}$$

$$r_{\lambda, T}$$

$$r_{\lambda, T} = \frac{dR}{d\lambda} = \frac{dW}{dSdt d\lambda}$$

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega, T} d\omega$$

↑ частоты не могут быть отриц.

$$R = \int_0^{\infty} r_{\lambda, T} d\lambda$$

$$v = \frac{l}{T} = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi v$$

Если диапазон волн $d\lambda$ и ему соотв. диапазон частот $d\omega$

$$\frac{d\lambda}{d\omega} \quad dR = r_{\lambda, T} d\lambda = r_{\omega, T} d\omega$$

$$d\omega = \frac{-2\pi c}{\lambda^2} d\lambda \quad r_{\lambda, T} |d\lambda| = r_{\omega, T} \frac{2\pi c |d\lambda|}{\lambda^2}$$

$$r_{\lambda, T} = r_{\omega, T} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda^2}$$

3) Поглощательная способность

$$a_{\omega} = \frac{d\Phi_{\text{погл}}}{d\Phi_{\text{пад}}} \leftarrow \text{как опред.}$$

$$a_{\lambda}$$

$$a_{\omega} \text{ и } a_{\lambda} \in [0; 1]$$

$$a_{\omega} = 1 \quad \forall \omega - \text{АЭТ}$$

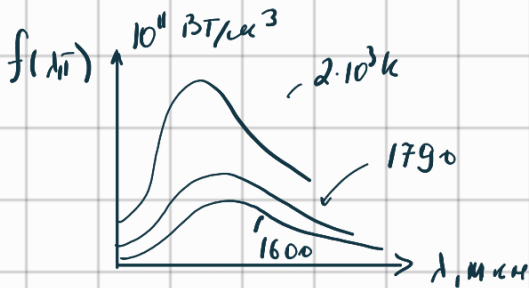
$$a_{\omega} = \text{const} - \text{серое тело}$$

Закон Кирхгофа:

2 вопрос

Отношение испускающей и поглощающей способностей не зависит от природы тела и является для всех тел одной и той же ф-цией частоты или длины волны и температуры

$$\frac{r_{\omega_1, T}}{a_{\omega_1}} = \frac{r_{\omega_2, T}}{a_{\omega_2}} = \frac{r_{\omega, T}}{a_{\omega}} = f(\omega, T) - \text{испускающая способность АЧТ}$$



Максимумы смещаются в область более коротких длин волн

$u_{\omega, T} = \frac{dU}{d\omega}$ - спектральная плотность энергии

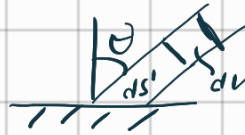
$$u = \int_0^\infty u_{\omega, T} d\omega$$

3 вопрос

Связь спектральной плотности энергии и испускающей способности



$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{dS'}{r^2} \\ r' &= r \sin \theta \\ dS' &= r d\theta r \sin \theta d\varphi \\ dS' &= r^2 d\theta \sin \theta d\varphi \\ d\Omega &= \frac{dS'}{r^2} = d\theta \sin \theta d\varphi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} dS' &= dS \cos \theta \\ dV &= dS' \cdot c dt = dS \cos \theta \cdot c dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\tilde{u} &- \text{внутри } d\omega \\ d\tilde{u} &= u \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{4c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \frac{1}{2} d(2\theta) d\varphi = \int_0^{\pi/2} 2\pi \cdot \frac{4c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\theta) d(2\theta) \\ &= \frac{4c}{8} [-\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{4c}{8} (1+1) = \frac{4c}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dW &= d\tilde{u} \cdot dV = \\ &= u \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot dS \cos \theta \cdot c dt \\ \frac{dW}{dS dt} &= \frac{u d\theta \sin \theta d\varphi}{4\pi} \cdot c \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{c}{4} u \\ dR^* &= f(\omega, T) d\omega = \frac{c}{4} u_{\omega, T} d\omega \end{aligned}$$

Закон Стефана Больцмана

$$R^* = \sigma T^4$$

$$R = A_1 \sigma T^4$$

$$\sigma \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \right]$$

Закон позволяет узнать энергию светимости на всех длин волн

Закон Смещения Вина

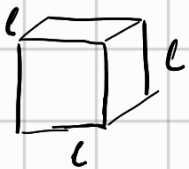
$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T} \quad b \text{ [мк]}$$

длина волны, на которой приходится максимум испускательной способности.
Закон позволяет узнать на какой длине волны больше всего излучает тело

Вывод Формулы Релея-Джинса

4 вопроса

Представим полость с зеркальными стенками. \Rightarrow стоячие волны



T - температура излучения

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{l}{2}$$

$$l = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2l} \cdot n = \frac{\pi n}{l}$$

\vec{k} - волновое число

Волна может распространяться в \forall направлениях \Rightarrow

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{l}\right)^2} = \frac{\pi}{l} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

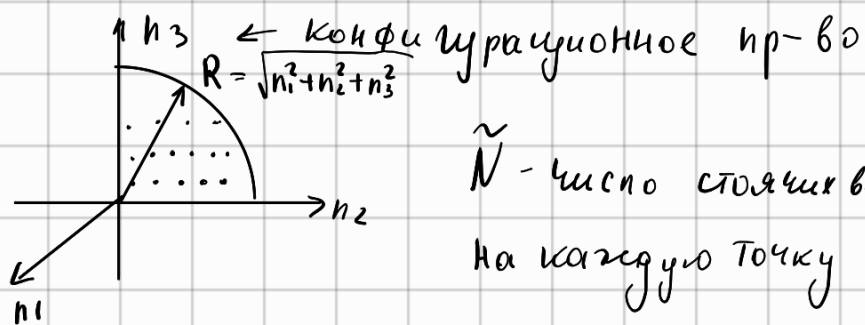
Возможные значения волнового числа k

$n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$ все не могут быть равны 0, но 2 из 3 могут

Переходим к круговой частоте

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad \omega = kc = \frac{\pi c}{l} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Рассмотрим пр-во, оси которого n_1, n_2, n_3



\tilde{N} - число стоячих волн имеющ. частоты от 0 до ω
 на каждую точку приходится ср. объем

$$\tilde{N} = \frac{1}{8} \underbrace{\frac{4}{3} \pi R^3}_{\text{объем шара}} = \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \\ = \frac{\omega c}{\pi c} \end{array} \right\} = \frac{1}{6} \pi \frac{\omega^3 c^3}{\pi^3 c^3} = \frac{1}{6} \frac{\omega^3 V}{\pi^2 c^3}$$

У нас поперечные волны, которые имеют 2 поляризации

$$N = 2 \tilde{N} = \frac{1}{3} \frac{\omega^3 V}{\pi^2 c^3}$$

$$U_\omega = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\omega} \langle E \rangle$$

← средняя энергия одной стоячей волны

$\frac{dN}{d\omega}$ - число стоячих волн в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$.

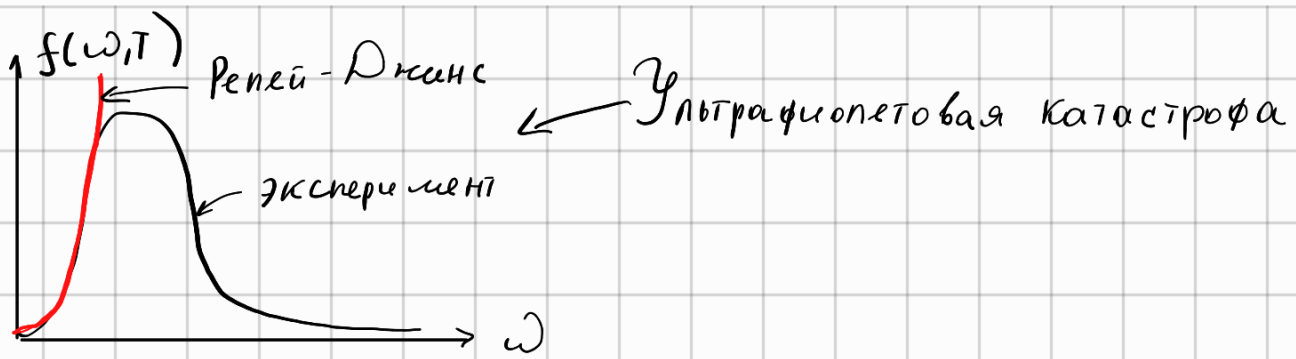
$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} kT = \left\{ \begin{array}{l} \text{Эл волна} \\ \text{имеет 2 поля: электр. и магнитное} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT$$

$$\langle E \rangle = kT - \text{средняя энергия стоячей волны с 1-ой поляризацией}$$

$$U_\omega = \frac{1}{V} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^3 V}{3\pi^2 c^3} \right) \langle E \rangle = \frac{1}{V} \frac{3\omega^2 V}{3\pi^2 c^3} \cdot kT = \frac{\omega^3 \cdot kT}{\pi^2 c^3} \Rightarrow U_{\omega,T} = \frac{\omega^3 kT}{\pi^2 c^3}$$

$$f_{\omega,T} = \frac{c}{4} U_{\omega,T} = \frac{c}{4} \frac{\omega^3 \cdot kT}{\pi^2 c^3} = \frac{\omega^3 kT}{4\pi^2 c^2}$$

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^3 \cdot kT}{4\pi^2 c^2} - \text{Формула Релея - Джинса}$$



Свет от экрана - дифракционная

5 вопрос

$$E = h\nu, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ - приведенная постоянная Планка}$$

$$E = \hbar\omega$$

Излучение испускается квантами

Каждой стоячей волне может соответствовать энергия

$$E_n = n\hbar\omega$$

↑ число фотонов

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n E_n \text{ - энергия стоячей волны, если в ней } n \text{ фотонов}$$

↑ вероятность в данной стоячей волне n фотонов

$n = n_0 e^{-\frac{E}{kT}}$ - распределение Больцмана

Из распределения Максвелла - Больцмана $\Rightarrow P_n = A e^{-\frac{E_n}{kT}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\frac{E_n}{kT}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}} \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} \cdot n\hbar\omega}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}$$

Обозначим $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-xn}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn}}$$

$$\frac{d}{dx} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} -n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}$$

$$\langle \bar{E} \rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

образует геомтр. прогрессию $b_0 = 1$, $q = e^{-x}$ $S_{\infty} = \frac{1}{b_0 - q}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

убрали минус и получили $\ln\left(\frac{1}{1 - e^{-x}}\right)^{-1}$

$$\langle E \rangle = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1 - e^{-x}} = \hbar\omega \frac{d}{dx} \ln(1 - e^{-x}) =$$

$$= \hbar\omega \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{разделим числитель и знаменатель} \\ \text{на } e^{-x} \end{array} \right\}$$

↑ взяли производную

$$= \frac{\hbar\omega}{e^x - 1} = \left\{ x = \frac{\hbar\omega}{kT} \right\} \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

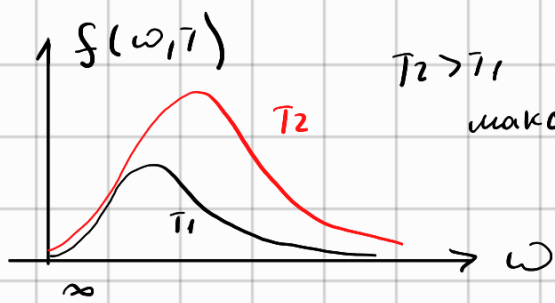
$$U_{\omega, T} = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\omega} \langle E \rangle = \left\{ N = \frac{1}{3} \frac{\omega^3 V}{\pi^2 c^3} \right\} = \frac{1}{V} \frac{3\omega^2 V}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$U_{\omega, T} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} - \text{Формула Планка для спектральной плотности энергии теплового излучения}$$

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} U_{\omega, T} = \frac{c}{4} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} - \text{испускательная способность АЧТ (Ф-ия Планка)}$$

↑ это выражение согласуется с экспериментом



$T_2 > T_1$

максимум сдвигнется вправо, к более высоким частотам

$$R = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T$$

Энергетическая светимость

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda}$$

$$dR = f(\omega, T) |d\omega| = f(\lambda, T) |d\lambda|$$

$$f(\lambda, T) = f(\omega, T) \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{d}{d\lambda} (2\pi \frac{c}{\lambda}) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \\ f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \\ \hbar \omega = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \end{array} \right\} =$$

$$= f(\lambda, T) = \frac{\hbar \cdot \frac{8\pi^3 c^3}{\lambda^3}}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

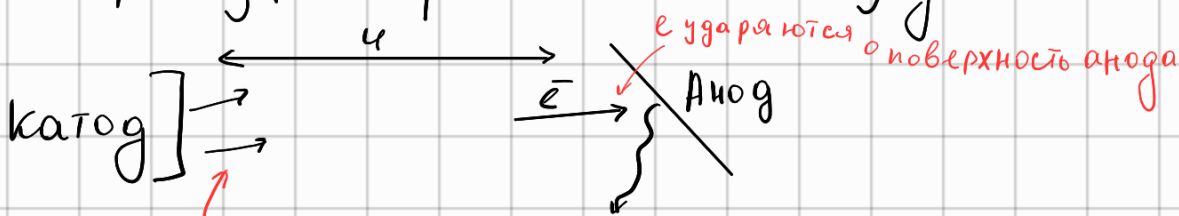
$$f(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

Чтобы получить закон смещения Вина нужно $\frac{df(\lambda, T)}{d\lambda} = 0$

Другие экспериментальные подтверждения квантовой природы света

6 вопрос

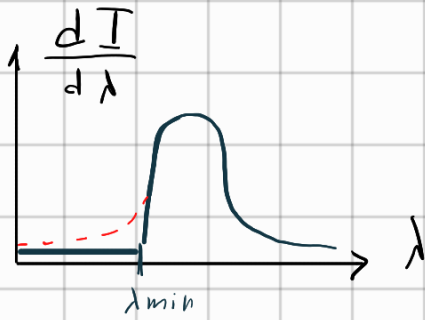
1) Тормозное рентгеновское излучение



Электроны вылетают в результате термоэлектронной эмиссии

испускаются рентгеновские фотоны

$$h\nu_{\max} = \hbar\omega \Rightarrow \nu_{\max} = \frac{\hbar\omega}{h} = \left\{ \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \right\} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{hc}{\hbar\omega}$$

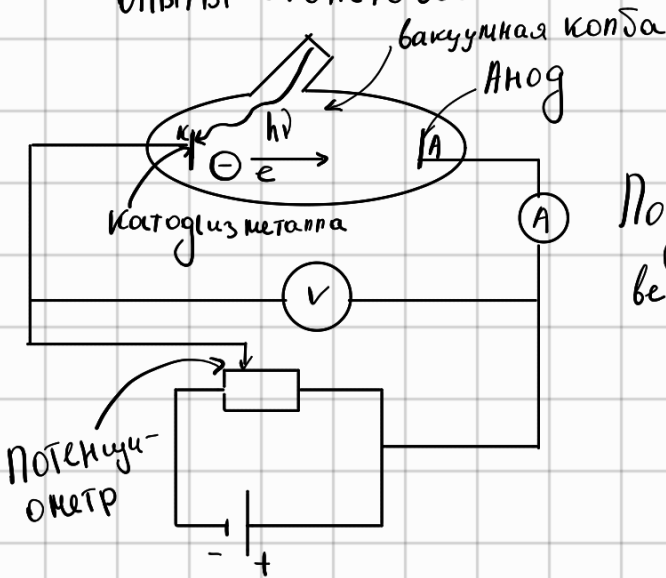


Коротковолновая граница
РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

↑
ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТОГО, ЧТО
СВЕТ ИСПУСКАЕТСЯ КВАНТАМИ

2) ФОТОЭФФЕКТ (ВНЕШНИЙ) 7 ВОПРОС

ОПЫТЫ СТОПЕТОВА



Под действием света из металла
вылетают электроны

Ур-ие Эйнштейна для фотоэффекта

$$\frac{m\nu_{\max}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}}$$

↑ энергия
электрона

↑ потеря энергии при вылете из металла

$$0 = h\nu_{\text{кр}} - A_{\text{вых}} \Rightarrow \nu_{\text{кр}} = \frac{A_{\text{вых}}}{h}$$

↑ наличие красной границы есть подтверждение, что
свет поглощается квантами

Если были только волновые св-ва то была бы прямая зависимость
от длины волны

На самом деле фотоэффект наблюдается только при определенной частоте.

Если $\nu < \nu_{\text{кр}}$ - фотоэффект наблюдаться не будет

$E_{k \max}$ фотоэлектронов не завис от интенсивности света, определяется лишь частотой

помощью запирающего напряжения определяем $E_{k \max}$

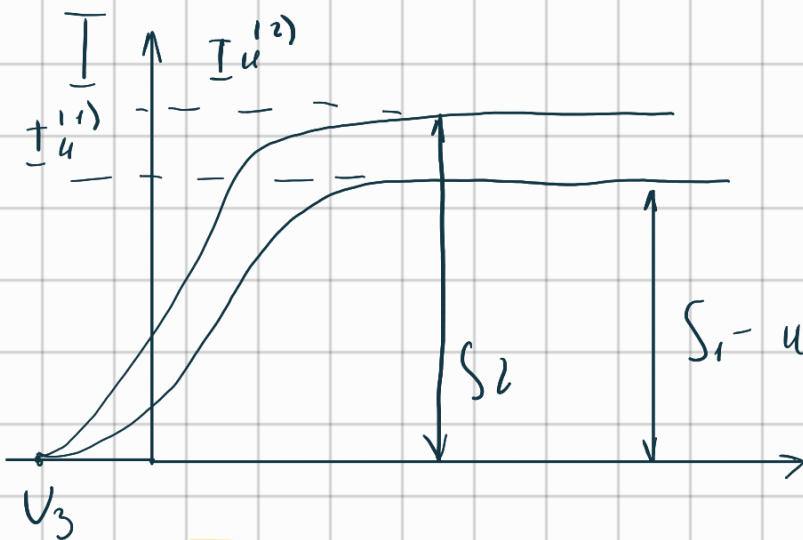
Подели на Анод U_3 . Меняем полярность напряжения

$$\frac{m v_m^2}{2} = e U_3 - \text{перестают долетать до Анода}$$

Законы фотоэффекта

1-й закон фотоэффекта

При постоянной частоте света фотоэлектр. ток прямо пропор. интенсивности светового потока



$$I_{нас} \sim S$$

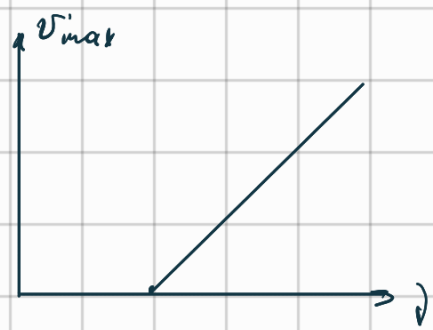
S_2 - интенсив. светового потока

$$S_2 > S_1$$

$$\nu = const$$

2-ой закон

ν_{max} нач. энергия зависит от частоты и не зависит от интенсивности



3-й закон

Для каждого вещества \exists красная граница фотоэффекта.

$$h\omega = E_{\text{мен}}^{\text{max}} + A_{\text{выл}}$$

$$h = \frac{h}{2\pi}$$

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{A_{\text{выл}}}{h}$$

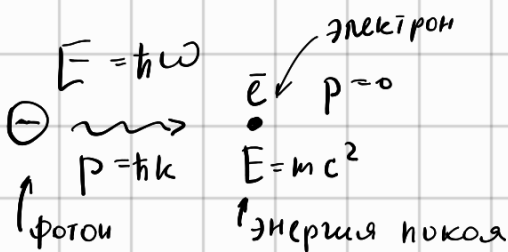
\exists эффект Комптона **Этот вопрос**

Длина рассеивания больше длины волны падающего

Хорошо наблюдается для $\lambda \sim 1\text{Å}$ $1\text{Å} = 10^{-10}\text{м}$
 $E \sim 0,01\text{МэВ}$ Анстрем

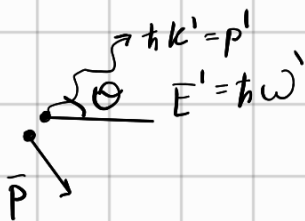
Фотон сталкивается с электронами

До



Для фотона $\frac{E}{c} = \frac{h\omega}{c} = h k = p$

После



Для e после взаимодействия

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} = m^2 v^2 = \frac{(m c^2)^2}{c^2} \cdot v^2 / c^2$$

