

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Уравнение Шредингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.
2. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Виды радиоактивных излучений. Активность.
3. Температурный коэффициент сопротивления $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$ чистого беспримесного германия при комнатной температуре равен $\alpha = -0,05\text{K}^{-1}$. Найдите ширину запрещенной зоны данного полупроводника.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Температурный коэффициент сопротивления...

$$\sigma(T) = \sigma_0 e^{\frac{\varepsilon_\delta}{2kT}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} = \frac{d \ln \rho}{dT}; \quad \alpha dT = d \ln \rho;$$

$$\rho = e^{\alpha T}; \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = e^{-\alpha T};$$

$$\Delta E_3 = -2kT \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = -2kT e^{-\alpha T} \ln \frac{1}{\sigma_0} e^{-\alpha T};$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}; \quad \sigma(T) = \sigma_0 e^{\frac{\varepsilon_\delta}{2kT}}; \quad \alpha = \sigma \frac{1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dT} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \left(\frac{\varepsilon_\delta}{2kT} \right)$$

$$\alpha = -\frac{\varepsilon_\delta}{2kT^2}; \quad \varepsilon_\delta = -2kT^2 \alpha$$

8. Уравнение Шредингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.

Уравнение Шредингера.

Волновая функция должна являться решением уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

где m – масса частицы, U – действительная функция координат и времени, такая, что вектор $-\text{grad}U$ является классическим аналогом силы, действующей на частицу. В случае, когда U не зависит от времени, она совпадает с потенциальной энергией.

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \text{результат действия на функцию } \Psi \text{ оператора Лапласа.}$$

Следовательно, волновая функция должна быть непрерывно-дифференцируемой один раз по времени и два раза по пространственным координатам.

$$\text{Уравнение } i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi \text{ носит название (временного) уравнения Шредингера}$$

по имени немецкого физика Эрвина Шредингера, предложившего его в 1926 году.

Уравнение Шредингера является одним из постулатов (аксиом) квантовой механики и играет в атомной физике такую же фундаментальную роль, как уравнения Ньютона в классической механике и уравнения Максвелла в классической электродинамике.

Уравнение Шредингера является линейным, т.е. линейная комбинация решений тоже является решением. Действительно, если каждая из функций Ψ_1 и Ψ_2 является решением, то их линейная комбинация $\Psi_3 = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$ (где c_1 и c_2 – некоторые константы) тоже является решением, т.к. уравнение $i\hbar \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_3 + U \cdot \Psi_3$ в силу равенств

$$i\hbar \frac{\partial (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2) + U \cdot (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2)$$

$$\text{или } c_1 i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + c_2 i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -c_1 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + c_1 U \cdot \Psi_1 - c_2 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_2 + c_2 U \cdot \Psi_2$$

является линейной комбинацией уравнений

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + U \cdot \Psi_1 \text{ и } i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_2 + U \cdot \Psi_2.$$

Следовательно, принцип суперпозиции состояний не противоречит уравнению Шредингера.

Замечание. Сопряжённое уравнение Шредингера для волновой функции имеет вид

$$\left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi \right)^* \text{ или } -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi^* + U \cdot \Psi^*.$$

Условие нормировки.

Уравнение Шрёдингера линейное, поэтому если решением является функция Ψ , то решением является также и функция $\Psi_1 = c \cdot \Psi$, где $c = const$. В этом смысле говорят, что волновая функция определяется с точностью до константы.

Из физического смысла следует, что для всей области определения волновой функции V справедливо утверждение – вероятность того, что частица находится в этой области V , равна единице

$$P(V) = \int_V |\Psi|^2 dV = 1.$$

Следовательно, если при решении задачи о поиске волновой функции в некоторой области было найдено решение Ψ_1 , но при этом $\int_V |\Psi_1|^2 dV = |C|^2 \neq 1$, то в качестве волновой функции следует

взять функцию $\Psi_2 = \frac{1}{C} \Psi_1$, т.к. она тоже является решением и для неё выполняется

$$\int_V |\Psi_2|^2 dV = \int_V \left| \frac{\Psi_1}{C} \right|^2 dV = \frac{1}{|C|^2} \int_V |\Psi_1|^2 dV = \frac{1}{|C|^2} |C|^2 = 1.$$

Правило выбора решения Ψ , такого, что для него во всей области выполняется условие

$$P(V) = \int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

называется условием нормировки решения на единицу или просто условием нормировки.

42. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Активность. Естественная и искусственная радиоактивность.