E фотона большая, движение электронов релятивистское
используем формулы СТО

$$p^2 c^2 - E^2 = -m^2 c^4 \Rightarrow E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

↑ масса покоя

$$\exists \text{C} \exists \quad \hbar \omega + mc^2 = \hbar \omega' + c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \quad (1)$$

m - энергия электрона

m - энергия фотона

$\exists \text{C} \exists$

$$\hbar \bar{k} = \bar{p} + \hbar \bar{k}' \quad (2)$$

↑
импульс электрона

$$\text{Из (1)} \quad \sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \frac{\hbar \omega}{c} - \frac{\hbar \omega'}{c} + mc$$

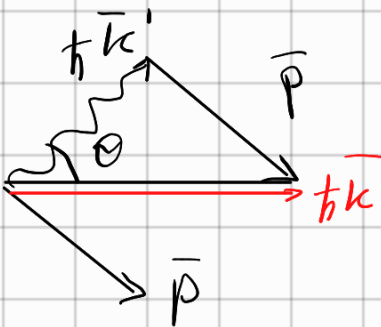
$$\sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \hbar (k - k') + mc$$

$$p^2 + m^2 c^2 = \hbar^2 (k^2 - 2kk' + k'^2) + 2\hbar mc(k - k') + m^2 c^2$$

Сокращается

$$p^2 = \hbar^2 (k^2 - 2kk' + k'^2) + 2\hbar mc(k - k') \quad (3)$$

$$\text{Из (2)} \quad \bar{p} = \hbar (\bar{k} - \bar{k}')$$



По теореме косинусов

$$p^2 = \hbar^2 (k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta) \quad (4)$$

↑ импульс электрона

$$(3) = (4)$$

$$\hbar^2 (k^2 - 2kk' + k'^2) + 2\hbar mc(k - k') = \hbar^2 (k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta)$$

$$-2\hbar kk' + 2\hbar mc(k - k') = -2\hbar kk' \cos \theta$$

$$-\hbar kk' + mc(k - k') = -\hbar kk' \cos \theta \quad / \cdot \frac{2\pi}{mckk'}$$

$$\left\{ k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \right\} = \frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi h}{mc}$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\Theta)$$

$\lambda_c = \frac{h}{mc}$ - Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\Theta) \text{ - ф-ла Комптона}$$

9 вопрос Волновые св-ва частицы.

$$E = h\nu$$

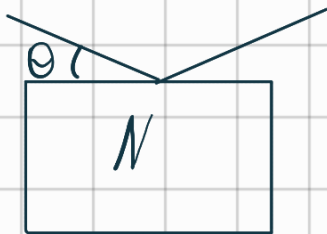
$$\left\{ \nu = \frac{c}{\lambda} \quad E = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \left\{ p = \frac{E}{c} \right\} = \frac{h}{p} \right.$$

$$\lambda_B = \frac{h}{p}$$

- Де Бройлевская длина волны

↑ для фотонов

Опыты Дэвисона-Джермера



$$2d \sin\Theta = k\lambda$$

1) электрон в атоме

$$v = 10^6 \text{ м/с} \quad m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \approx 10^{-30} \text{ кг}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{7 \cdot 10^{-34}}{10^6 \cdot 10^{-30}} \approx 10^{-9} \text{ м}$$

$d \sim 10^{-10} \text{ м}$ - размер атома

2) $n=12 \quad v=1 \text{ м/с}$

$$\lambda_B = \frac{7 \cdot 10^{-34}}{10^{-5} \cdot 1} = 7 \cdot 10^{-31} \text{ м}$$

у макротел волновые св-ва не проявл.
длина волны настолько мала, что волны нельзя обнаружить

3) \bar{e} в Электронно лучевой Трубке
 $U = 10^3 \text{ В}$

$$E_k = eU$$

$$E_k = \frac{m\delta^2}{2} = \frac{m^2\delta^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{p^2}{2m} = eU \Rightarrow p = \sqrt{2meU} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \sim 10^{-8} \text{ м}$$

Поведение микроскопических тел изучает квантовая механика

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

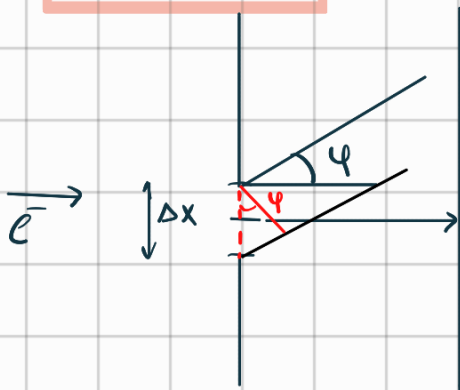
$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

то вопрос

↑ неопределенность проекции импульса

Микрочастицы не могут находиться в покое

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$



$$\sin \varphi = \frac{\lambda/2}{\Delta x/2} = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

$$p_x = p_0 \sin \varphi = p_0 \frac{\lambda}{\Delta x}$$

$$\Delta p_x \sim p_x \Rightarrow \Delta p_x = p \frac{\lambda}{\Delta x}$$

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x}$$

$\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \frac{h}{\Delta x} = h$ по порядку величины получили то же, что из соотн. неопределенностей

Если \bar{e} прошли через щель, то неопределенность координаты не больше Δx

Рассмотрим интерференцию Гююнга-Френеля

Квантовая механика

Состояние частицы описыв. волновой ф-цией

$$\Psi(x, y, z, t)$$

Физико-математический аппарат разработанный в квантовой механике позволяет проводя некоторые операции над $\Psi(x, y, z, t)$ получать полную информацию о движении микрочастицы

Волновое ур-ие Шрёдингера (временное)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

12 вопрос

↑
потенциальная энергия. Описывает силовое поле в котором находится частица

Рассуждения приводящие к ур-ию Шрёдингера
↑
равн. аксиома

Плоская волна

$$\left(\begin{array}{l} z = A \cos(\omega t - kx) \\ \psi = A e^{i(\omega t - kx)} \end{array} \right)$$

$$\Psi = A e^{-i(\omega t - kx)} = \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar} \\ E = \hbar \omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} \end{array} \right\} = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi$$

$$E = \frac{-1}{\Psi} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Rightarrow E = \frac{i\hbar}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{-1}{\hbar^2} p^2 \psi \Rightarrow p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + U$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U = \frac{i\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big| \cdot \psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U \cdot \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{— для одномерного случая}$$

Физ. смысл волновой ф-ии: $|\psi|^2$ — плотность вероятности нахождения частицы в данной точке пр-ва

$$|\psi|^2 = \frac{dP}{dV}$$

$$\int_{(-\infty)}^{(\infty)} |\psi|^2 dV = 1$$

$$|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^* \quad \leftarrow \text{комплексно сопряженное}$$

**возможно
|| вопрос**

Если неопределенности / длина волны Де Бройля:

- 1) больше характерных размеров задачи \Rightarrow квантовая
- 2) меньше ... \Rightarrow классическая

Условия которым должна удовн. ψ

- 1) $\int_{(-\infty)}^{(\infty)} |\psi|^2 dV = 1$ — условие нормировки

2) Конечность

2-5: Условие регулярности

3) однозначность

4) непрерывность

5) гладкость (нет бесконечных скачков потенц. энергии)

Физ. смысл только регулярные решения

13
вопрос

Ур-ие Шредингера для стационарных состояний

$U = U(x, y, z)$ - не зависит от времени

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

14 вопрос

Подставляем во временное ур-ие

$$-\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \nabla^2 \psi + U \cdot \psi e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = -\psi \cdot \frac{i\hbar i}{\hbar} E e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \quad / \cdot \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar} (E - U) \psi = 0$$

ур-ие Шредингера для стационарных состояний

Квантование энергии

В теории ДУ доказывается, что уравнение Шредингера для стаци. сост. имеет регулярное решение не при $\forall E$, а лишь при некоторых

Эти значения E или другой физ. величины наз. собственными значениями. Соотв. им решения - собств. ф-ями задачи

Совокупность собств. значений наз. спектром физ. величины

1) непрерывный (\forall значения) сплошной

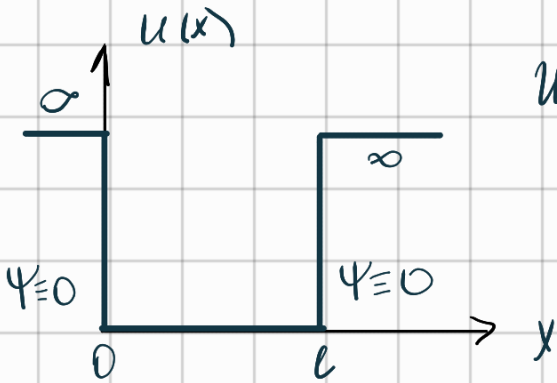
2) дискретный

14 вопрос

Т.о. квантование энергии следует из основных положений квант. механики без каких либо доп. предположений

15 вопрос

Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками



Исп. ур-ие Шредингера для ст. состояний

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

$\Psi = \Psi(x)$ внутри области от 0 до \$l\$ \$U=0\$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0$$

$$\left(\frac{2m}{\hbar^2} E = \omega^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \omega^2 \Psi = 0$$

$$\Psi = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

Поскольку \$\Psi\$ непрерывная \$\Rightarrow\$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Psi(l) = 0 \Rightarrow B \sin \omega l = 0$$

$$\sin \omega l = 0 \Rightarrow \omega l = \pi n, n \in \mathbb{N}$$

↑
только полож.

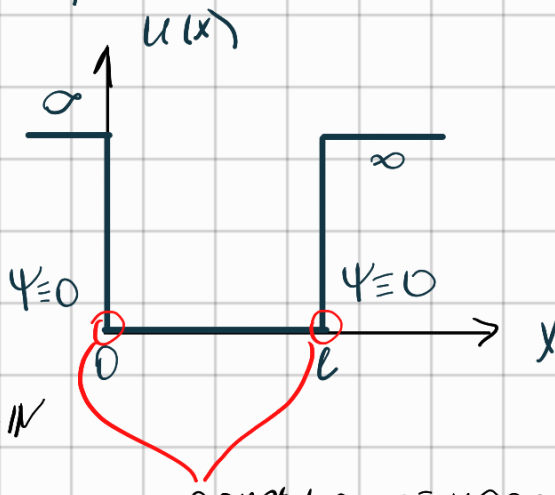
нельзя взять \$n=0\$ т.к. \$\omega=0 \Rightarrow\$ частицы нет

$$\omega = \frac{\pi n}{l} \Rightarrow \Psi = B \sin \frac{\pi n}{l} x \text{ - регулярное решение}$$

Находим \$B\$ из условия нормировки

$$\int_0^l B^2 \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = 1$$

$$B^2 \frac{1}{2} \cdot l = 1 \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

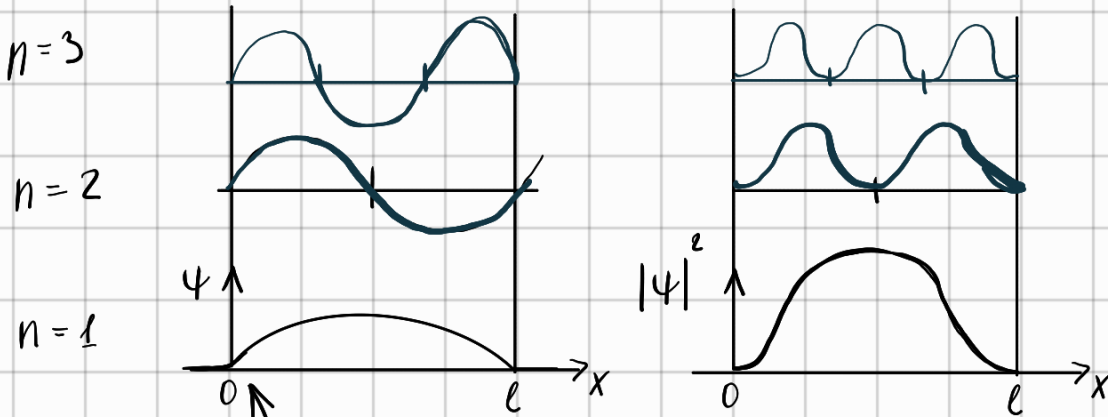


$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\omega^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m l^2} \text{ - дискретность}$$

↑ может иметь только

$$E_{\min} = \{n=1\} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} \text{ такую энергию}$$



излом. в этих точках, где нарушается гладкость, имеют место бесконечные скачки потенциальной энергии

Основное состояние - состояние с наименьшей энергией ($n=1$)

Возбужденное состояние - все остальные

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} ((n+1)^2 - n^2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} (n^2 + 2n + 1 - n^2)$$

$$\{ \text{Для } n \gg 1 \text{ пренебрегаем } 1 \} \Rightarrow \Delta E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n}{m l^2}$$

↑ расстояние между энерг. уровнями

Принцип суперпозиции квантовых состояний **17 вопрос**
 является следствием линейности ур-я Шредингера

Если частица может находиться в состоянии Ψ_1, Ψ_2
 то она может находиться в состоянии $\Psi = \Psi_1 c_1 + \Psi_2 c_2$

$|c_1|^2$ - вероятность того, что при измерении будет обнаружена в состоянии ψ_1

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

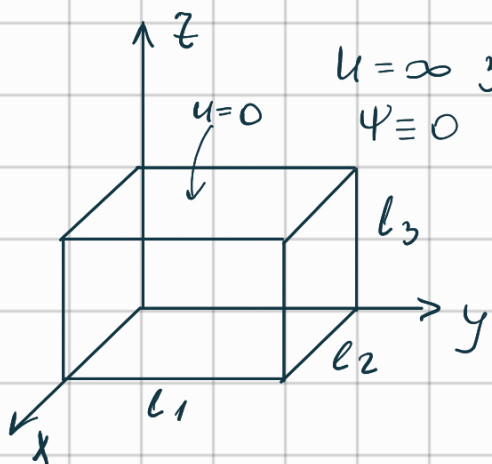
Пусть в состоянии ψ_1 некоторая физ. величина имеет значение a_1 . А в состоянии ψ_2 - a_2

Если мы начали мерить, то значение a_1 получим с вероятностью $|c_1|^2$, а a_2 - $|c_2|^2$

$$\langle a \rangle = |c_1|^2 a_1 + |c_2|^2 a_2$$

16 Вопрос

Частица в 3-х мерном прямоугольном ящике с абс. непроницаемыми стенками



$u = \infty$ за пределами

$\psi = 0$

Внутри

$$\Delta^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - u) \psi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$$

Решаем методом Фурье

$$\Psi(x, y, z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$$

$$gh \cdot f''_{xx}(x) + fh \cdot g''_{yy} + fg \cdot h''_{zz} + \frac{2mE}{\hbar^2} fgh = 0 \quad /: fgh$$

$$\frac{f''_{xx}}{f} + \frac{g''_{yy}}{g} + \frac{h''_{zz}}{h} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

Справедливо при $y = \text{const}$
 $z = \text{const}$

$$\frac{f''}{f} = -\omega_1^2 \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 = \frac{g''_{ys}}{g} + \frac{h''_{zz}}{h} + \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \frac{g''}{g} = -\omega_2^2; \quad \frac{h''}{h} = -\omega_3^2 \end{array} \right. \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 = \text{const}$$

$$f'' = -\omega_1^2 f$$

$$f'' + \omega_1^2 f = 0$$

$$\lambda^2 + \omega_1^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\omega_1$$

$$f = C_1 e^{i\omega_1 x} + C_2 e^{-i\omega_1 x} \text{ - решение D} \text{y}$$

$$f(x) = A_1 \cos \omega_1 x + B_1 \sin \omega_1 x$$

из условия регулярности
 $f(0) = 0$ $f(l_1) = 0$

$$A_1 = 0$$

$$B_1 \sin \omega_1 l_1 = 0$$

$$\omega_1 l_1 = \pi n_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi n_1}{l_1} \quad n_1 \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = B_1 \sin \frac{\pi n_1 x}{l_1}$$

$$\omega_2 l_2 = \pi n_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\pi n_2}{l_2}$$

$$\omega_3 = \frac{\pi n_3}{l_3}$$

$$g(y) = B_2 \sin \frac{\pi n_2 y}{l_2}$$

$$h(z) = B_3 \sin \frac{\pi n_3 z}{l_3}$$

$$\Psi = fgh$$

$$\Psi(x, y, z) = B_1 B_2 B_3 \sin \frac{\pi n_1 x}{l_1} \cdot \sin \frac{\pi n_2 y}{l_2} \cdot \sin \frac{\pi n_3 z}{l_3}$$

из условия нормировки

$$\int_0^{l_3} dz \int_0^{l_2} dy \int_0^{l_1} dx (B_1 B_2 B_3 \sin \frac{\pi n_1 x}{l_1} \cdot \sin \frac{\pi n_2 y}{l_2} \cdot \sin \frac{\pi n_3 z}{l_3})^2 dx = 1$$

$$B_1 B_2 B_3 = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \cdot \sqrt{\frac{2}{l_2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{l_3}}$$

$$\Psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin \frac{\pi n_1 x}{l_1} \cdot \sin \frac{\pi n_2 y}{l_2} \cdot \sin \frac{\pi n_3 z}{l_3}$$

$$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$$

Подставим $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в $\frac{f''_{xx}}{f} + \frac{g''_{yy}}{g} + \frac{h''_{zz}}{h} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$

$$-\frac{\pi^2 n_1^2}{l_1^2} - \frac{\pi^2 n_2^2}{l_2^2} - \frac{\pi^2 n_3^2}{l_3^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right)$$

↑ только такие энергии могут принимать в ящике

$$E_{\min} = E_{111} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \right) - \text{энергия основного состояния}$$

Случай $l_1 = l_2 = l_3 = l$ куб

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Уровни энергии	n_1, n_2, n_3	E	
1	1 1 1	$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} \cdot 3$	не вырожден
2	1 1 2 1 2 1 2 1 1	$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} \cdot 6$	$r=3$
3	1 2 2 2 2 1 2 1 2	$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} \cdot 9$	$r=3$
4	1 1 3 1 3 1 3 1 1	$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} \cdot 11$	$r=3$
5	2 2 2	$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m l^2} \cdot 12$	не вырожден

6	1 2 3	$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2me^2} \cdot 14$	$\Gamma = 6$
	3 1 2		
	2 3 1		
	3 2 1		
	1 3 2		

Спросить про повтор 231?

Уровень энергии наз. вырожденным если данному значению энергии соответствует несколько разных Ψ -ф-ий (состояний, наборов квантовых чисел)

Γ - кратность вырождения - число состояний

Гармонический осциллятор **18 вопрос**

любая система которая может совершать гармонические колебания

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar} (E - U) \Psi = 0$$

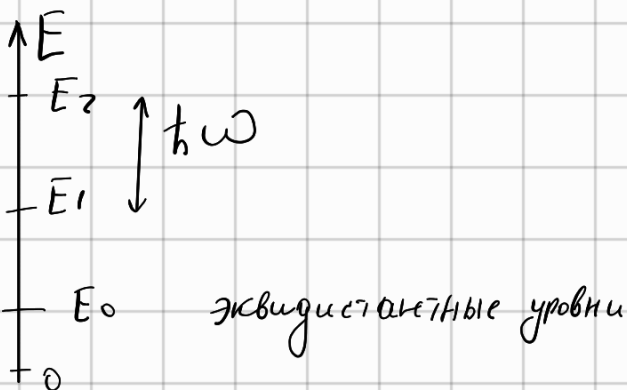
одномерный случай $U = \frac{\kappa x^2}{2}$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar} \left(E - \frac{\kappa x^2}{2} \right) \Psi = 0$$

решается с помощью Полиномы Чебышева - Эрмита

$$E_n = \frac{\hbar \omega}{2} + n \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$



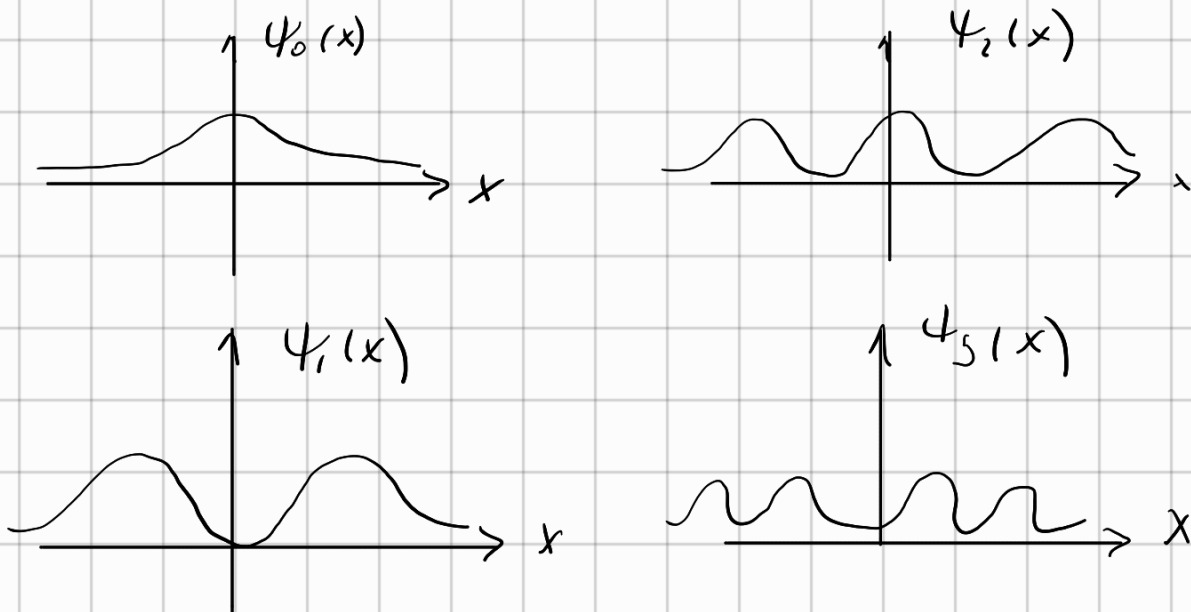
Правило отбора: как может переходить из одного состояния в другой

$\Delta n = \pm 1$ - не больше этого значения

$$n=0 \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_0}}$$

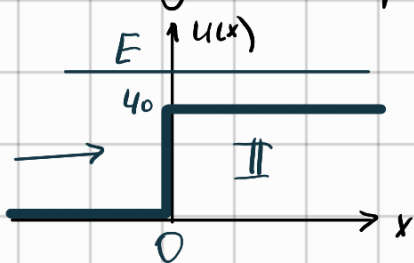
$$n=1 \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0 \sqrt{\pi}}} \frac{2x}{x_0} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$

$$n=2 \quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0 \sqrt{\pi}}} \left(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2 \right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$



Потенциальный порог

1) Низкий порог. $U < E$ **19601 POC**



Коэфф отражение - отношение вероятности

обнаружения в отраженном потоке к вероятности

обнаружения в падающем потоке. R

$$I. \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{m}{\hbar^2} E \psi_1 = 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$$

$$\Psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$$

$$\text{II} \quad \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \Psi_2 = 0$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)$$

$$\Psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$$

Переходим к временному ур-е Шредингера

$$\text{III} \quad \Psi_1(x, t) = A_1 e^{-i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{-i(\omega t + k_1 x)}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi \hbar k}{2\pi} =$$

$$\Rightarrow p = \hbar k$$

$$\text{III} \quad \Psi_2(x, t) = A_2 e^{-i(\omega t - k_2 x)} + B_2 e^{-i(\omega t + k_2 x)}$$

направо $\rightarrow p_x = \hbar k_1$ ← отразивш.
 ← $\leftarrow p_x = \hbar k_1$
 направо $\rightarrow p_x = \hbar k_2$ ← не интересно $\Rightarrow B_2 = 0$
 ← $\leftarrow p_x = \hbar k_2$
 прошедшие
 Полная механическая такая же $\Rightarrow \omega$ такая же

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \text{ — непрерывности}$$

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (1)$$

$$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0) \text{ — гладкость}$$

$$A_1 i k_1 - i k_1 B_1 = i k_2 A_2 \quad (2)$$

вероятность

$$|B_1 e^{-ik_1 x}|^2 = B_1 e^{-ik_1 x} \cdot B_1^* e^{ik_1 x} = B_1 \cdot B_1^* = |B_1|^2$$

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

$$(1) \rightarrow (2)$$

$$k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_1 + k_2 B_1$$

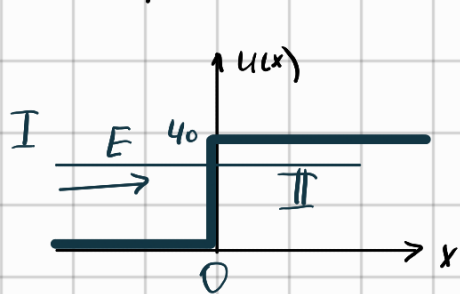
$$A_1 (k_1 - k_2) = B_1 (k_1 + k_2)$$

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} - \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)}}{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} + \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)}} \right)^2$$

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}} \right)^2 \text{ коэфф. отраж. при низком}$$

$U_0 = 0 \Rightarrow R = 0$ не от чего отразить
это наз. надбарьерное отражение

2) Высокий порог **до вопрос**



$$\text{I} \quad \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0$$

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$$

$$\text{II} \quad \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2} \psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \psi_2 = 0$$

$$\psi'' - \alpha^2 \psi = 0$$

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \quad \lambda = \pm \alpha$$

$$\psi_2 = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}$$

$A_2 = 0$
неудобн. усл. регулярности

конечность. не может быть бесконечной

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \text{ непрерывность}$$

$$A_1 + B_1 = B_2$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -\alpha B_2$$

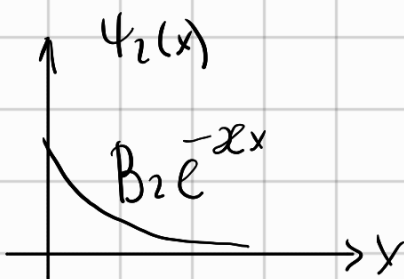
$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -\alpha A_1 - \alpha B_1$$

$$A_1(\alpha + ik_1) = B_1(-\alpha + ik_1)$$

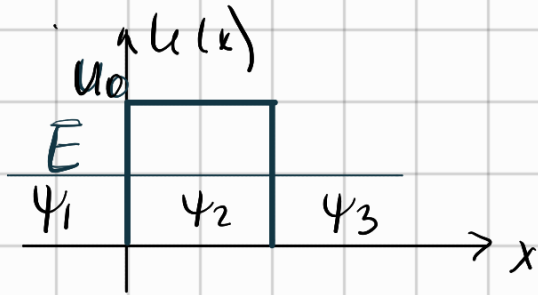
$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{(\alpha + ik_1)^2}{(\alpha - ik_1)^2}$$

$$\left\{ |a + ib|^2 = (a + ib)(a + ib)^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \right\}$$

$$R = \frac{\alpha^2 + k_1^2}{\alpha^2 + k_1^2} = 1$$



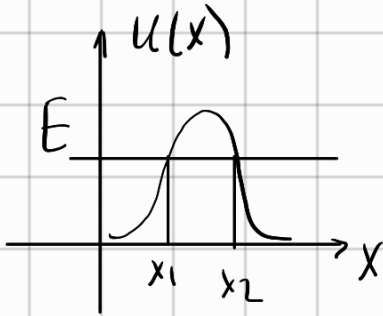
Проконденсация частицы через потенциальный барьер **21 вопрос**



$$\psi_2 = \beta_2 e^{-\frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}x}{\hbar}} \quad \text{— решение}$$

Кэфф проконденсация

$$D = \frac{|\psi_{II}|^2}{|\psi_{I0}|^2} = e^{-2e \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}}$$

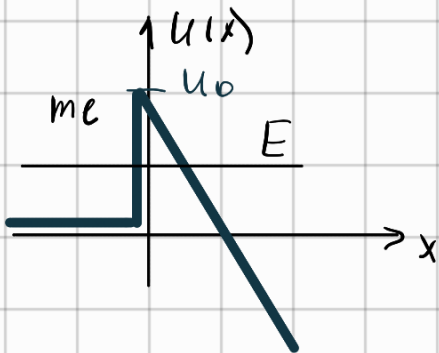


$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx}$$

Пример **22 вопрос**

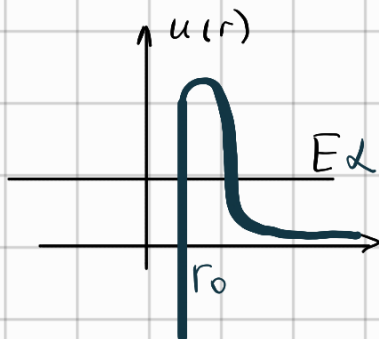
1) холодная эмиссия электронов из металла
 ↙ напряж. Эл. поля

$$U(x) = U_0 - eEx$$

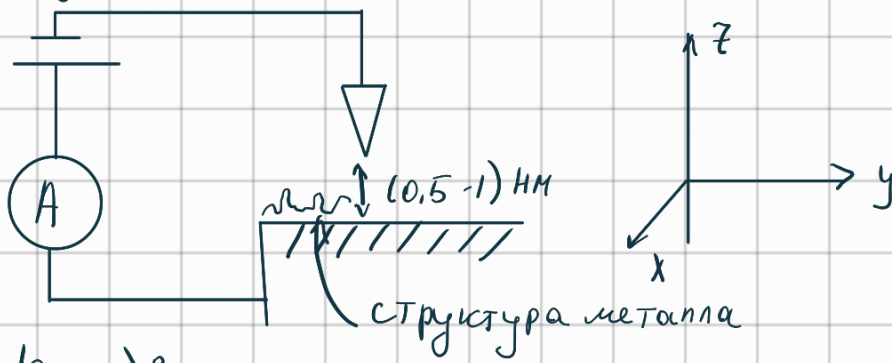


2) α -распад ${}^4_2\text{He}$

Вокруг ядра энергетический барьер



3) Туннельный микроскоп



$$U \sim (0,1-1) \text{ В}$$

$$I \sim (1-10)$$

$$\Delta z \sim 10^{-3} \text{ нм}$$

$$\Delta x, \Delta y \sim 10^{-1} \text{ нм}$$

ведём иглу на постоянной высоте, меняется сила тока. (по идее ток не должен возникать, но за счёт туннельного эффекта возникает)

1) режим постоянной высоты

2) режим постоянной силы тока

Поступаты квантовой механики 23601рх

1) Состояние частицы опис. волновой ф-цией

$$\Psi(x, y, z, t)$$

2) Каждой физ. величине в квантовой механике соотв. Эрмитов оператор. Соотношение между операторами такое же, что и соотн. между соотв. им физ. величинами в классической механике

3) В результате измерения физ. величины могут быть получены только те зн-ия, которые явл. соотв. значениями оператора \hat{A} этой физ. величины. Волновые ф-ции состояний, в которых величина имеет опред. значение, явл. соотв. ф-циями её оператора

$\hat{A}\psi = a\psi$. В результате действия оператора на ф-ию получаем эту же ф-ию, то это ф-ия явл. собственной ф-ией. a коэфф a - собственное значение

24

$$4) \langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dV$$

Операторы

28

$\hat{x} = x$ работаем в коорд. представлении

$$\hat{x}\psi = x\psi$$

$$\hat{r} = \hat{x}\hat{i} + \hat{y}\hat{j} + \hat{z}\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

$$U = \hat{U} \quad \text{т.к. ф-ия координат}$$

Гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\hat{H} \psi = \hat{E} \psi$$

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

В сферических коорд

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

33

$$\Delta = \nabla^2 = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)}_{\text{радиальная часть лапласиана}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]}_{\Delta_{\theta, \varphi} - \text{угловая часть лапласиана}}$$

$$\hat{L} = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$$

Операторы физ. величин явл. линейными

$$\hat{A}(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1 \hat{A} \psi_1 + c_2 \hat{A} \psi_2$$

Скалярным произведением ф-ий ψ и ψ наз:

$$\int_{(\infty)} \psi^* \psi dV$$

24

Оператор \hat{A}^+ наз эрмит. сопряженным по отношению к оператору \hat{A} :

24 и 25

$$\int_{(\infty)} (\hat{A}^+ \psi)^* \psi dV = \int_{(\infty)} \psi^* \hat{A} \psi dV$$

25

Эрмитов оператор-оператор, если $\hat{A}^+ = \hat{A}$

Совпадает со своим эрмитово сопряге.

Все операторы наблюдаемых физ. величин явл эрмитовы

Докажем, что собств. зн-ия эрмитовых операторов явл действительными

25

$$\int_{(\infty)} \psi^* \hat{A} \psi dV = \int_{(\infty)} (\hat{A}^+ \psi)^* \psi dV \text{ но } \hat{A} \text{ эрмитов } \Rightarrow \int_{(\infty)} \psi^* \hat{A} \psi dV = \int_{(\infty)} (\hat{A} \psi)^* \psi dV$$

$$\int \psi^* a \psi dV = \int a^* \psi^* \psi dV$$

собств. зн-ия
собств. ф-ии

$$a \int \psi^* \psi dV = a^* \int \psi^* \psi dV$$

$a = a^* \Rightarrow$ верно для действ. чисел.

Совокупность собств. зн-ий оператора \hat{A} наз. **Спектр оператора**
(спектр физ. величины)

Спектр 26

дискретный

есть только некоторые

значения и между ними

нет значений

непрерывный (сплошной)

принимает \forall значения

Если λ -ому собств. зн-ию соотв несколько разных собств ф-ий
данное зн-ие наз вырожденным, а число этих ф-ий наз. крат. вырождения

27

Докажем ортогональность собствен. ф-ий Эрмитовых операторов

Ψ_i, Ψ_j - собствен. ф-ии оператора \hat{A} , скалярное произв.

$$\hat{A}\Psi_i = a_i\Psi_i \quad \hat{A}\Psi_j = a_j\Psi_j \quad \int \Psi_i^* \hat{A}\Psi_j dV = \int (\hat{A}\Psi_i)^* \Psi_j dV =$$

$$\Rightarrow \int \Psi_i^* a_j \Psi_j dV = \int a_i^* \Psi_i^* \Psi_j dV \quad \left. \begin{array}{l} \text{явл. собствен.} \\ \Rightarrow a = a^* \end{array} \right\}$$

$$a_j \int \Psi_i^* \Psi_j dV = a_i \int \Psi_i^* \Psi_j dV$$

$$(a_j - a_i) \int \Psi_i^* \Psi_j dV = 0$$

$$\text{Если } i \neq j \quad \int \Psi_i^* \Psi_j dV = 0$$

↑ скалярное произведение = 0 ⇒ ортогональны

Символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

В следствие этой ортогональности, в Ψ состоянии Ψ можно разложить по собствен. ф-иям оператора на бл. физ. величины

$$\Psi = \sum_i c_i \Psi_i \quad c_i = \int \Psi_i^* \Psi dV$$

↑ собствен. ф-ия

$$\text{Рассмотрим скаляр. произв.} \quad \int \Psi_j^* \Psi dV = \int \Psi_j^* \sum_i c_i \Psi_i dV = \sum_i \int c_i \Psi_j^* \Psi_i dV =$$

$$= \sum_i c_i \int \Psi_j^* \Psi_i dV = \sum_i c_i \delta_{ij} = c_j \quad ; \quad c_j = \int \Psi_j^* \Psi dV$$

коэфф c_j явл. скалярными произв Ψ и Ψ_j^* . Можно разложить

Спектры операторов наблюдаемых физ. величин

$\hat{x} \Psi = x \Psi$ Спектр непрерывный, x - любое
(при измерении можем получить \forall зн-ие)

$\hat{p}_x \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi$ Спектр непрерывный, проекция может быть \forall

$\hat{H} \Psi = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi}_{\text{Кин}} + \underbrace{U \Psi}_{\text{Потен}}$ Спектр может быть дискретным, а может быть непрерывным в зависимости от ф-ии $U(x, y, z)$

U частицы в яме дискретные энергии

$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \leftarrow$ угон вокруг оси z

Если Ψ ф-ия - собственная ф-ия оператора $\Rightarrow \hat{L}_z = L_z \Psi$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi}{d\varphi} = L_z \Psi$$

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = \frac{i L_z}{\hbar} d\varphi$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\Psi}{\Psi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{i L_z}{\hbar} d\varphi$$

$$\ln \left| \frac{\Psi}{\Psi_0} \right| = \frac{i L_z}{\hbar} \varphi$$

$$\Psi = \Psi_0 e^{\frac{i L_z}{\hbar} \varphi}$$

Решив это ур-ие мы нашли собственную ф-ию

Проекция L на ось z имеет определенное зн-ие

Найдем собственные значения

из однозначности $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$

Распишем по формуле Эйлера

$\psi = \psi_0 \left(\cos \frac{L_z}{\hbar} \varphi + i \sin \frac{L_z}{\hbar} \varphi \right)$. Докажем для \cos , для \sin тоже самое

$\cos \left(\frac{L_z}{\hbar} (\varphi + 2\pi) \right) = \cos \frac{L_z \varphi}{\hbar}$ - из периодичности ψ

$\cos \left(\frac{L_z \varphi}{\hbar} + 2\pi n \right) = \cos \left(\frac{L_z \varphi}{\hbar} \right)$ - из периодичности \cos

$$\frac{L_z}{\hbar} \varphi + \frac{L_z}{\hbar} 2\pi = \frac{L_z \varphi}{\hbar} + 2\pi n$$

$$\frac{L_z}{\hbar} 2\pi = 2\pi n \Rightarrow L_z = n\hbar$$
 - Квантование момента импульса

Момент импульса относительно оси может иметь только дискретные значения равные целому числу \hbar (n - целое (отриц. тоже))

Спектр дискретный

Коммутатор 29

$$[\hat{A}, \hat{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]\psi = \hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi$$

В одном и том же квантовом состоянии могут быть одновременно точно измерены такие и только такие физ. величины, коммутатор операторов которых = 0.

Пример x и p_x не могут

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \psi = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (x \psi) = \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \left(\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{\hbar \psi}{i} \neq 0$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] \psi = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} (x \psi) = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

Могут одновременно точно измерены

Докажем, что если $[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \Rightarrow$ одновременно измеримы

Пусть a, b измерены одновременно

Если физ. величины одновременно измеримы, их операторы имеют одни и те же собственные ф-ция

$$\hat{A} \psi = a \psi \quad \hat{B} \psi = b \psi$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \hat{B} \psi - \hat{B} \hat{A} \psi = \hat{A} b \psi - \hat{B} a \psi = \{ \text{линейны операторы} \} =$$

$$b \hat{A} \psi - a \hat{B} \psi = b a \psi - a b \psi = 0, \text{ и т.д.}$$

Докажем обратное. Пусть $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

$$\hat{A} \hat{B} \psi - \hat{B} \hat{A} \psi = 0 \Rightarrow \hat{A} \hat{B} \psi = \hat{B} \hat{A} \psi$$

Пусть ψ - собств. ф-ция оператора \hat{A}

$$\hat{A}(\hat{B} \psi) = \hat{B}(\hat{A} \psi)$$

$$\hat{A}(\hat{B} \psi) = \hat{B}(a \psi)$$

$$\hat{A}(\hat{B} \psi) = a(\hat{B} \psi)$$

$\hat{B} \psi$ - собств. ф-ция оператора \hat{A}

Если нет вырождения, то ф-ии отличаются лишь на const $\Rightarrow \psi$ - собственная ф-ия $\hat{B} \Rightarrow$ величина b точно измерима, когда измерима величина a

Среднее зн-ие наблюд. физ. величины 30

Если физ. величина в данном состоянии имеет опред зн-ие (если многократно повторять один и тот же опыт, в результате которого частица оказывается в одном и том же состоянии, получается одно и то же зн-ие) то всё ясно"

Если не ясно $\langle a \rangle = \int_{(-\infty)}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dV$

D-во:

Известна ψ ф-ия. Раскладываем её по собственным ф-иям оператора физ. величины, и представляем, что частица находится в суперпозиции состояний в соотв каждой из этой ψ -ф-ии

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \sum_i |c_i|^2 a_i = \sum_i c_i^* c_i a_i = \left\{ c_i = \int \psi_i^* \psi dV \right\} = \sum_i c_i^* \int \psi_i^* a_i \psi dV = \\ &= \int_{(-\infty)}^{\infty} \left(\sum_i c_i^* a_i \psi_i^* \right) \psi dV = \int_{(-\infty)}^{\infty} \left(\sum_i c_i^* \hat{A} \psi_i \right) \psi dV = \int_{(-\infty)}^{\infty} \left(\hat{A} \left(\sum_i c_i \psi_i \right) \right)^* \psi dV = \end{aligned}$$

↑
результат действия оператора

← непонятое
переход

$$\int (\hat{A} \psi)^* \psi dV$$

$$\Delta a b = \frac{1}{2} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$$

↑

Неопределённости

Так можно оценить произведение неопред.