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, с испусканием частиц.

Основной закон радиоактивного распада: $N(t) = N_0 \exp[-\lambda t] = N_0 2^{\left[-\frac{t}{\tau}\right]}$

Постоянная распада $\lambda = -\frac{dN}{Ndt}$, вероятность распада ядра за единицу времени

Период полураспада: $\tau = \ln 2 / \lambda$, время за которое распадется половина ядер

Среднее время жизни ядра: $\tau_{\text{жизни}} = 1/\lambda$

- **К-захват электрона:** ${}_{-1}^0e + {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A X + {}_0^0\gamma$
- **Гамма-распад** – испускание жесткого коротковолнового ЭМИ.

Активность радиоактивного источника – количество распадов за единицу времени. В Международной системе единиц (СИ) единицей активности является **беккерель** (Бк, Вq).

В образце с активностью 1 Бк происходит в среднем 1 распад в секунду: $1\text{Бк} = 1\text{с}^{-1}$

Внесистемными единицами активности являются:

- кюри (Ки, Ci); $1\text{Ки} = 3,7 \cdot 10^{10}\text{Бк}$.
- резерфорд (Рд, Rd); $1\text{Рд} = 10^6\text{Бк}$ (используется редко).

Радиоактивность ядер, существующих в природных условиях, называется естественной. Радиоактивность ядер, полученных с помощью ядерных реакций в лабораторных условиях (например, на ускорителях), называется искусственной.

Билет №2

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

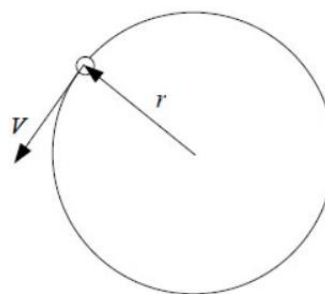
1. Примесная проводимость полупроводников. Полупроводники р- и n-типа. Уровень Ферми в примесных полупроводниках.
2. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.
3. Покажите, что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля электрона. Определите длину волны де Бройля электрона на круговой орбите с главным квантовым числом n .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Покажите, что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите...

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p}$$
$$\frac{mV^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{e^2}{r^2}$$
$$mVr = n\hbar$$
$$\rightarrow r(n) = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$
$$V = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar n}$$
$$l(n) = 2\pi r(n) = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$
$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{mV} = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n}{me^2}$$
$$\frac{l}{\lambda_B} = n$$



33. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводниках n-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника n-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника n-типа.

Примесная проводимость полупроводников.

Некоторые примеси даже в малых концентрациях очень сильно изменяют проводимость полупроводника. Такие примеси приводят либо к появлению:

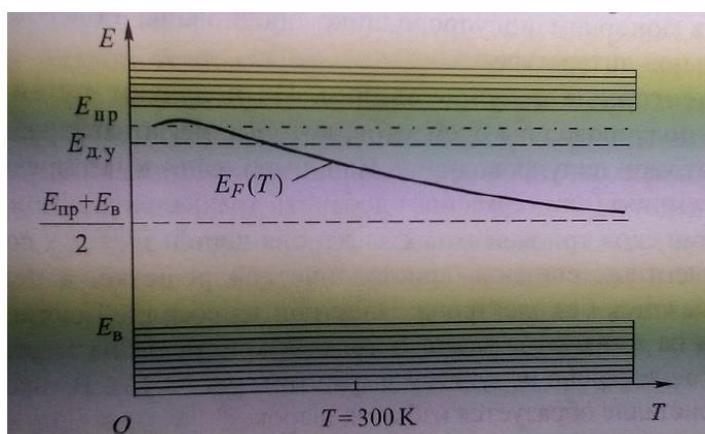
- Избыточного количества свободных электронов – примеси, которые **отдают электроны** – **донорные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией свободных электронов, называются полупроводниками **n-типа**.
- Избыточного количества дырок – **примеси, забирающие свободные электроны** – **акцепторные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией дырок называются полупроводниками **p-типа**.

Донорные полупроводники получают, путем добавления в полупроводник элементов, от которых легко отрывается электрон. К примеру, добавляя к 4 валентному кремнию 5-валентный мышьяк, мышьяк использует свои четыре валентных электрона для создания валентных связей с кристаллической решеткой кремния, а один электрон останется «лишним».

Энергия ионизации «лишнего» электрона крайне мала, и составляет порядка 0,01эВ. Он легко отрывается от своего атома и становится свободным электроном. Как и в случае беспримесного проводника, происходят процессы генерации пар электрон-дырка, но их вклад в общую проводимость значительно меньше при комнатной температуре.