Элементы квантовой теории атома (на примере атома водорода)

$m_p = 1840 m_e \Rightarrow$ можно рассматривать атом водорода в приближении неподвижного ядра

$$U = q\varphi = \frac{-e e}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

\uparrow потенциальная энергия в поле ядра

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + U = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_r - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \Delta_{\theta, \varphi} + U$$

\uparrow радиальная часть лапласиана
 \nwarrow угловая часть лапласиана

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_r - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\theta, \varphi} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

33

Чтобы узнать могут ли у электрона в атоме иметь точные значения полной мех энергии и квадрат момента импульса

Нужно $[\hat{H}, \hat{L}^2]$ $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$ $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$

Если коммутатор 2-х операторов = 0, эти операторы коммутируют

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_r, -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi} \right] + \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}, -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi} \right] + \left[\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi} \right]$$

$$\textcircled{1} \frac{\hbar^4}{2m} (\Delta_r (\Delta_{\theta, \varphi} \psi) - \Delta_{\theta, \varphi} \Delta_r \psi) = 0$$

Порядок частных производных можно менять

$$\textcircled{2} \text{ Если вынести } \frac{\hbar^4}{2m} \frac{1}{r} \text{ то получим одно и то же } \Rightarrow \text{ тоже } = 0$$

$$\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} (-\hbar^2) \left(\frac{1}{r} \Delta_{\theta, \varphi} \Psi - \Delta_{\theta, \varphi} \left(\frac{1}{r} \Psi \right) \right) = 0$$

↑ можно вынести

Полная механическая энергия Гамильтониана равно 0 если потенциальная энергия не зависит от углов (θ, φ)

$$\Rightarrow [\hat{H}, \hat{L}^2] = 0. \text{ одновременно точно измеримы } E \text{ и } L^2$$

Состояние с точными зн-ия энергии - стационарное состояние в атоме \Rightarrow в ψ стационар. состоянии \bar{e} имеет неизм. со временем опред значения L^2

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

34

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0$$

↑ ур-ие Шредингера в атоме водорода

Решение этого ур-ия

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \zeta(\theta, \varphi) \leftarrow \text{угловая } \Psi \text{ ф-ия}$$

↑ радиальная Ψ ф-ия

Подставляем это решение в ур-ие

$$\zeta(\theta, \varphi) \Delta_r R(r) + \frac{1}{r^2} R(r) \cdot \Delta_{\theta, \varphi} \zeta(\theta, \varphi) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R \zeta = 0 \quad /: R \zeta$$

$$\frac{\Delta_r R(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Delta_{\theta, \varphi} \zeta(\theta, \varphi)}{\zeta(\theta, \varphi)} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = 0$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\Delta_n R}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Delta_{\theta, \varphi} \zeta}{\zeta} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -E$$

Ур-ие разделяется на 2 ур-ие для радиальной и угловой ϕ -ии

1) Энергия

Имеет решение при $E \geq 0$ - при v (электрон вне атома)

$E < 0$ решение существует при дискретных зн-ии энергии

$$E_n = \frac{-me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow E_n = -13,6 \text{ эВ} \cdot \frac{1}{n^2}$$

« $E_1 = -13,6 \text{ эВ}$ »

$n = 1, 2, 3, \dots$ - главное квантовое число **35**

2) Квадрат мех момента \bar{L}^2

$$\hat{L}^2 \psi = \bar{L}^2 \psi \quad \psi = R(r) \zeta(\theta, \varphi)$$

$$\hat{L}^2 \zeta(\theta, \varphi) = \bar{L}^2 \zeta(\theta, \varphi) - R(r) \text{ выносится как const и сокращается}$$

$$\bar{L}^2 = \hbar^2 l(l+1) \text{ - собств. зн-ия}$$

Регулярное решение \exists при $l=0, 1, 2, \dots$

36 l - орбитально (или мутальное) квантовое число. Определяет \bar{L}^2

$n \setminus l$	0	1	2	3
1	1S	-	-	-
2	2S	2P		
3	3S	3P	3D	
4	4S	4P	4D	4f

При $l=0$ \bar{e} не вращается вокруг ядра и не падает на него

3) Проекция мех момента на выделенное направление L_z

$$\hat{L}_z = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} ; \hat{L}_z \psi = L_z \psi$$

36

$$L_z = m \hbar$$

$$m = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

$$|L| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

$$m\hbar \leq \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

↑ магнитное Квантовое число

$$g = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \underbrace{1+3+\dots+2n-1}_n = n \frac{1}{2} (1+2n-1) = n^2 \Rightarrow g = n^2$$

↑ кратность вырождений

↑ без учета спина

$$g = \frac{r}{a}$$

Ψ_{n, l, m, m_s}

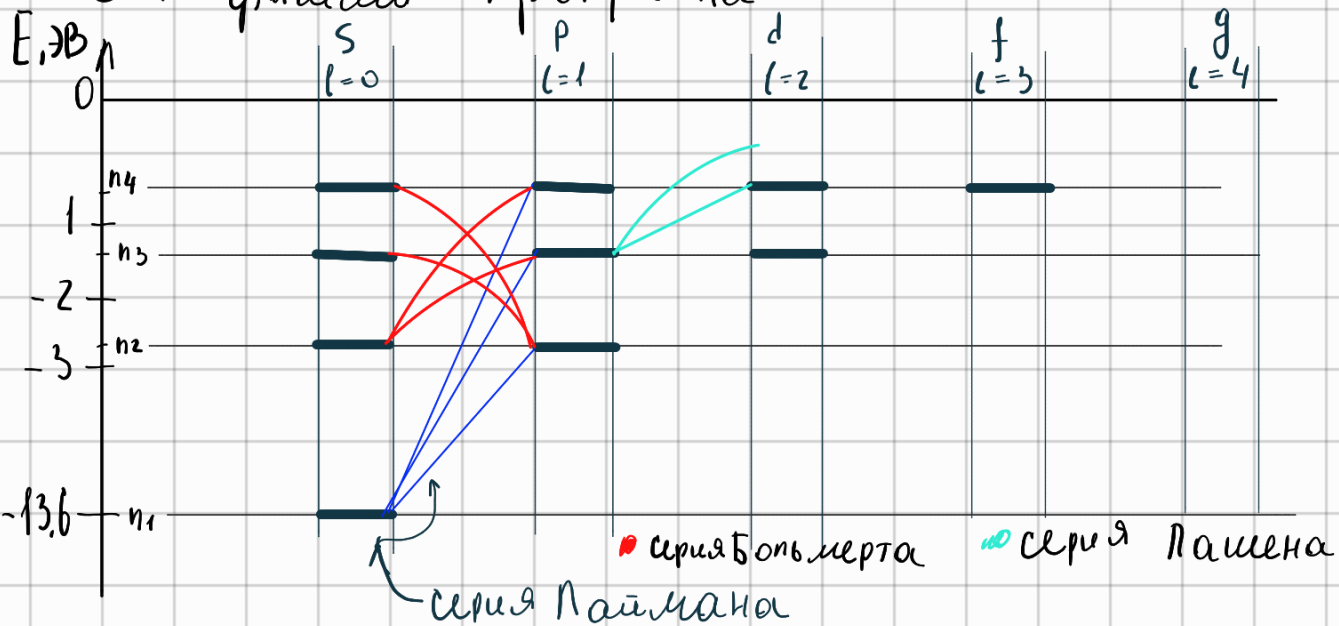
n	l	m	$\Psi_{n, l, m}$
1	0	0	$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} e^{-r/a}$
2	0	0	$\Psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} (2 - r/a) e^{-r/2a}$
2	1	0	$\Psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} r e^{-r/2a} \cos\theta$
2	1	+	$\Psi_{21+} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} r e^{-r/2a} \sin\theta e^{i\varphi}$
2	1	-	$\Psi_{21-} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} r e^{-r/2a} \sin\theta e^{-i\varphi}$

Наверно 35

37

спожено. Спросить

Диаграмма Гроуриана



Правило отбора: \bar{e} может переходить поглощая или испуская фотон из ψ состояния в ψ' , а только так, чтобы $\Delta l \pm 1$

$$\hbar \omega = \frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m \quad , \text{ или } \psi \text{ и } \psi' \text{ не одно}$$

$$\omega = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad - \text{ Формула Балмера - Ридберга}$$

↑ постоянная Ридберга

$L_d = 21,6 \text{ нм}$ - линия Лайма d из $2p$ в $1s$

$L_\infty = 91,15 \text{ нм}$ - предел Лайма

Уширение спектральных линий

естественное уширение
 $\Delta E \tau \sim \hbar$

доплеровское

Чем меньше τ находится в возбужденном состоянии тем больше неопределенность энергии, тем больше разброс длин волн

Стин **39**

$$S = \frac{l}{\hbar}$$

$$L_s^2 = \hbar^2 S(S+1) \quad - \text{ собственная момент импульса}$$

$$|L_s| = \hbar \sqrt{S(S+1)} = \frac{\hbar \sqrt{3}}{2}$$

$$L_{z_s} = m_s \hbar$$

Магнитное спиновое квантовое число

$$m_s = -s, \dots, +s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$L_{z_s} = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

Магнитный момент $\bar{\mu}$

38

Орбитальный

$\bar{\mu} = I \bar{S}$ — площадь витка с током

$$\mu = \left(\frac{e}{T} \right) \pi r^2 = \frac{e m v}{2 \pi r m} \pi r^2$$

↑ период

$$\mu = \frac{e m v r}{2 m} = \frac{e L}{2 m}$$

$$\frac{\mu}{L} = \gamma = \frac{e}{2 m}$$

$$\mu_L = \left(\frac{e}{2 m} \hbar \right) \sqrt{l(l+1)}$$

Магнетон Бора

$$\mu_{zL} = - \frac{e}{2 m} \hbar m_l$$

магн. квант. число

↑ m_l

$$\mu_{zL} = - \mu_B m_l$$

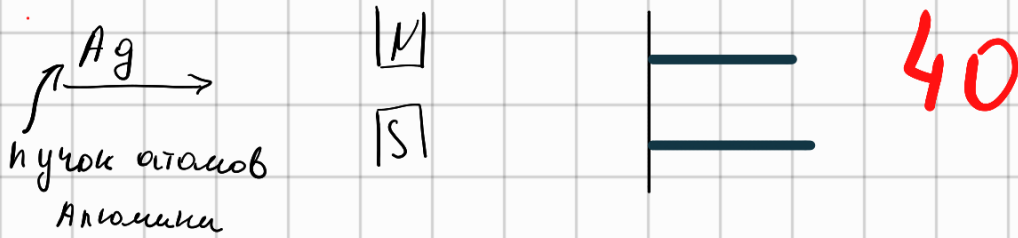
2) Собств

$$\mu_S = \frac{e}{m} \hbar \sqrt{s(s+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mu_S = 2 \mu_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \mu_B$$

$$\mu_{sz} = -2\mu_B \left(\pm \frac{1}{2} \right) = \mp \mu_B$$

? Опыт Штерна и Гернаха ? ?



$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \mu_z$$

В чем суть

? Эффект Зеемана ? ?

расщепление спектральных линий в магнитном поле

$$W_{\text{взаимод}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Энергия ионизации - какая нужна энергия, чтобы оторвать электрон от атома

$$E_{\text{ион}} = |E_1|$$

↑ основн. сост.

? Ансамбль - совокупность одинаков. коп. - 60 цел. - 70
которые могут быть иде-то ? ?

30

Вектор состояния ψ - ф-ция в
различных представлениях

31

$|\psi\rangle$ - вектор состояния (Кет вектор) - вектор содержит всю информацию о состоянии частицы

$\langle\psi|$ - Со вектор состояния (Бра вектор) - вектор, при умножении на кет вектор получается комплексное число

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

ψ -функ в x -представлении

$$\psi(x, y, z) = \langle x, y, z | \psi \rangle$$

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle$$

$$\langle a \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Спонтанное и вынужденное
излучение лазера

41

$$\hbar\omega = E_2 - E_1$$

$U, \omega, T, T - \text{const}$

N_1, N_2 - заселенности энерг. уровней

По Больцману
$$N_2 = N_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

в возб. состоянии атом находится $\tau \sim 10^{-9} \text{с}$,
потом он переходит в основное самопроизвольное.
Такое излучение наз. спонт.

Спонтанное излучение - излучение, при котором \bar{e} , находясь в возб. состоянии, переходят в основное самопроизвольно

$\bar{z}_{21} \sim$ заселенности энергии

$$\frac{N_2}{N_1} \frac{E_2}{E_1} \quad \bar{z}_{21} = AN_2$$

\bar{z}_{21} - число переходов вынужд. излуч. за ед. времени

$\bar{z}_{12} = B_{12} N_1 U_{\omega, T}$. Нужна энергия для перехода $\frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{-E_2 - E_1}{kT}}$

Состояние равновесия $\bar{z}_{12} = \bar{z}_{21}$ распредел. Больцманом

$$B_{12} N_1 U_{\omega, T} = AN_2 \Rightarrow U_{\omega, T} = \frac{AN_2}{B_{12} N_1} = \frac{A}{B_{12}} e^{\frac{-E_2 - E_1}{kT}}$$

При $T \rightarrow \infty$ $U_{\omega, T}$ - конечна, а должна $\rightarrow \infty$

$$\bar{z}'_{21} = B_{21} N_2 U_{\omega, T}$$

$$\bar{z}_{12} = \bar{z}_{21} + \bar{z}'_{21}$$

$$B_{12} N_1 U_{\omega, T} = AN_2 + B_{21} N_2 U_{\omega, T} \quad / : N_1$$

попущ. спонт. вынужденное

$$B_{12} U_{\omega, T} = A \frac{N_2}{N_1} + B_{21} \frac{N_2}{N_1} U_{\omega, T}$$

$$T \rightarrow \infty \quad \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{-E_2 - E_1}{kT}} = \underline{1}$$

$$T \rightarrow \infty \quad U_{\omega, T} \rightarrow \infty$$

$\frac{N_2}{N_1}$ можно пренебречь. Не содержит бесконечно большой спектр. плотности энергии

$$B_{12} U_{\omega, T} = B_{21} U_{\omega, T}$$

$B_{12} = B_{21} = B$ - не зависит от температуры

A и B - коэфф Эйнштейна

$$B N_1 U_{\omega, T} = A N_2 + B N_2 U_{\omega, T}$$

$$U_{\omega, T} = \frac{A N_2}{B N_1 - B N_2} = \frac{A N_2}{B(N_1 - N_2)} = \overset{1:N_2}{=}$$

$$= \frac{A}{B \left(\frac{N_1}{N_2} - 1 \right)} \Rightarrow U_{\omega, T} = \frac{A}{B \left(e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}} - 1 \right)} = \{E_2 - E_1 = \hbar\omega\} =$$

$$= \frac{A}{B \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} \Rightarrow U_{\omega, T} = \frac{A}{B \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)}$$

Сравним с ф-ой Планка

$$U_{\omega, T} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Св-ва вынужд излучения: **42**

- 1) Распротр. в том же направлении что и излучение его вызвавшее
- 2) Фаза совпадает с фазой падающей волны
- 3) Поляризован. также как и падающее излучение

(спонтанного излучения должно быть больше \Rightarrow на верхнем уровне должно быть электронов больше, чем в нижнем)

Должна быть инверсная среда

Среды с инверсной заселенностью ω **42**
 Энергет. уровней

β -н Бугера

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$



если инверсная $\mu < 0$



$$\Delta U_{\omega, T} = (z_{21} - z_{12}) \pm \hbar \omega$$

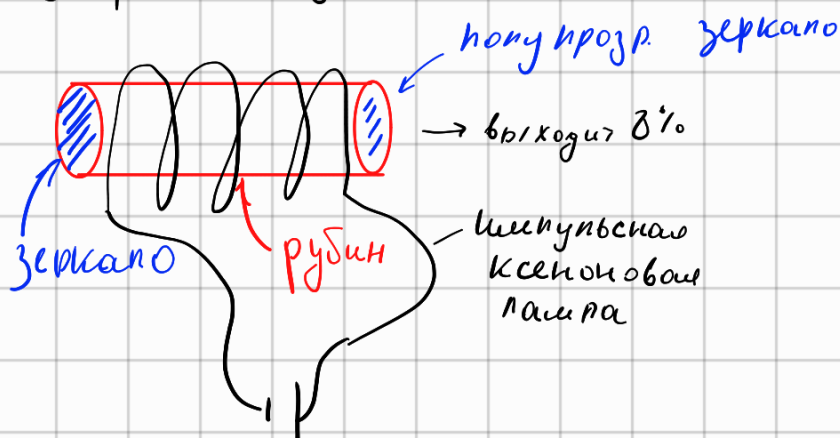
↑ энергия одного фотона

При $N_2 > N_1$ - излучение усил. $\Rightarrow U_{\omega, T} = \beta U_{\omega, T} (N_2 - N_1) \hbar \omega \pm$

43 ЛАЗЕРЫ - оптические квантовые генераторы

Свет усил. за счет вынужд. излуч.

Устр-во лазера



Накачка - процесс сообщения рабочему телу лазера энергии для перехода атома в возбужденное состояние

Лампа вспыхивает \rightarrow происходит накачка \rightarrow
 \rightarrow мгновенное спонтанное излучение

Есть фотон который движется \perp зеркалу, возникает вынужденное излучение (с высокой когерентностью).

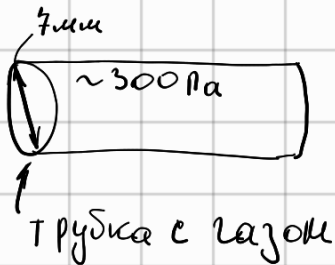
После мн-ва отражений получается вспышка, среда перестает быть инверсной, часть вспышки выходит

Почему 3 уровня?

Если 2 уровня никак нельзя произвести с помощью света легко переходят туда-сюда. Свет мешает.

Нужно чтобы фотон ушливался

Джаван. Генево - неоновый лазер



За счет напряжений происходит газовый разряд.
Происходит накачка

$$\frac{Ne}{He} = \frac{1}{10}$$

Квантовые системы
из одинаковых частиц

Принцип неразличимости (тождественности) одинаковых частиц 44

В одной и той же квантовой системе частицы одинаковой природы принципиально неразличимы между собой

Микроскопические тела неразличимы в Квантовой механике

В системе одинаковых частиц реализуются только такие состояния, для которых при перестановке частиц местами не меняется ничего из того, что можно наблюдать

N частиц

q_i - координата и спин. x_i, y_i, z_i, S_{iz}

$$\Psi = \Psi(q_1, \dots, q_N, t)$$

\hat{P}_{ij} - оператор перестановки 44

$$\hat{P}_{ij} \Psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N, t) = \Psi(q_1, \dots, q_j, \dots, q_i, q_N, t)$$

$|\Psi|^2 = |\hat{P}_{ij} \Psi|^2$, чтобы неизменился квадрат модуля комплексного числа нужно умножить комплексное число на λ число, модуль которого равен 1 $|\lambda| = 1$

$$\hat{P}_{ij} \Psi = \lambda \Psi$$

$$\hat{P}_{ij} \hat{P}_{ij} \Psi = \Psi - \text{дважды поменяли} \Rightarrow \text{ничего не поменялось}$$

$$\lambda^2 \Psi = \Psi \quad \lambda = \pm 1$$

$$\hat{P}_{ij} \psi = \psi$$

$$\hat{P}_{ij} \psi = -\psi$$

Состояния (ψ -ф-ия) 415

Симметричная

$$\hat{P}_{ij} \psi = \psi$$

Антисимметричная

$$\hat{P}_{ij} \psi = -\psi$$

Бозоны

0 или целый спин
фотоны, π и K -мезоны

Фононы, Экситоны

Фермионы

полуцелый спин

e, e^+, n, p, ν
↑
нейтрино

Составная частица - явл. частица в зависимости от суммарного
спина состав. её частиц

Волновая ф-ия системы
не взаимодействующих частиц

46

Ур-ие Шредингера для не взаимодейств. частиц

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_1 \psi(q_1, q_2) + \Delta_2 \psi(q_1, q_2)) + [u(q_1) + u(q_2)] \psi = E \psi$$

Признак разделения переменных

$$\psi(q_1, q_2) = \psi_1(q_1) \psi_2(q_2)$$

Проверим удобн ли эта ψ -ф-ия принципу тождественности

Подействуем оператором перестановки

$$\hat{P}_{12} \Psi = \Psi_2(q_2) \Psi_1(q_1) \neq \Psi(q_1, q_2) \Rightarrow$$
$$\hat{P}_{12} \Psi = \Psi_2(q_2) \Psi_1(q_1) \neq -\Psi(q_1, q_2) \Rightarrow$$

\Rightarrow Знаки реальная частица такая, Ψ -ф-ия

Не может описывать реальные частицы

Ур-ие Шредингера - линейная Ψ -ия \Rightarrow если одна Ψ -ия
явл. решением, другая тоже явл. решением, то их
линейная комбинация тоже явл. решением

Составим ЛК чтобы она была симметричная и антисимметричная
 \leftarrow симметричная

$$\Psi_S(q_1, q_2) = \Psi_2(q_1) \cdot \Psi_1(q_2) + \Psi_2(q_2) \Psi_1(q_1)$$

$$\hat{P}_{ij} \Psi_S = \Psi_S - \text{подействовав оператором перестановки, } \Psi\text{-ф-ия}$$

не изменяется

\leftarrow антисимметричная

$$\Psi_A(q_1, q_2) = \Psi_2(q_1) \Psi_1(q_2) - \Psi_2(q_2) \Psi_1(q_1)$$

$$\hat{P}_{ij} \Psi_A = -\Psi_A$$

Для произвольного числа частиц

$$\Psi_S = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i > j}}^N \Psi_1(q_1) \cdot \dots \cdot \Psi_i(q_i) \cdot \dots \cdot \Psi_j(q_j) \cdot \dots \cdot \Psi_N(q_N)$$

Сумма всех возможных перестановок

$$\Psi_A = \begin{vmatrix} \psi_2(q_1) & \psi_2(q_2) & \dots & \psi_2(q_N) \\ \psi_3(q_1) & \dots & \dots & \dots \\ \psi_x(q_1) & \dots & \dots & \psi_x(q_N) \\ \psi_5(q_1) & \dots & \dots & \psi_5(q_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_w(q_1) & \dots & \dots & \psi_w(q_N) \end{vmatrix} - \text{Система из } N \text{ не взаимодействующих фермионов}$$

Предположим, что 2 частицы находятся в одинаковом состоянии

Пусть i и j - в одинаковых состояниях

$\psi_x = \psi_5 \Rightarrow$ определитель равен 0, т.к. 2 строки равны.
 А если определитель = 0 то $\Psi_A(q_1, \dots, q_N) = 0 \Rightarrow$
 частицы не существуют. \Rightarrow 2 фермионам нельзя быть в одинаковых состояниях

Принцип Паули (запрет Паули) 46

В системе тождественных фермионов не может быть 2-х частиц находящихся в одном и том же квантовом состоянии

Хотя бы одним квантовым числом должны отличаться
 Например разное направление спина

В одной квантовой системе состояние частицы должно отличаться значением хотя бы одного квантового числа. В данном состоянии не может находиться больше 1-ой частицы

Квантовые статистические распределения

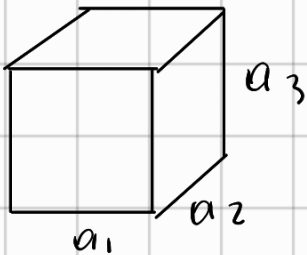
47

Плотность квантовых состояний

$g(E) = \frac{dG}{dE}$ - Число возможных состояний приходящихся на единичный интервал энергии

Выводим соотношение для плотности квантовых состояний для свободной частицы в полости

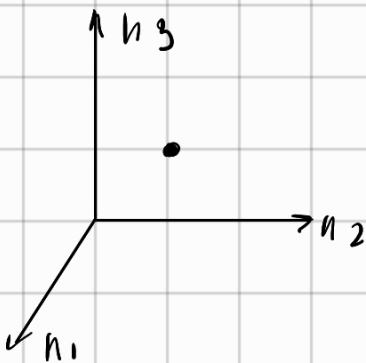
Есть полость



Для каждой отдельно взятой частицы ситуация как частица в прямоугольной яме

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right)$$

Рассмотрим пр-во. В этом пространстве состояние частицы описывается одной точкой. Все возможные состояния описываются совокупностью точек с шагом = 1.



На каждое состояние приходится объем = 1. $\Delta V = 1$

При одном и том же значении энергии, точки, соотв. состояниям с одним и тем же значением энергии, находятся на разных расстояниях от начала координат.

Делаем замену переменных, т.к. нам неудобно работать

в таком пр-ве.

$$\tilde{n}_1 = \frac{n_1}{a_1} \sqrt{a_1 a_2 a_3}$$

$$\tilde{n}_2 = \frac{n_2}{a_2} \sqrt{a_1 a_2 a_3}$$

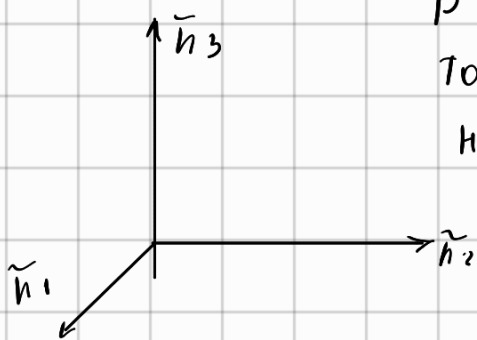
$$\tilde{n}_3 = \frac{n_3}{a_3} \sqrt{a_1 a_2 a_3}$$

$$\frac{\hbar_1^2}{a_1^2} = \frac{\tilde{\hbar}_1^2}{(a_1 a_2 a_3)^{2/3}}$$

$$\frac{\hbar_2^2}{a_2^2} = \frac{\tilde{\hbar}_2^2}{(a_1 a_2 a_3)^{2/3}} \Rightarrow E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{(\tilde{\hbar}_1^2 + \tilde{\hbar}_2^2 + \tilde{\hbar}_3^2)}{(a_1 a_2 a_3)^{2/3}}$$

$$\frac{\hbar_3^2}{a_3^2} = \frac{\tilde{\hbar}_3^2}{(a_1 a_2 a_3)^{2/3}}$$

В этом пр-ве состояния соотв. одной и той же энергии соответствуют точки, находящиеся на одном и том же расстоянии от начала коорд в сфере



выразим из E

$$R^2 = \tilde{\hbar}_1^2 + \tilde{\hbar}_2^2 + \tilde{\hbar}_3^2 = \frac{2mE(a_1 a_2 a_3)^{2/3}}{\pi^2 \hbar^2}$$

$$\Delta \tilde{V} = \Delta \tilde{\hbar}_1 \Delta \tilde{\hbar}_2 \Delta \tilde{\hbar}_3 = \frac{\Delta \tilde{\hbar}_1}{a_1} \cdot \frac{\Delta \tilde{\hbar}_2}{a_2} \cdot \frac{\Delta \tilde{\hbar}_3}{a_3} \cdot \left(\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \right)^3 = 1 \Rightarrow \Delta \tilde{V} = 1$$

↑ соответствующий с соседним возможным значением $\tilde{\hbar}_1$

Число состояний таких, что $E \in (0, E)$

G = Число точек в шаре радиусом R в объеме $\frac{1}{8}$ от шара

$$G = \frac{q_s}{8} \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{q_s}{8} \frac{4}{3} \pi \frac{(\sqrt[3]{2mE})^3 \cdot (a_1 a_2 a_3)^{1/3}}{\pi^3 \hbar^3} = \left\{ E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} \right\} =$$

$$= \frac{q_s}{8} \frac{4}{3} \frac{\pi p^3 V}{\pi^3 \hbar^3} = \frac{V_{\text{фаз}}}{h^3}$$

{ Фазовый объем }
{ $2\pi\hbar = h$ }

{ На 1 состояние приходится $\Delta V_{\text{фаз}} = h^3$
 $\Delta x \Delta p_x \sim h$
 $\Delta x \Delta p_x \Delta y \Delta p_y \Delta z \Delta p_z \sim h^3$
 $V_{\text{фаз}} = V_p \cdot V = \frac{4}{3} p^3 V$
 ↑ импульсный объем ↑ координатный объем
 $q_s = 2$ для электронов
 т.к. $S_z = \pm \frac{1}{2}$ }

$$G = g_s \cdot \frac{4}{3} \pi p^3 V \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} \quad \text{для нерелативистич}$$

$$G = 2 \cdot \frac{\frac{4}{3} (2mE)^{3/2} V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2} E^{3/2} V}{3\pi^2 \hbar^3}$$

$$g(E) = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2} 3\sqrt{E} V}{2 \cdot 3\pi^2 \hbar^3} \Rightarrow g(E) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} \sqrt{E}}{\pi^2 \hbar^3} \quad \text{— для электронов}$$

Для фотонов

$$p = \frac{E}{c} \quad G = 2 \cdot \frac{\frac{4}{3} \pi E^3 V}{c^3 (2\pi\hbar)^3} = \frac{E^3 V}{3c^3 \pi^2 \hbar^3}$$

$$g(E) = \frac{dG}{dE} = \frac{3E^2 V}{3c^3 \pi^2 \hbar^3} \Rightarrow g(E) = \frac{E^2 V}{c^3 \pi^2 \hbar^3} \quad \text{— для фотонов}$$

Распределение частиц

В классической

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \quad E_k$$

$$dN = A e^{-\frac{E_k}{kT}} dp_x dp_y dp_z \leftarrow \text{распределение Максвелла}$$

$$dN = B e^{-\frac{U}{kT}} dx dy dz$$

↑ распределение Больцмана

$$dN = AB e^{-\frac{(E_k+U)}{kT}} dp_x dp_y dp_z dx dy dz$$

$$dN = AB e^{-\frac{E}{kT}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z \quad \text{— распределение Максвелла-Больцмана}$$

↑ перемножили

Больцмана

Классические частицы	Бозоны	Фермионы
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1 2 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2 1 </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> 1 2 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> 2 1 </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(1 2 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2 1 </div> </div> <div style="margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">12 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> 12 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> 12 </div> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">•• </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> •• </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">• • </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">•• </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> •• </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> •• </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">•• </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;"> •• </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">• • </div>

Вывод распределения
Бозе-Эйнштейна

48



Z -ячеек

N -частиц

$Z-1$ -перегородок

Способы расположить N бозонов по Z ячеек

$$\Omega = \frac{(N+Z-1)!}{N!(Z-1)!}$$

Рассмотрим фазовое пр-во с осями x, y, z, p_x, p_y, p_z . Проведем в этом пр-во поверхности соотв одному и тому же знач-ию энергии (эти поверхности называются энергетическими поверхностями)

$$f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = E_i$$

$$f(x, \dots, p_z) = E_{i+1}$$

В интервале E_i, E_{i+1} есть состояние Z_i состояние в котором находится N_i частиц

Ω^k — статистический вес
 $\Omega = \prod_i \Omega_i$ — произведение статистических весов всех микроэнергетических состояний

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i \frac{(N_i + \varepsilon_i - 1)!}{N_i! (\varepsilon_i - 1)!} \left\{ \begin{array}{l} \text{реализуется то распределение, которое может быть} \\ \text{реализовано максимальным числом способов} \end{array} \right\}$$

Найти при каком N_i Ω_i max

Энтропия

$$S = k \ln \Omega = k \sum [\ln(N_i + \varepsilon_i - 1)! - \ln N_i! - \ln(\varepsilon_i - 1)!] =$$

$$k \sum [\ln(N_i + \varepsilon_i - 1)! - \ln N_i!] + c \left\{ \begin{array}{l} \text{число возможных состояний приходящих на интервал} \\ E_i, E_{i+1} \text{ оно фиксировано} \end{array} \right\}$$

S max ищем условный экстремум при $\sum_i N_i = N = \text{const}$

$$E = \sum_i N_i \varepsilon_i = \text{const}$$

Используем метод неопред. множителей

$$F = S + \lambda_1 N + \lambda_2 E \quad \text{все частные производные должны} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = 0 \quad \forall i$$

Ф-ла Стирлинга $\ln N! \approx N \ln N - N$

$$F = k \sum_i [(N_i + \varepsilon_i - 1) \ln(N_i + \varepsilon_i - 1) - N_i - (\varepsilon_i - 1) - N_i \ln N_i + N_i] + C + \lambda_1 N + \lambda_2 E$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = k \left[\ln(N_i + \varepsilon_i - 1) + \cancel{(N_i + \varepsilon_i - 1)} \frac{1}{(N_i + \varepsilon_i - 1)} - 1 - \ln N_i - \cancel{N_i} \frac{1}{N_i} + 1 \right] + \lambda_1 + \lambda_2 \varepsilon_i = 0$$

$$\ln \frac{N_i + \varepsilon_i - 1}{N_i} = -\frac{\lambda_1}{k} - \frac{\lambda_2 \varepsilon_i}{k}$$

$\frac{N_i}{\varepsilon_i} = \langle n_i \rangle$ — число заполнения энерг. уровнями среднее число Бозонов находящихся в квантовом состоянии с энергией E при T

$$\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{\langle n_i \rangle + 1 - \frac{1}{\epsilon_i} \text{малая величина}}{\langle n_i \rangle} = - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i}{K}$$

$$\frac{\langle n \rangle + 1}{\langle n \rangle} = \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i}{K}\right)$$

$$\langle n \rangle + 1 = \langle n \rangle \cdot e^{\dots}$$

$$\langle n \rangle (e^{\dots} - 1) = 1$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\lambda_1}{K} + \frac{\lambda_2 E}{K}} - 1}$$

равны 0 не только частные производные но и полные дифференциалы

$$dF = dS + \lambda_1 dN + \lambda_2 dE = 0$$

полное число не изменяется

$$dS + \lambda_2 dE = 0$$

$$P_{уст} v = const$$

$$\delta Q = \delta A + dE$$

$$\Downarrow T dS$$

$$\Rightarrow T dS = dE$$

$$dS = \lambda_2 T dE$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{T}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\lambda_1}{K} + \frac{E}{KT}} - 1}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{T}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{KT}} - 1}$$

μ -хим. потенциал

$\mu < 0$ потому что

при малых E получилось

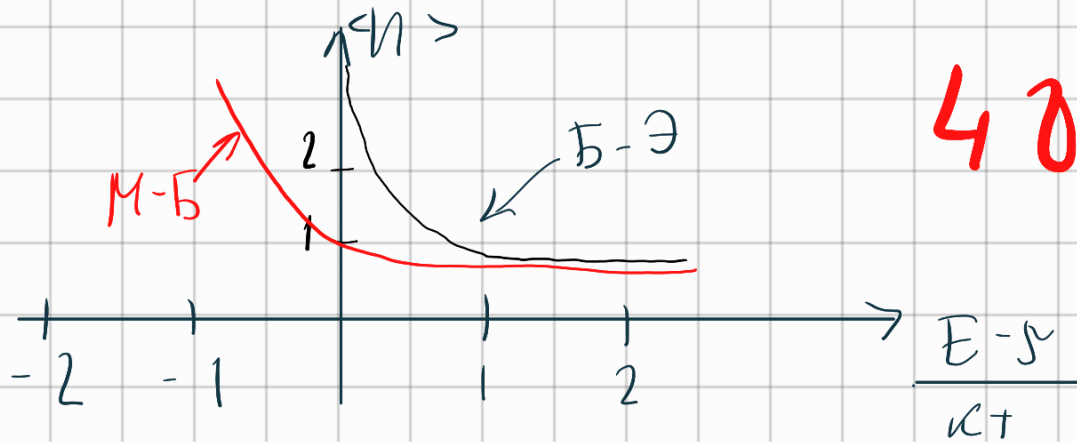
отрицательное число заполнения

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{KT}} - 1}$$

- распределение Бозе-Эйнштейна

$\langle n \rangle < 1$ при малых числах заполнения (при высоких T)

$\langle n \rangle = \frac{\rho}{e^{\frac{E-\mu}{kT}}} = A e^{-\frac{E}{kT}}$ - превращается в Максвелла-Больцмана



Сверхтекучесть - квантовая вязкость

Сверхпроводимость 53

\bar{e} - фермионы При низких T объединяются в Куперовские пары \Rightarrow бозоны

Эл. сопротивление - частица на что-то наталкивается и теряет энергию

Бозе-конденсация - состояние с наименьшей энергией

Случай переменного числа частиц 48

Вместо $F = S + \lambda_1 N + \lambda_2 E$ используем $F = S + \lambda_2 E$ потому что условный экстремум при $E = \text{const}$ $\lambda_1 = 0$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}$$

Бозе - Эйнштейна
для переменного числа частиц

$$\frac{dN}{dE} = g(E) \cdot \langle n \rangle$$

Для фотонов $g(E) = \frac{E^2 V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} = \left\{ E = \hbar \omega \right\} = \frac{V \hbar^2 \omega^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3}$

$$F(E) = \frac{dN}{dE} = g(E) \cdot \langle n \rangle$$

$$V \cdot \omega = \frac{dE}{d\omega} - \text{Ф-на Планка } 48$$

$$V \cdot \omega = \frac{dE}{d\omega} = \frac{E \cdot dN}{d\omega} = \frac{\hbar \omega \hbar dN}{d(\hbar \omega)} = \frac{\hbar^2 \omega dN}{dE} = \hbar^2 \omega g(E) \langle n \rangle =$$

$$\frac{\hbar^2 \omega V \hbar^2 \omega^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}$$

$$U = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} - \text{Ф-на Планка } 40$$

49

Распределение Ферми-Дирака



Z - ячеек

N - частиц

$Z-1$ - пустые ячейки

← статист. вес

$$\Omega = \frac{Z!}{N! (Z-N)!}$$

$$\Omega = \prod_i \frac{z_i!}{n_i! (z_i - n_i)!}$$

Вывод как Бозе - Эйнштейна

$\Omega \leftarrow$ статистический вес
 $\Omega = \prod_i \Omega_i$ - произведение статистических весов всех микроскопических состояний

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i \frac{z_i!}{N!(z_i - N)!} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Реализуется то распределение, которое может быть} \\ \text{реализовано максимальным числом способов} \end{array} \right\}$$

Найти при каком N_i Ω_i max

Энтропия

$$S = k \ln \Omega = k \sum [\ln z_i! - \ln N! - \ln (z_i - N_i)!] =$$

$$-k \sum_i [\ln N_i! + \ln (z_i - N_i)!] + C \left\{ \begin{array}{l} \text{число возможных состояний} \\ E_i, E_{i+1} \text{ оно фиксировано} \end{array} \right\}$$

S_{\max} ищем условный экстремум при $\sum_i N_i = N = \text{const}$

$$E = \sum_i N_i E_i = \text{const}$$

Используем метод неопред. множителей

$$F = S + \lambda_1 N + \lambda_2 E \quad \text{все частные производные должны} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = 0 \quad \forall i$$

Ф-ла Стирлинга $\ln N! \approx N \ln N - N$

$$F = -k \sum_i [N_i \ln N_i + (z_i - N_i) \ln (z_i - N_i)] + C + \lambda_1 N + \lambda_2 E$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = -k \left[N_i \ln N_i + N_i \frac{1}{N_i} - \ln (z_i - N_i) - (z_i - N_i) \frac{1}{z_i - N_i} \right] + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0$$

$$k \ln \frac{z_i - N_i}{N_i} + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0$$