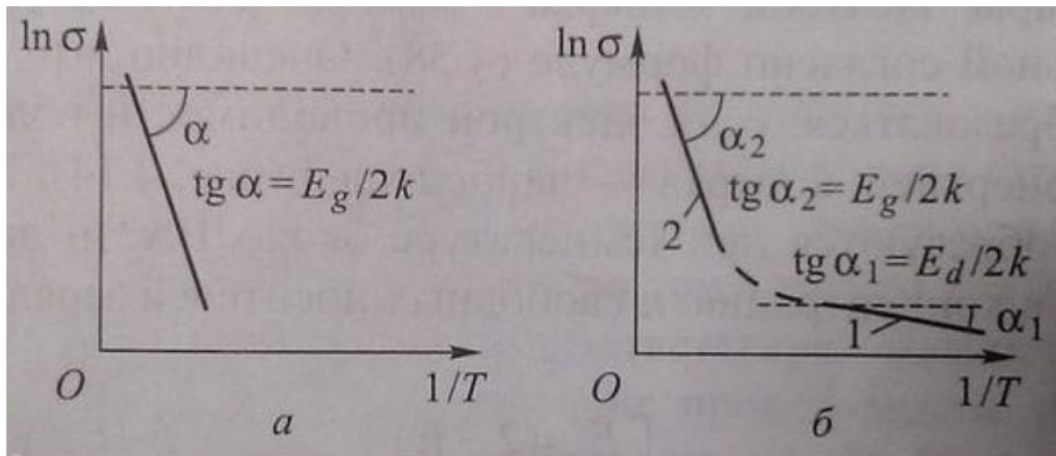
Согласно зонной теории, это приведет к появлению дополнительных донорных уровней вблизи нижней границы зоны проводимости. Электрону для перехода в зону проводимости нужно значительно меньше энергии (энергия активации донорной примеси $E_{дон}$), чем для перехода их валентной зоны (эта энергия соответствует ширине запрещенной зоны).

С ростом температуры энергия Ферми, которая при низкой температуре находится посередине между донорным уровнем и зоной проводимости, из-за «истощения» донорных уровней, а также из-за активной генерации пар электрон-дырка возвращается в середину запрещенной зоны.



Температурная зависимость логарифма проводимости примесного полупроводника n-типа.

На графиках показано сравнение логарифма проводимости беспримесного проводника и донорного проводника. Из графика видно, что донорный проводник приобретает проводимость при значительно более низкой температуре.



Построение такого графика используют для экспериментального определения ширины запрещенной зоны.

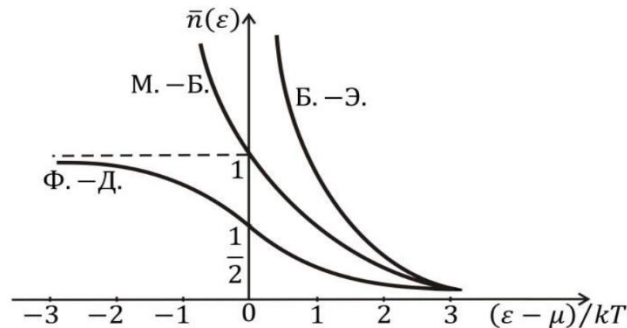
24. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.

Квантовые статистические распределения

Мы рассматриваем 3 статистики, каждая из которых основывается на эргодической гипотезе. Эргодическая гипотеза говорит, что все доступные микросостояния частицы равновероятны за длительный период времени.

Классическая статистика (статистика Больцмана):

$f(\varepsilon) = A e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ (среднее число частиц с энергией ε), в статистике Больцмана 2 частицы различимы.



В квантовых статистиках действует **принцип тождественности одинаковых частиц** – в системе одинаковых частиц реализуются только такие состояния, которые не меняются при перестановке частиц местами, иными словами: одна частица неотличима от другой такой же.

Возьмем волновую функцию $\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N, t)$, зависящую от координат частиц системы.