$\frac{N_i}{z_i} = \langle n_i \rangle$ - число заполнения энерг. уровня при среднем числе Бозонов
 находящихся в квантовом состоянии с энергией E при T

$$\ln \frac{z_i - N_i}{N_i} = -\frac{\lambda_1}{k} - \frac{\lambda_2 E}{k}$$

$$\ln \frac{1 - \frac{N_i}{z_i}}{\frac{N_i}{z_i}} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E}{k}$$

$$\ln \frac{1 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E}{k} \Rightarrow \frac{1 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle} = \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E}{k}\right)$$

$$1 - \langle n \rangle = \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E}{k}\right) \langle n \rangle \Rightarrow 1 = \langle n \rangle \left(\exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E}{k}\right) + 1\right)$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E}{k}} + 1}$$

равны 0 не только частные производные но и полные дифференциал

$$dF = dS + \lambda_1 dN + \lambda_2 dE = 0$$

полное число не изменяется

$$dS + \lambda_2 dE = 0$$

$$P_{уст} v = const$$

$$\delta Q = \delta A + dE$$

$$\Downarrow T dS$$

$$\Rightarrow T dS = dE$$

$$dS = \lambda_2 T dS$$

$$\lambda_2 = \frac{-1}{T}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{-\lambda_1 + E}{kT}} + 1}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{T}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{kT}} + 1}$$

μ -хим. потенциал $\mu < 0$ потому что

при малых E получилось

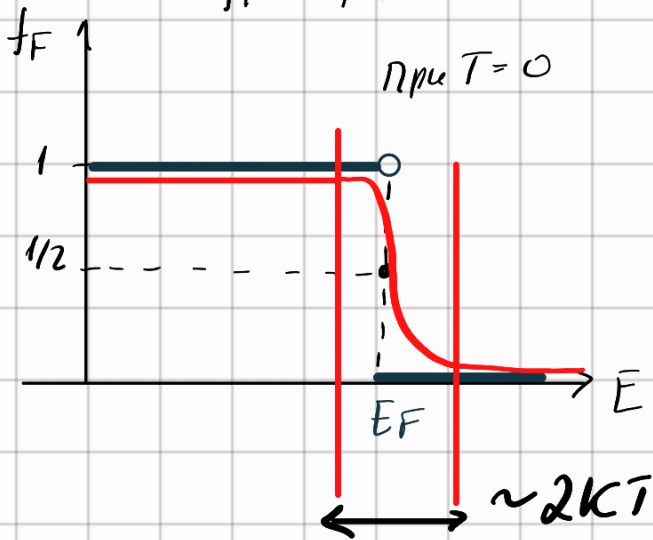
Отрицательное число заполнения

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{kT}} + 1}$$

- распределение Ферми-Дирака

$$\langle n \rangle = f_F(\bar{E}, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

вероятность того, что в данном состоянии с E_F есть частица
 $f_F \in [0; 1]$



$$E_F > 0$$

49

Энергия Ферми (уровень Ферми) - энергия, такая что вероятность заполнения фермиона состоянием с данной энергией равно $\frac{1}{2}$

Электронный газ в металлах

$$F(E) = \frac{dn}{dE} \leftarrow \text{число частиц энергия которых лежит в интервале } \bar{E}, \bar{E} + d\bar{E}$$

↑ Ф-ция распределения

50 Наверное

$$g(E) = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} \sqrt{E} V}{\pi^2 \hbar^3}$$

↑ для всего объема
 без V → для ед. объема

$$F(\bar{E}) = \frac{dn}{dE} = f_F(E, T) \cdot g(E)$$

$$\text{При } T \rightarrow 0 \quad F(E) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} m^{3/2} \sqrt{E}}{\pi^2 \hbar^3}, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases}$$

Можно найти ср. зн-ие физ. величины завис. от E

$$\langle a \rangle = \frac{\int_0^{\infty} a(E) F(E) dE}{\int_0^{\infty} F(E) dE} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} a(E) F(E) dE$$

51

Найдем E_F при $T=0$

$$n = \int_0^{\infty} F(E) dE = \int_0^{E_F} g(E) dE = \int_0^{E_F} \frac{\sqrt{2} m^{3/2} \sqrt{E}}{\pi^2 \hbar^3} dE =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} m^{3/2} E_F^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} = n$$

$$E_F = \frac{(3\pi^2 n)^{2/3} \hbar^2}{2m}; \quad E_F^{(0)} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

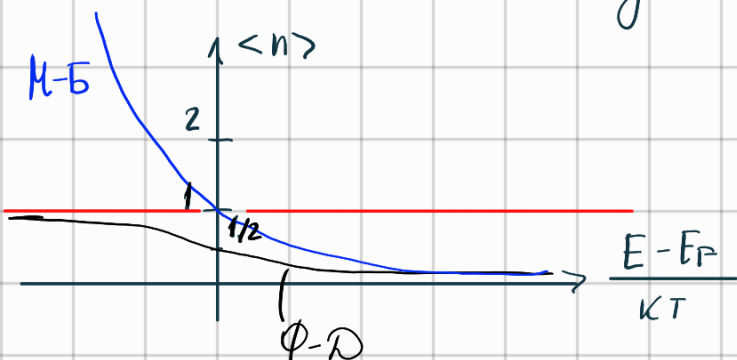
$$E_F = E_F^{(0)} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F^{(0)}} \right)^2 \right]$$

T_F - температура Ферми (вырождения)

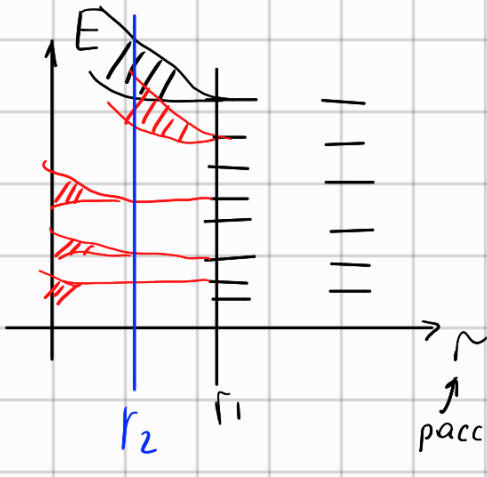
52

$$kT_F = E_F \Rightarrow T_F = \frac{E_F}{k} \sim 10^4 \text{ K}$$

$T \gg T_F$ - Ф-Д превращается в М-Б. невырожденный
 $T \lesssim T_F$ - Ф-Д. вырожденный газ



Зонная теория твердых тел



При сближении атомов преобразуются в зоны **54**

Если равновесное состояние между атомами r_1 , между разрешенными зонами возникшие из соседних уровней атома имеется запрещенная зона

r_2 - соседние зоны перекрываются **55**

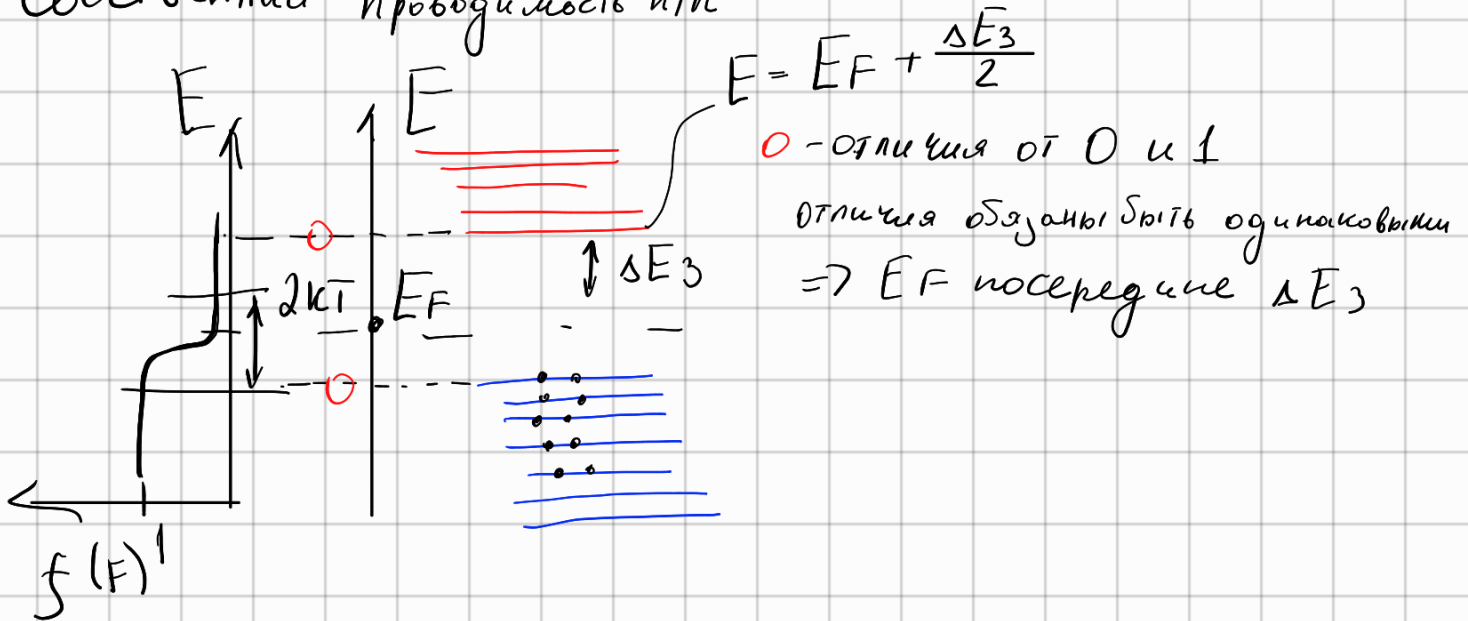
Металлы	И/П	Диэлектрики
<p>Зоны перекрываются или</p>	<p>свободн. зона</p> <p>↓ ΔE_z</p> <p>↑ ΔE_z</p> <p>Валентная зона Заполнена полнокостью</p>	<p>свободн. зона</p> <p>↓ ΔE_z</p> <p>↑ ΔE_z</p> <p>Валентная зона Заполнена полнокостью</p>
<p>↑ ΔE_z</p> <p>Валентная зона Не заполнена</p>		

Валентная зона - зона, возникшая в результате расщепления энергетического уровня, на которой находится валентный электрон (внеш. электронной оболочки)

Полупроводники 5 6

При низких T валентная зона ^{полностью} заполнена и ΔE_3 невелика

Собственная проводимость n/p



Переход \bar{e} из В.З в С.З воз процессом генерации носителей тока (\bar{e} и дырок)

Обратный переход - рекомбинация

Электропроводность чистых n/p

$$T = 300 \text{ K} \quad kT = 0,025 \text{ эВ}$$

$$\Delta E_3 = 0,1 \cdot 1,5 \text{ эВ}$$

$$E - E_F > kT$$

↑ в числ. воз больше \Rightarrow в Φ -D пренебрежем 1

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \approx e^{-\frac{E-E_F}{kT}}$$

$$E - E_F = \frac{\Delta E_3}{2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \sim \int F(E_F + \frac{\Delta E_F}{2}) = e^{-\frac{\Delta E_F}{2kT}}$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E_F}{2kT}}$$

- Температурная зависимость собственных п/п

56

Число электронов в нижней части свободной зоны

Вариационный принцип механики

Введение в вариационное исчисление

Функционал $\Phi[y(x)]$
 ↑ число ← ф-ция

Вариация ф-ции $\delta y(x) = y(x) \cdot \tilde{y}(x)$

Вариация функционала $\delta \Phi[y(x)]$ $\Delta \Phi(y(x)) = \Phi(y(x) + \delta y) - \Phi(y(x))$

$$\Delta \Phi(y(x)) = \delta \Phi(y(x)) + \epsilon (\delta y)_{\max}$$

$$\delta \Phi(y(x)) = F_{\text{лин.}} \delta y [y(x), \delta y]$$

$$\delta y'(x) = y'(x) - \tilde{y}'(x) = (\delta y(x))'$$

Необх. усл. экстремума ф-циала = 0 со первой вариации

Принцип наименьшего действия

$L = T - U$ - лагранжиана ф-ция

Принцип: Пусть в моменты времени t_1 и t_2 система занимает положение характеризуемые наборами значений обобщенных координат $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы

$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ имеет минимальное возможное значение
действие - Φ -ан

$$\delta S = 0; \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

по частям

$$\left(\begin{array}{l} u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\ du = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt \\ v = \delta q \end{array} \right) \delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

$\delta q(t_1) = 0$
 $\delta q(t_2) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

- уравн Лагранжа

q - V переменные однозначно опред. положение тела

$$\frac{\partial (T-u)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-u)}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

h-квант действия [Дж·с]

Примесные n/p

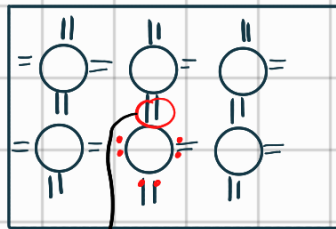
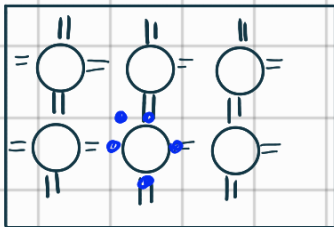
58

n-типа

p-типа

донорные примеси

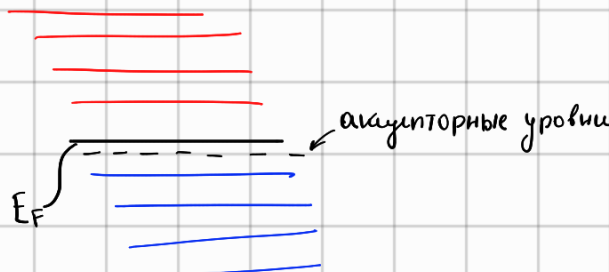
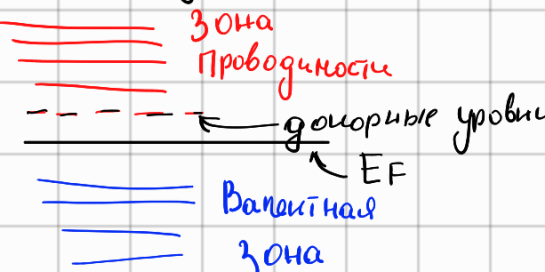
акцепторные примеси



дырка

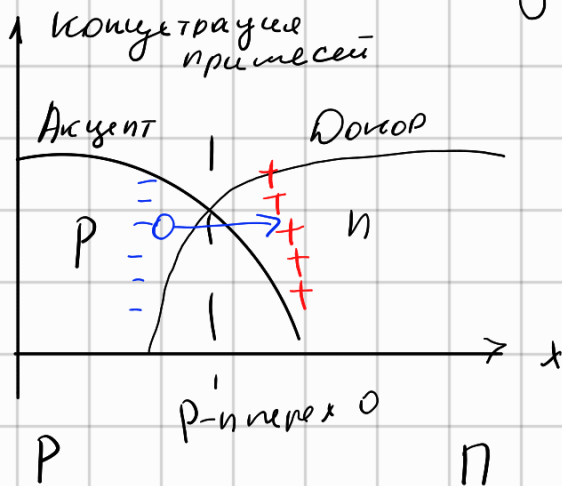
Электронная проводимость

Дырочная проводимость



p-n переход

58



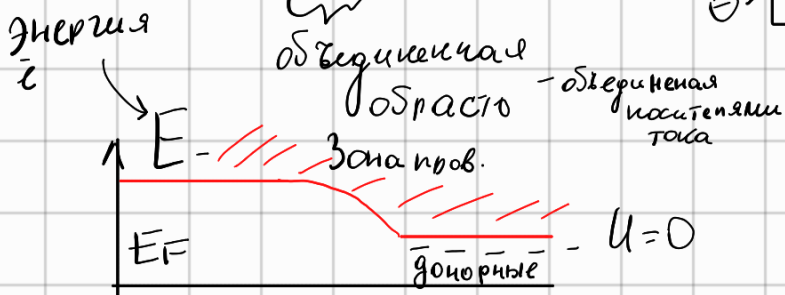
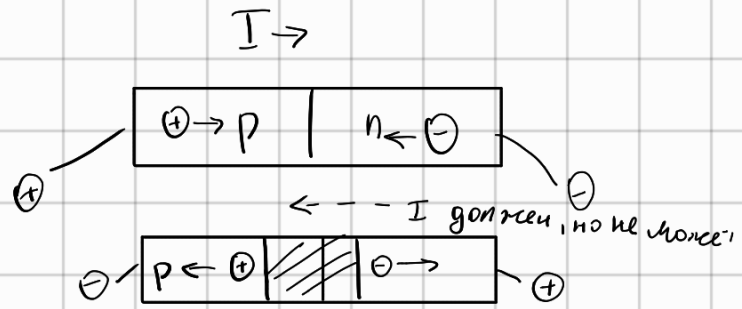
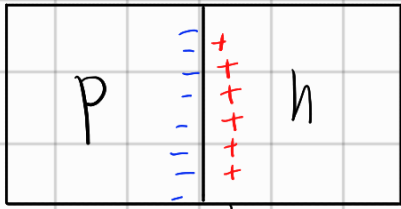
(+) осн. носители

(-) основны

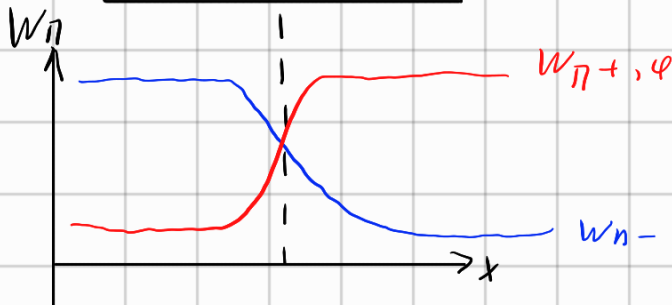
(-) неосновные носители

(+) неосновные

Электронны дифузируют

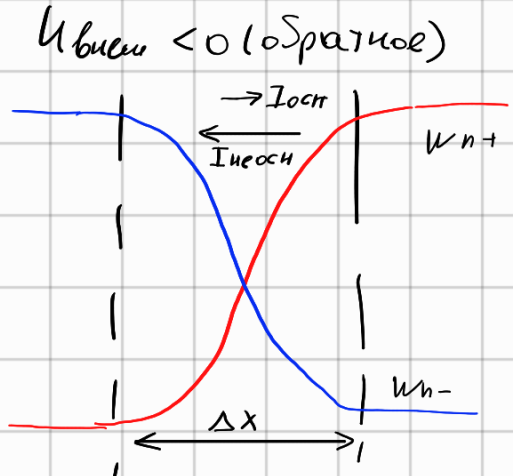
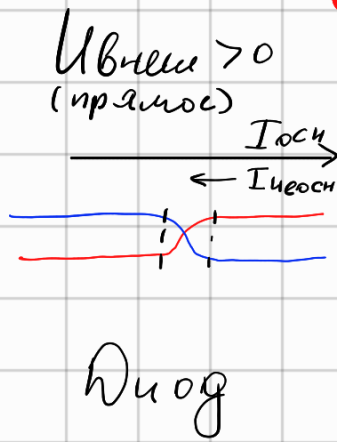
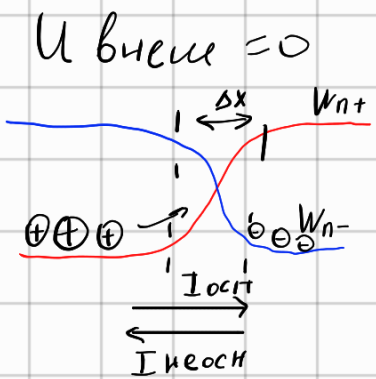


область с токовыми шире \Rightarrow некому проводить ток

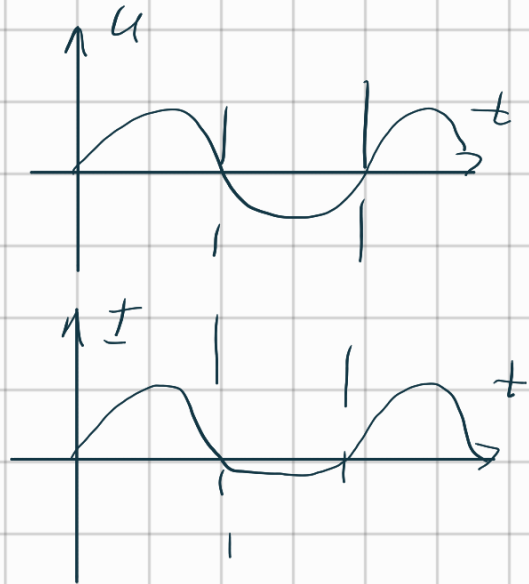
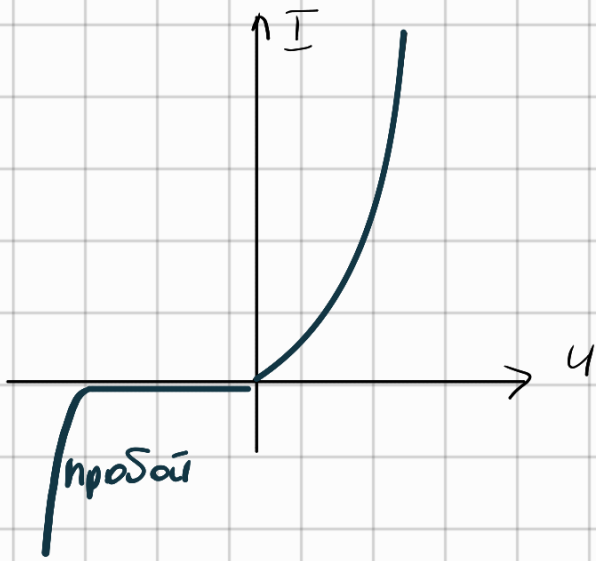


$I_{еосп}$ не зависит от высоты потенц. барьера. Определяется постоянным числом Кварков и глюонов. Зависит от T
 $I_{осп}$ - зависит от высоты потенц. барьера

60



ВАХ p-n перехода 60



Фотодиод

$$h\nu > \Delta E_3$$

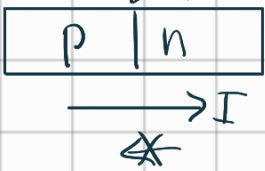
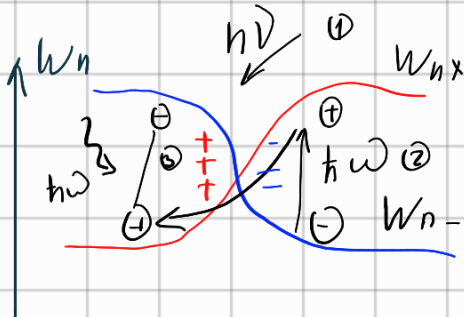
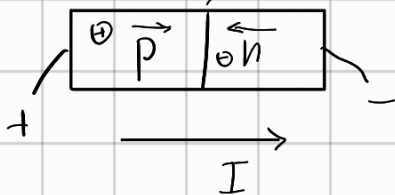


Фото-ЭДС (солнечная батарея) 61



Светодиод

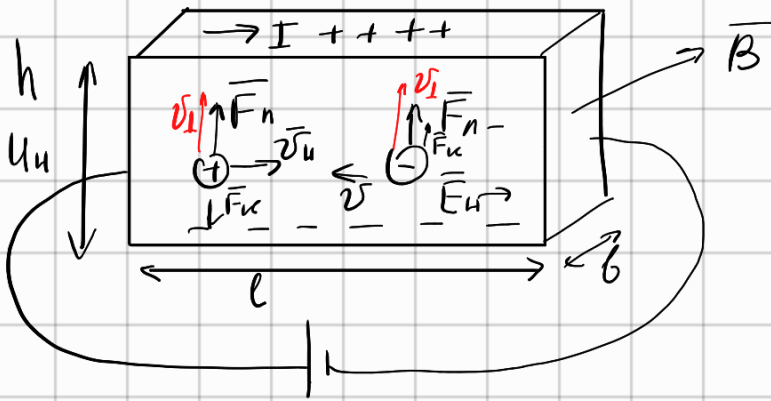
$$h\nu = \Delta E_3$$



ср.оси

Эффект Холла в n/n 59

59



границы взаимодействующие \Rightarrow
имеют вертикаль \vec{v}
 \downarrow
равновесие

$$j_{\perp+} = j_{\perp-}$$

\uparrow
плотность тока
границ

$$j = \frac{v}{E} \Rightarrow v_{\parallel} = \mu E_{\parallel}$$

\uparrow
поверхность

$$E_{\parallel} = \frac{U}{l}$$

$$F_{n\perp} = e v_{\parallel} B = e \mu E_{\parallel} B$$

$$\vec{j} = en\vec{v} \Rightarrow j_{\perp} = env_{\perp}$$

$$v_{\perp+} = \left(\mu_+ (F_{n+}) \cdot \frac{1}{e} \right) - \mu_+ E_{\perp}$$

вертик. сос. v границ
связ с F_n
вертик сос. поперек

$$v_{\perp-} = \mu_- - \frac{F_{n-}}{e} + \mu_- E_{\perp}$$

$$j_{\perp+} = j_{\perp-}$$

$$en_+ \mu_+ \left(\frac{e \mu_+ E_{\parallel} B}{e} - E_{\perp} \right) = en_- \mu_- \left(\frac{e \mu_- E_{\parallel} B}{e} + E_{\perp} \right)$$

$$n_+ \mu_+^2 E_{\parallel} B - n_- \mu_-^2 E_{\parallel} B = E_{\perp} (n_- \mu_- + n_+ \mu_+)$$

$$E_{\perp} = \frac{(n_+ \mu_+^2 - n_- \mu_-^2) E_{\parallel} B}{\mu_+ n_- + n_+ \mu_-}$$

Выразим E_{\parallel} через I

$$I = j h b = h b (j_{\parallel+} + j_{\parallel-}) = h b (en_+ \mu_+ E_{\parallel} + en_- \mu_- E_{\parallel}) = h b e E_{\parallel} (n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)$$

\uparrow \leftarrow площадь поперек. сечения
плотность тока

плотность тока

$$E_{II} = \frac{I}{h \nu \epsilon (n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_{II} = \frac{(n_+ \mu_+^2 - n_- \mu_-^2) B I}{h \nu (n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)^2 \epsilon} \\ \\ \end{array}$$

$$E_I = \frac{U_{II}}{h}$$

$$U_{II} = \frac{(n_+ \mu_+^2 - n_- \mu_-^2) B I}{(n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)^2 \epsilon}$$

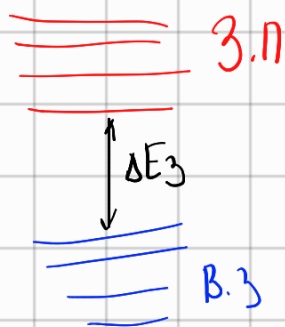
Холловская разность потенциалов

$$U_{II} = R_H \frac{B I}{\nu} \quad R_H = \frac{n_+ \mu_+^2 - n_- \mu_-^2}{\epsilon (n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)^2}$$

↑ холловская постоянная

Применение: измерение магнитной индукции
исследование п/п

Фотопроводимость
Красная граница фотопроводимости



57
Внутренний фотоэффект - эффект, при котором под действием света электроны переходят на другой энергет. уровень (или на другую энергетическую зону), но остаются внутри

Фоторезисторы
под действием света
 $R \downarrow$

Если $h\nu > \Delta E_z$, то электрон, находящийся в валентной зоне, поглощает фотон и переходит в зону проводимости

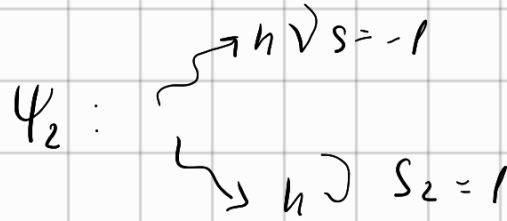
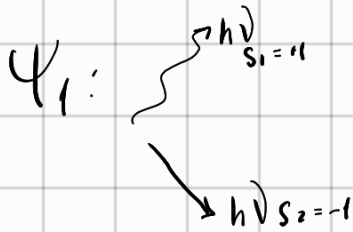
⇒ образуется дырка

Если $h\nu < \Delta E_z$ внутренний фотоэффект происходить не может

$$h\nu_{кр} = \Delta E_z \Rightarrow \nu_{кр} = \frac{\Delta E_z}{h} \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \lambda_{кр} = \frac{hc}{\Delta E_z}$$

Квантовая запутанность

Пусть состояние Ψ_1 таково, что испускается 2 фотона, и у 1 фотона спиральность (как спина y^z) $+1$, а у 2-го $S = -1$
 Ψ_2 наоборот



Если мы не измеряем спиральность одного фотона, то у другого фотона спиральность не определена. Он находится в суперпозиции 2-х состояний

Но как только мы измерили первый фотон, спиральность второго фотона становится определенной

T - возрастает

Проводники	П/П
$\sigma \downarrow R \uparrow$	$\sigma \uparrow R \downarrow$

Чем выше T , тем больше \bar{e} в ПП переходит из валентной зоны в зону проводимости \Rightarrow рождается \bar{e} проводимости и дырка
 $\Rightarrow T \uparrow \sigma \uparrow$

Примесная проводимость при комнатных T не зависит от T , но со временем возрастает

В проводниках очень много свободных носителей.

Когда течёт электрический ток, эти электроны движутся между рядами ионов кристаллической решётки.

Ионы-атомы без 1-2-х электронов

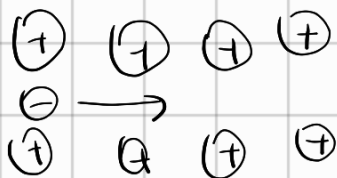
Оторвавшиеся электроны и являются электронами проводимости, свободными электронами, носителями тока.

Чем чаще электроны на что-то натываются, тем выше электрическое сопротивление

Проводимость зависит от того, насколько легко электронам двигаться

Чем больше температура, тем больше колеблются ионы кристаллической решётки, больше факторов, мешающие электронам двигаться.

В полупроводниках носителей мало, но их концентрация зависит от температуры. При повышении температуры увеличивается количество дырок и проводящих электронов



Сверхпроводимости. 53

Сверхпроводимость-свойство некоторых материалов обладать нулевым электрическим сопротивлением при температуре ниже определённого значения

T_c - критическая температура

1911 Камерлинг - Оннес

Ртуть сверхпроводник при $T_c = 4,15 \text{ K}$

Как наблюдают сверхпроводимость

1. Напряжение проводника равно 0 $U=0$
2. Незатухает ток в замкнутом контуре

$$\mathcal{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = R \vec{I} = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const}$$

Pb, Sn, Ta, U, Mg ($10,000 \text{ K}$)

$T_c = 138 \text{ K}$ Hg-Ba-Ca-O-F

↑ высокая температурная проводимость

Эффект Мейснера - выталкивание магнитного поля из сверхпроводника

Есть критическая напряжённость магнитного поля. Если напряжённость меньше критического, то если сверхпроводник помещают в магнитное поле, внутри магнитное поле нулевое

$$H_c = H_{c0} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right)$$

↑ При $T = 0 \text{ K}$

1935

1950 теория Гинзбург - Ландау

1957 теория БКШ

Согласно этой теории, e^- объединяются в куперовские пары при низкой T

У куперовской пары спин 0 \Rightarrow Бозон Нет запрета Паули.

Переходят в состояние с наименьшей возможной энергией. Уровни энергией дискретные, нижние уровни не нулевой.

Куперовские пары обладают не нулевой энергией, движется с какой-то скоростью.

Куперовская пара не может отдать энергию т.к находится в состоянии с наименьшей энергией, следовательно проходит через вещество не встречая сопротивление.

Эффект Джозефсона имеет место при протекании тока через тонкий слой диэлектрика между 2-мя сверхпроводниками

Стационарный

$$R=0 ; U=0$$

\downarrow сопротивление

Джозефсона перехода

Куперовские пары проходят за счет туннельного эффекта

(и то, не все пары)

нестационарный

При $I \uparrow$ $\hbar\omega = 2eU$

является доказательством куперовских пар

Структура атомного ядра

Опыт Резерфорда

Пропускаем через тончайшую фольгу поток альфа частиц. Большая часть пролетает прямо или отклоняется на малый угол, а некоторая часть очень сильно отклонялась.

В веществе существуют очень компактные массивные области с положительным зарядом.

Атом $\sim 10^{-10}$ м = 1 Å Анстрем
Ядро $\sim 10^{-15}$ м = 1 Ф Ферми
p, n

62

Протон:

$$q = +e$$

$$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,007 \text{ а.е.м} = 1836 m_e = 938,28 \text{ МэВ}$$

$$S = \frac{1}{2}$$

$$\mu_p = +2,79 \mu_n$$

↑ магнитный момент

$$\mu_n - \text{ядерный магнетон} \Rightarrow \mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

$$\mu_p = \frac{\mu_n}{500}$$

Нейтрон

Джеймс-Чедвик

$$q = 0 \quad m_n = 1,0087 \text{ а.е.м}$$

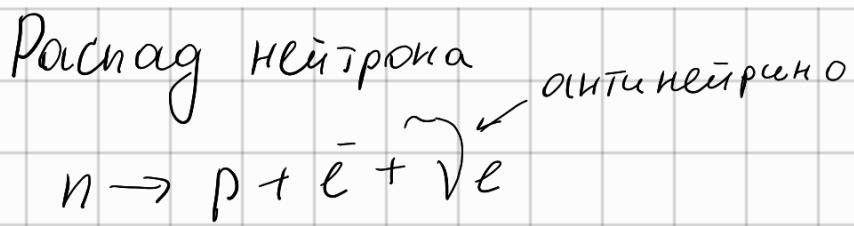
$$S = \frac{1}{2}$$

$$\mu_n = -1,91 \mu_n$$

↙ в 5 раз меньше
 $\mu = 15 \mu_n$

В свободном состоянии нейтрон нестабилен $T_{1/2} = 10 \text{ мин}$

Распад нейтрона



$$m_n - m_p = 2,5 m_e$$

1,5 m_e теряется \rightarrow превращается в E_k продуктов распада
 $1,5 m_e \cdot c^2$

Частицы, из которых состоят ядра атома - нуклон (р и n)

Характеристики атомного ядра **63**

Z - зарядовое число = число протонов
Заряд ядра Ze

A
 ZX

A - массовое число $p+n$, $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг

Изотоп - ядра с одинаковым Z , но разными A

Сверхтекучесть - нулевая вязкость

${}^1_1\text{H}$ - протий }
 ${}^2_1\text{H}$ - дейтерий } стабильный

${}^3_1\text{H}$ - тритий - радиоактивный

$$r = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ м} \cdot A^{1/3} = A^{1/3} \cdot 1 \text{ ф}$$

\uparrow радиус ядра

Плотности ядер одинаковы

Спин ядра складывается и спинов нуклона **63**

Сб-во Ядерные силы **64**

- 1) Коротко действующие, радиус действия $\sim 10^{-15}$ м
- 2) Зарядовое не зависимость. Нейтрона действуют также как ^{нейтрон и протон} 2 протона не зависят от эл. заряда
- 3) Зависят от взаимной ориентации спина
- 4) Не явл. центральными.
- 5) св-во насыщения. Каждый нуклон взаимодействует с огр. кол-вом нуклонов

65 Обменный характер э/м взаимодействия

Взаимодейств. осущ. посредством обмена виртуальными фотонами

$$e^- \rightleftharpoons e^- + \hbar\omega$$

\uparrow виртуальный фотон

$$\tau \hbar\omega \sim \hbar$$

радиус э/м взаимодействия λ

$$\lambda = c\tau \quad \tau = \frac{\hbar}{\hbar\omega}$$

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\hbar\omega}$$

Фотоны бьвают в частоты \Rightarrow сколь угодно малой E
 \Rightarrow из соотн. неопред позволяет пролететь сколь угодно
 большое расстояние

Обменный характер
 ядерных сил

$$\tau \Delta E \sim \hbar$$

$$\frac{c}{c} mc^2 \sim \hbar$$

$$m \sim \frac{\hbar}{ce}$$

$$m \sim \frac{10^{-34}}{10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ кг} \sim 300 m_e$$

← масса частицы
 переносчик

↑
 радиус ядерного взаимодействия

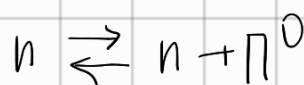
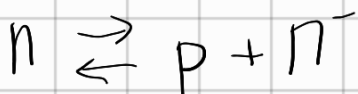
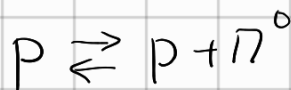
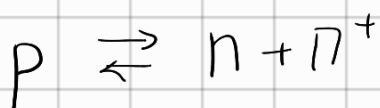
Мезоны - средние частицы

$207 m_e$ μ -мезон мюон не переносчик
 ядерного взаимодействия

π -мезоны пионы

π^+ -мезон $+e$ } $273 m_e$ время жизни $2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$
 π^- -мезон $-e$ }

π^0 -мезоны $q=0$ $264 m_e$ время жизни
 $\tau = 0,8 \cdot 10^{-16} \text{ с}$



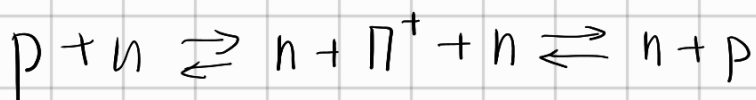
$$\mu_p = 2,79 \mu_N - \text{протон}$$

Протон какую-то часть времени существует нейтрона и пи плюс метода, а у последнего есть орбитальный магнитный момент, который меняет значение магнитного момента

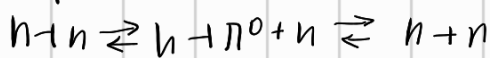
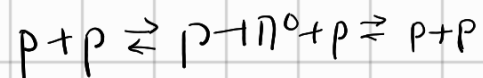
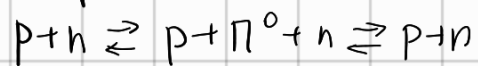
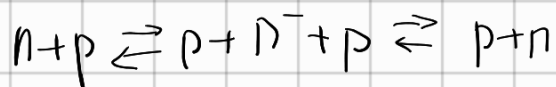
65

$$\mu_n = -1,91 \mu_N$$

Пи минус Мирона есть орбитальный магнитный момент, поэтому у нейтрона есть магнитный момент



Частица, бывшая протоном, стала нейтроном. И наоборот



Массы энергии связи ядра

Дефект масс. Масса атомного ядра немного меньше суммы масс протонов и нейтронов из которых он состоит

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_{\text{я}}$$

66

$$E_{\text{связи}} = \Delta m c^2$$

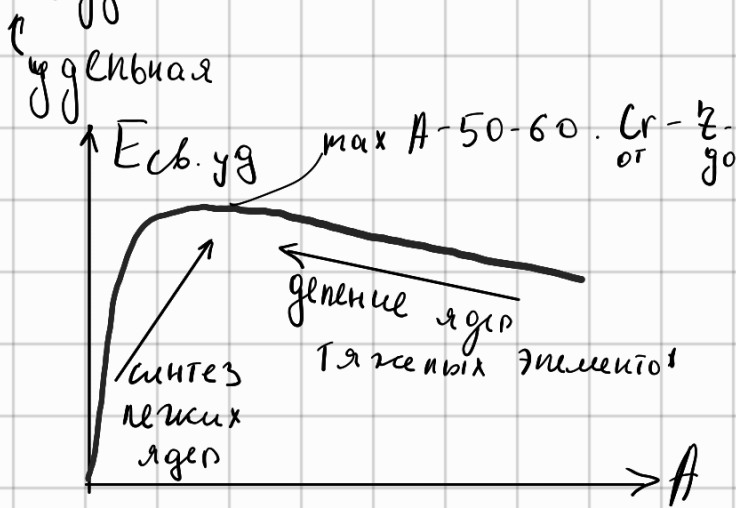
↖ Энергия, которая выделилась бы если это ядро образовалось из одних протонов и нейтронов. И наоборот, энергия необходимая, чтобы разбить ядро на протоны и нейтроны.