Если ввести оператор перестановки, переставляющий i и j частицы системы местами:

$$\hat{P}_{ij}\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N, t) = \psi(q_1, \dots, q_j, \dots, q_i, \dots, q_N, t)$$

То принцип тождественности можно представить в виде $\hat{P}_{ij}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}_{ij}$. Из этого следует, что $\hat{P}_{ij}\psi$ также является решением уравнения Шредингера: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{P}_{ij}\psi = \hat{H}\hat{P}_{ij}\psi$

Иначе можно сказать, что ψ и $\hat{P}_{ij}\psi$ описывают одно и то же состояние, а, следовательно, могут отличаться лишь постоянным множителем: $\hat{P}_{ij}\psi = \lambda\psi$, подействовав еще раз оператором перестановки на левую и правую часть, получим: $\hat{P}_{ij}^2\psi = \lambda\hat{P}_{ij}\psi$, поскольку два раза подействовав оператором перестановки на одну и ту же функцию, мы получаем ее же саму, получим: $\psi = \lambda^2\psi$, отсюда $\lambda = \pm 1$

Если $\hat{P}_{ij}\psi = \psi$, то состояние называется **симметричным**. Частицы, описываемыми такими волновыми функциями, называются Бозе-частицами, или **Бозонами** – они

подчиняются **статистике Бозе-Эйнштейна**: $f(\epsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}} - 1}$

Если $\hat{P}_{ij}\psi = -\psi$, то состояние называется **антисимметричным**. Частицы, описываемыми такими волновыми функциями, называются Ферми-частицами, или **Фермионы** – они

подчиняются **статистике Ферми-Дирака**: $f(\epsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}} + 1}$

Бозоны – частицы-коммунисты, два бозона могут занимать одно и то же состояние, **фермионы** – частицы-индивидуалисты, для них действует принцип Паули.

$f(\epsilon_i)$ – среднее число частиц в состоянии с энергией ϵ_i , μ – химический потенциал, термодинамическая функция, применяемая при описании состояния систем с переменным числом частиц. Представляет собой энергию добавления одной частицы в систему без совершения работы

Билет №3

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3
 по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм материи. Опыты по дифракции микрочастиц.
2. Структура атомного ядра. Характеристики ядер: заряд, размеры, масса, энергия связи. Свойства и обменный характер ядерных сил.
3. До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов была равна средней энергии свободных электронов в серебре при $T = 0$ К? Энергия Ферми серебра $E_F = 5,51$ эВ.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
 (число, месяц, год)

До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ...

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot F(E) dE}{\int_0^{\infty} F(E) dE}, \text{ где } F(E) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}m_0^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases} \quad \text{– функция распределения свободных электронов по энергиям}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F.$$

Для классического газа: $\langle E \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT$

$$T = \frac{2}{5} \frac{E_F}{k} = 2,55 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

6. Корпускулярно-волновой дуализм материи. Гипотеза де Бройля. Опыты по дифракции микрочастиц.

Де Бройль предположил, что любая частица вещества обладает волновыми свойствами при движении.

Частота волны де Бройля: $\omega_B = E/\hbar$

Длина волны де Бройля: $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$

$$\begin{cases} E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 \\ mc^2 = E_k + m_0c^2 \end{cases} \Rightarrow p = \sqrt{2m_0E_k} \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0c^2}}$$

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_k} \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0c^2}}}$$

Для нерелятивистских частиц: $p = \sqrt{2m_0E_k}$, $\lambda_B = 2\pi\hbar/\sqrt{2m_0E_k}$

Электрон ($E_k = eU$) становится релятивистским при ускоряющей разности потенциалов более 10 кВ, для нерелятивистского электрона длина волны де Бройля порядка ангстрема, что заставляет его проявлять волновые свойства в кристаллах.

Опыты по дифракции микрочастиц.

Опыт Дэвиссона-Джермера (1927 г.) – дифракция пучка электронов, выстреливаемого электронной пушкой, при отражении от монокристалла никеля.

Детектор показывал зависимость интенсивности рассеянного пучка электронов от угла рассеяния. Результаты опыта были идентичны результатам опыта по дифракции рентгеновских лучей, была получена формула идентичная условию Вульфа-Брэггов ($2d\sin\theta$ – разность хода) – условие максимума:

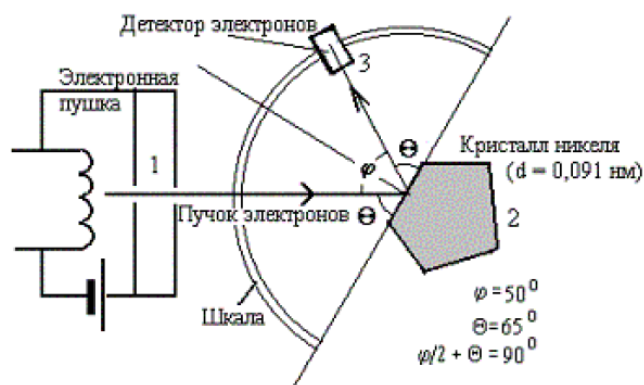
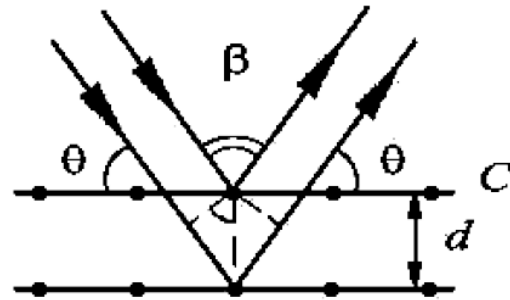
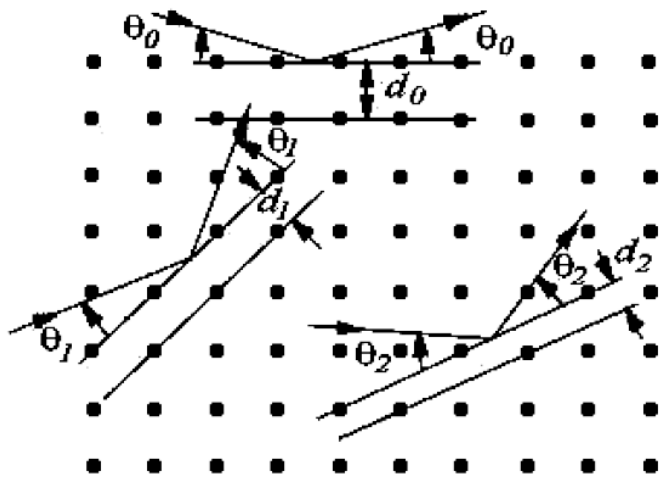
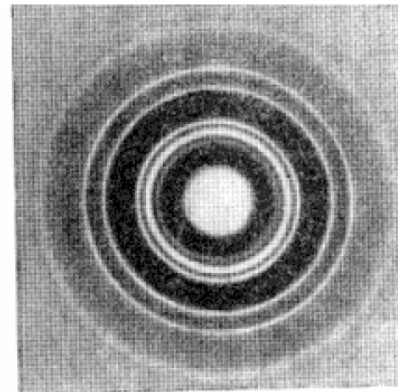
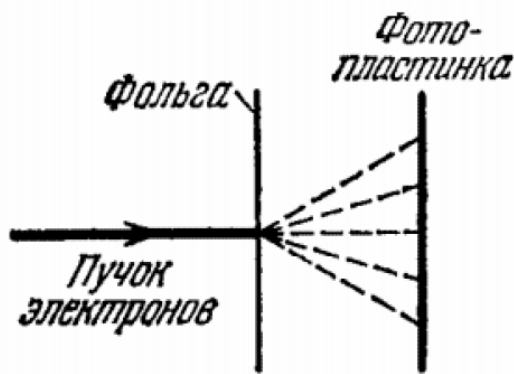


Рис. 2

$$2d\sin\theta = n\lambda_B, n = 1,2,3 \dots$$



Опыт Томсона-Тартаковского



а

б

Рис. 17.4

Для наблюдения дифракции электронов Томсон и Тартаковский пропускали пучок электронов через металлическую поликристаллическую пластину, рассеянные на хаотически расположенных кристаллах электроны давали на фотографической пластинке систему интерференционных колец. Чтобы объяснить, что система интерференционных колец порождается не рассеянными электронами, а вторичным рентгеновским излучением, на пути рассеянных электронов между металлической пластинкой и фотопластинкой создавалось дополнительное магнитное поле, искажающее интерференционную картину.

Показатель преломления: пучок электронов преломляется при прохождении через металл, это объясняется тем, что внутри металла полная энергия электрона увеличивается на величину $e\varphi_0 = A_{\text{ВЫХ}}$ (в металле есть внутренний усредненный потенциал). Из-за увеличения энергии, в металле уменьшается длина волны де Бройля, соответственно уменьшается фазовая скорость $v_\phi = c^2/v$

$$n = \frac{v_\phi^{\text{вак}}}{v_\phi^{\text{мет}}} = \frac{v^{\text{мет}}}{v^{\text{вак}}} = \sqrt{1 + \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{E_k}} = \sqrt{1 + \frac{\varphi_0}{U}}$$