На практике ищут так

$$\Delta m = 2 m_n + (A - Z) m_n - m_{\text{атомея}}$$

Электроны очень далеко от ядра, по сравнению с размерами ядра. Энергия связи ядра с электронами ничтожна. Проще взвешивать целиком атом, а массы электронов сокращаются при вычитании.

$$\bar{E}_{\text{связ. у.г}} = \frac{E_{\text{св}}}{A} \quad E_{\text{связ}} = 7,1 \text{ МэВ}$$

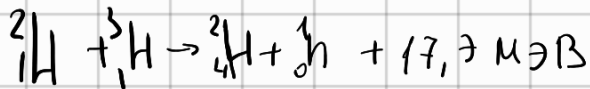


Ядерные реакции, те при которых энергия продуктов связи больше чем начальная энергия, могут идти самопроизвольно с выделением энергии

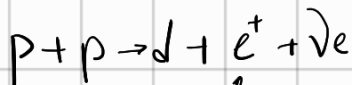
Термоядерный синтез 67

Высокая температура необходима для преодоления кулоновских сил отталкивания

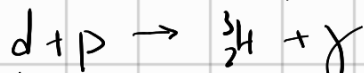
↓ бомба



протоно-протоный цикл в недрах звезд

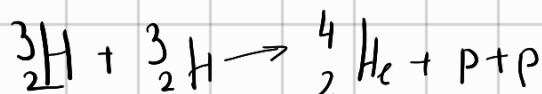


↑ позитрон



↓ $n + p$

← квант



Частицы и античастицы

69

Ур-ие Дирака

$$[\hat{E} - c \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \hat{p}_{\mu}] \Psi = 0$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_i \end{bmatrix}$$

$$\frac{E}{c} \quad p_x \quad p_y \quad p_z$$

Квадрат модуля вектора
релятивистский инвариант

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \text{inv}$$

$$E^2 - p^2 c^2 = \text{inv}$$

Если величина инвариантна, она имеет одно и то же значение в разных системах отсчета

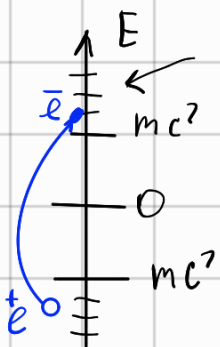
$$E^2 - p^2 c^2 = (m c^2)^2$$

↑ энергия покоя

$$E^2 = (m c^2)^2 + p^2 c^2$$

$$E = \pm \sqrt{(m c^2)^2 + p^2 c^2}$$

$$E_{\min} = m c^2$$



← дискретные уровни энергии

$$\gamma + \bar{e} = \bar{e} + e + e^+$$

$$\gamma + X \rightarrow X + \bar{e} + e^+$$

$$\bar{e} + e^+ \rightarrow \bar{e} + e^+ + \bar{e} + e^+$$

Если сумма кинетических энергий больше $2mc^2$, то
Могут родить ещё пару электронов и позитронов

Аннигиляция: $\bar{e} + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma (+\gamma)$ **69**

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

$$p + n \rightarrow p + n + p + \bar{p}$$

$$\bar{p} + p \rightarrow \bar{n} + n$$

$$\bar{p} + n \rightarrow \bar{n} + n + \pi^-$$

$$\bar{n} \quad \vec{L} \uparrow \uparrow \vec{J}$$

↑ мех. моменты совпадают с магн. моментом

$$n \quad \vec{L} \uparrow \downarrow \vec{J} \sim \text{как Борот}$$

$$\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

$$\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + 3\pi^0$$

$$\bar{p} + n \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^0 + \pi^0$$

⌋ абс. нейтральная частица, не имеющая античастицу
фотон, π^0 -мезон, η -мезон
Не могут аннигилировать

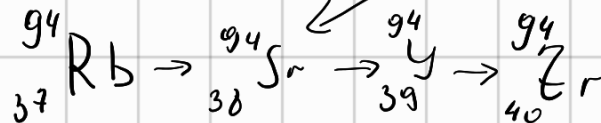
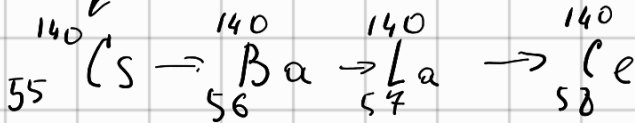
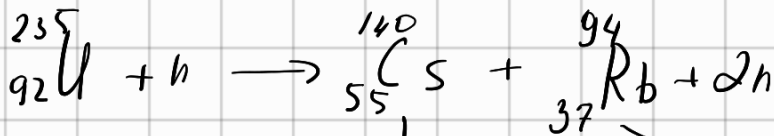
Барионный заряд

$$p, n \quad B = 1$$
$$\bar{p}, \bar{n} \quad B = -1$$

Деление ядер **67**

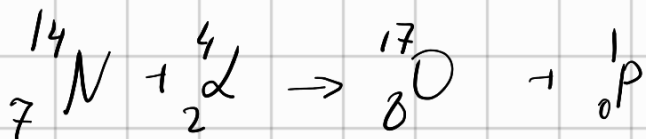
Деление может быть спонтанным или вызываться облучением

n, p, d, α, γ

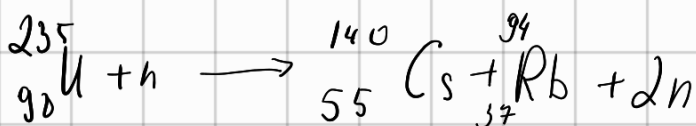
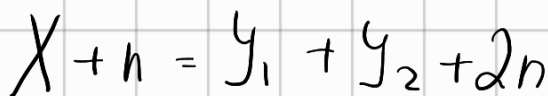


Конечные продукты стабильные

Реакции Резерфорда

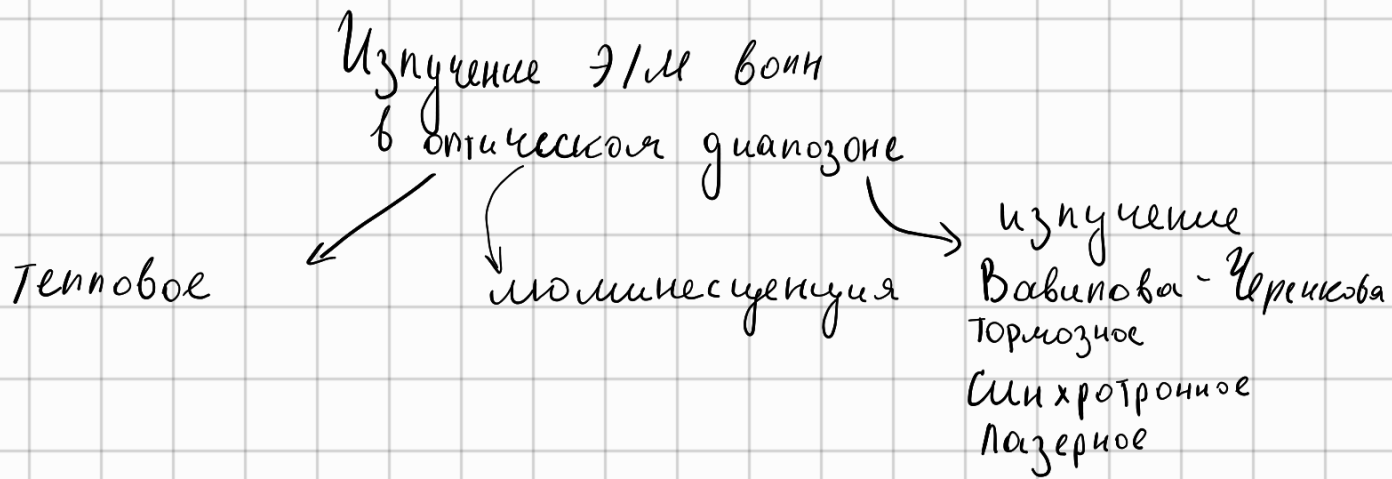


Цепные ядерные реакции (повторяющиеся)



Люминесценция

57



люминесценция - избыток излучения над тепловым, если это излучение обладает инерционностью, многократно превыш. период световых колебаний

Хемилюминесценция - люминесценция за счет хим. реакции за счет хим. энергии

Электролюминесценция

Катодолюминесценция - свечение твердых тел при бомбардировке электронами

Фотолюминесценция - излучение под действием света.

Эффект Вавилова Черенкова. Наблюдается если электроны движутся со скоростью, превышающую скорость света.

$$v_{\text{ср}} = \frac{c}{n}$$

↑ скорость света в среде

Люминисценция возникает за счет того, что электрон переходит в возбужденное состояние в атоме, а потом переходит в основное состояние

По времени жизни в возбужденном состоянии различают флюоресценцию и фосфоресценция

$$t \sim 10^{-11} \sim 10^{-6} \text{ с}$$

$$t \sim 10^{-6} \sim 10^2 \text{ с}$$

иногда до нескольких часов

Сульфат цинка $ZnSO_4 \sim 0,5 \text{ ч}$

Антимонат стронция несколько часов

Радиоактивность **БЗ**

Радиоактивность - самопроизвольное превращение одних атомных ядер в других сопровождаемое испусканием частиц

Масса продуктов радиоактивного распада меньше массы исходного ядра. Продукты распада движутся

Виды радиоактивности

1) α -распад

Испускается α -частица

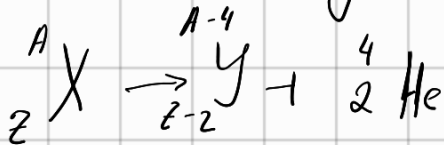
2) β -распад

3) γ -излучение ядер

4) Столкновое деление тяжелых ядер

5) Протонная радиоактивность.

α - распад



$$v_\alpha \sim \frac{c}{10}$$

Ионизирует молекулы вещества

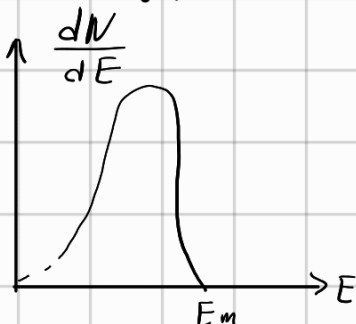
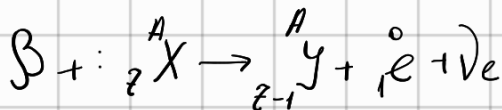
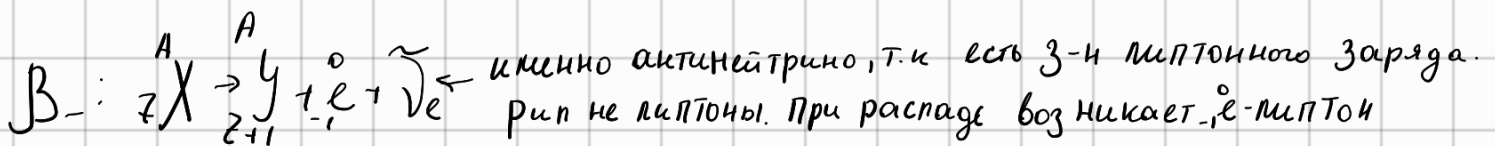
Самая большая поражающая способность, но самая низкая проникаемость

β -распад

β^-

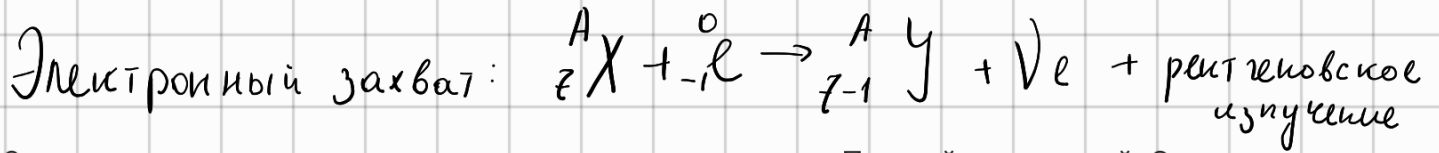
β^+

Электронный захват



Если взять разность начальной и конечной массы и умножить квадрат скорости света получится суммарная кинетическая энергия продуктов распада. Есть Закон сохранения импульса, из него можно вывести какая часть энергии, выделяющаяся при бета распаде, имеет дочернее ядро, а какую электрон. Сумма этих энергий должна быть равна дефекту масс умноженной на квадрат скорости света, значит все электроны должны иметь одинаковую энергию. Но если электроны обладают разными энергиями, то часть энергии должна куда-то деваться.

Паули высказал, что испускается ещё одна частица, называемая нейтрино. Существование нейтрино объяснило потерю энергии.



2 механизма возникновения рентгеновского излучения. Первый - тормозной. Электроны разгоняются электрическим полем, тормозятся, и испускаются рентгеновские лучи. Вторым, при электронном захвате. Из внутренних оболочек один из электронов захватывается ядром. Возникло пустое место на одной из внутренних оболочек. Электрон из внешних оболочек переходит на внутреннюю, энергия соответствует квантам рентгеновского излучения

Вывод Закона Радиоактивного распада

При t виде радиоактивного распада число распадающихся ядер \sim числу ядер и промежутку времени

$$dN \sim N \\ \sim dt$$

$$dN = -\lambda N dt$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^t -\lambda dt$$

$$\ln \left| \frac{N}{N_0} \right| = -\lambda t$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

↑
оставшихся

Закон радиоактивного распада

Среднее время жизни ядер

$$\tau = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} t \left| \frac{dN}{dt} \right| dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \leftarrow \text{постоянная распада}$$

В моменте времени t , dN/dt - число ядер, которые распались за время dt , но одновременно это число ядер, у которых продолжительность жизни от t до $t + dt$. Число таких ядер нужно умножить на t и разделить на общее число ядер и проинтегрировать по всем временам.

T - период полураспада

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\frac{T}{\tau}}$$

$$-\ln 2 = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow T = \tau \ln 2 = 0,693\tau$$

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}} \quad \text{среднее} \quad N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

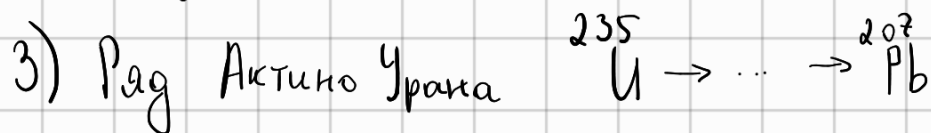
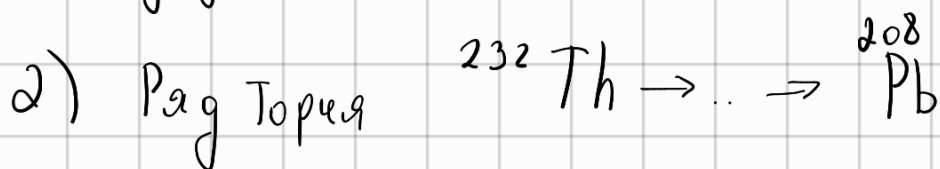
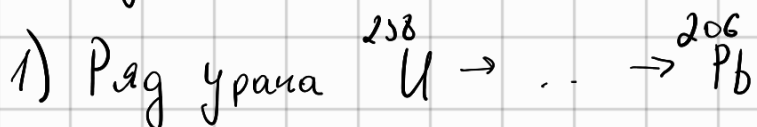
A - активность

↑ число распадов за ед. времени

$$A = -\frac{dN}{dt} \quad \frac{1}{c} = \text{Бк} \quad \text{Беккерель}$$

$$\text{Кюри } 1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$$

3 радиоактивных ряда



Элементарные частицы

70

Элементарная частица - частица, в ходе всех наблюдаемых явлений ведет себя как единое целое

Элементарные частицы могут превращаться друг в друга

4 вида взаимодействий между частицами

Вид взаимодействия	Константа взаимодействия <small>интенсивность взаимодействия</small>	Время распада частицы за счет взаимодейств. , с	Радиус взаимодейств. , м	Частица-переносчик
Сильное (ядерное) (остомы сохр. собою) цепность	1	$10^{-23} - 10^{-24}$	10^{-15}	π -мезоны
Э/м	10^{-2} (точно $\frac{1}{137}$)	10^{-16}	∞	Фотон
Слабое (превращение элементарных частиц)	$10^{-6} - 10^{-14}$	10^{-8}	10^{-18}	Векторные бозоны W^+ W^- Z^0
Гравитационное	10^{-38}		∞	Гравитон

Гупр и Гтр - Э/м (атомы молекулы вз-ют)

Эп. частицы **71**

Безмассовые

0) Гравитоны
(не обнаружены)

Фотон
глюоны } если они есть
гравитоны }

Истинно нейтральные

Фотон, π^0 -мезон,

1) Фотон
Сильное и слабое взаимодействие не участв.

η -мезоны: η η'

Z -бозон

Бозон Хиггса

Э/м и грав - участв бозоны

2) Лептоны

Не участв: сильное

Участв: слабое, γ/μ , гравитационное

$e^-; e^+$, мюоны μ^-, μ^+ - мезоны, τ -лептоны = τ, ν_{τ}

Нейтрино ν и $\bar{\nu} \leq 0,1 \text{ ЭВ}$

Лептонный заряд - отдельная физ. величина

частицу = +1 античастицу = -1

3) Адроны

у всех адронов есть сильное и слабое взаимодействие.

3.1 Мезоны

Нет Барнионного заряда

π -мезоны: π^+, π^-, π^0 (пионы)

K -мезоны: K^+, K^-, K^0 (каоны)

η -мезоны: η, η' они нейтральные

Резонансы

(короткоживущие)

$$\sim 10^{-23} - 10^{-22} \text{ с}$$

3.2 Барныоны

Барнионный заряд B

а) нуклоны

б) гипероны

$\Lambda, \Sigma^+, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-$

Λ (лямбда)
сигма

Λ^-

Кварковая структура Адронов

72

Тип (аромат)	Электр заряд, e	Барионный заряд B	Спин	Странность	Шарм (очарование)	Красота	Правдивость	Цвет
U up	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	Синий желтый Красный у кварков оранж фиолет. Зеленый у антиквар
d down	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	
S Strange	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	0	
C charmed	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	+1	0	0	
B Bottom Beauty	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	+1	0	
T Truth	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	

Кроме спина у антикварков наоборот

$$p = u \bar{u} d$$

$$n = u \bar{d} d$$

$$p^+ = u \bar{d}$$

$$n^- = \bar{u} d$$

$$p^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} u \bar{u} - \frac{1}{\sqrt{2}} d \bar{d}$$

Адроны бесцветные

Глюоны - переносчики взаимодей. между кварками

Конфаймент 72

При попытке разнести кварки, силы взаимодействия начинают бесконечно возрастать и невозможно разорвать и получить отдельные кварки

Теорема Эмми Нётер 74

Каждой непрерывной симметрии действия соответствует некий закон сохранения.

Закон Сохр	Виды взаимодей.			Симметрия
	сильное	элм	слабое	
E	+	+	+	однородность времени
P	+	+	+	однородность пр-ва
L	+	+	+	Изотропия пр-ва (одинаковость св-в пр-ва во всех направлениях)
Q (эл.з)	+	+	+	Особые симметрии
β Барийный заряд	+	+	+	ψ -ф-ции
L лептонный	+	+	+	

Закон Сохр	Виды взаимодей.			Симметрия
	сильное	э/м	слабое	
T Изотопический спин	+	-	-	$SU(3)$
S Странность	+	+	-	?
Четность	+	+	-	симметрия пр-ва отн зеркального отображ

Вайенберг, Глэшоу, Салам создали единую теорию электро-слабых взаимодействий **13**

Переносчики W^+ , W^- , Z^0 - векторные бозоны

Теория великого объединения
(стандартная модель)

Общая теория объедин. э/м, слабое и сильное взаимодействия

Бозон Хиггса $m = 136 \text{ GeV} = 125 \text{ ГэВ}$

Постулаты Бора

32

1. Электрон в атоме водорода может двигаться только по опред. стационар. орбитам находясь на которых электрон не излучает.

$$L = m v r = n \hbar$$

2. Испускание или поглощение происходит при переходе из одного состояния в другое

$$\hbar \omega_{nk} = E_k - E_n, \quad k > n$$