Показатель преломления: пучок электронов преломляется при прохождении через металл, это объясняется тем, что внутри металла полная энергия электрона увеличивается на величину $e\varphi_0 = A_{\text{ВЫХ}}$ (в металле есть внутренний усредненный потенциал). Из-за увеличения энергии, в металле уменьшается длина волны де Бройля, соответственно уменьшается фазовая скорость $v_{\phi} = c^2/v$

$$n = \frac{v_{\phi}^{\text{ВАК}}}{v_{\phi}^{\text{МЕТ}}} = \frac{v^{\text{МЕТ}}}{v^{\text{ВАК}}} = \sqrt{1 + \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{E_k}} = \sqrt{1 + \frac{\varphi_0}{U}}$$

Волны де Бройля. Границы применимости квантовой механики.

Движущейся частице ставится в соответствии волна де Бройля:

$$\Psi = A \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - Px) \right]$$

$Et - Px$ – фаза этой волны.

Фазовая скорость: $v_{\phi} = \dot{x}$, $d(Et - Px)/dt = 0 \Rightarrow v_{\phi} = E/p = c^2/v$

Обнаружить волновые свойства макрообъектов невозможно, по причине того, что волна де Бройля пылинки будет меньше характерного размера любой периодической структуры, на которой можно было бы выявить ее волновые свойства.

Соответственно, волновые свойства микрочастиц проявляются на расстояниях порядка волны де Бройля для данной частицы.

Классическая механика, хорошо описывающая системы макроскопических масштабов, не способна описать все явления на уровне молекул, атомов, электронов и фотонов.

Квантовая механика адекватно описывает основные свойства и поведение атомов, ионов, молекул, конденсированных сред, и других систем с электронно-ядерным строением.

Квантовая механика также способна описывать поведение электронов, фотонов, а также других элементарных частиц, однако более точное релятивистски инвариантное описание превращений элементарных частиц строится в рамках квантовой теории поля.

Эксперименты подтверждают результаты, полученные с помощью квантовой механики.

40. Структура атомного ядра. Характеристики ядер: заряд, масса, размеры, энергия связи. Свойства и обменный характер ядерных сил.

Существование ядра было доказано в опытах Резерфорда. Пространственные размеры ядра – порядка стотысячной ангстрема. В ядре сосредоточено 99,9% массы атома.

Ядро состоит из:

- Протонов: масса протона равна 1836 масс электрона, протон заряжен положительным элементарным зарядом, имеет полуцелый спин $\frac{1}{2}$. Протон имеет собственный магнитный момент $\mu_p = 2,7928 \mu_n$ ($\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$ ядерный магнетон, в 1836 раз меньше магнетона Бора), который в 660 раз меньше магнитного момента электрона. В свободном состоянии протон абсолютно стабилен (период полураспада много больше, чем возраст Вселенной)
- Нейтронов: масса нейтрона на 2,5 массы электрона больше, чем масса протона, нейтрон не заряжен, но имеет полуцелый спин $\frac{1}{2}$, и собственный магнитный момент $\mu_n = -1,9131 \mu_n$ (магнитный момент нейтрона направлен против механического момента). Нейтроны устойчивы только в составе ядра, свободный нейтрон распадается на протон, электрон и антинейтрино со средним временем жизни 12 минут.

Структура ядра обозначается как ${}^A_Z X$

X – обозначение химического элемента, Z – зарядовое число (число протонов), A – массовое число (число протонов и нейтронов).

Два ядра являются:

- Изотопами одного и того же химического элемента, если у них одинаковое зарядовое и разное массовые числа.
- Изобарами, если у них одинаковое массовое, и разные зарядовые числа.
- Изомерами, если у них одинаковые массовое и зарядовое число, но разный период полураспада.

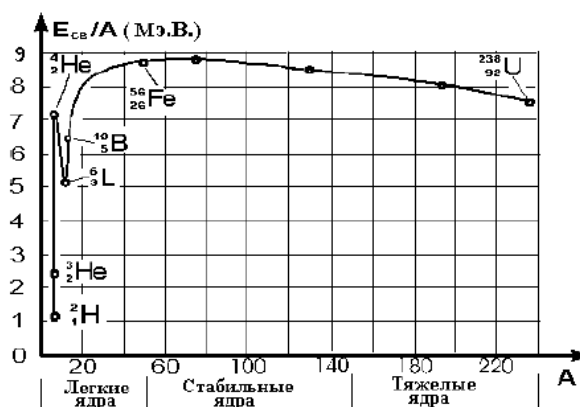
Суммарная масса покоя нуклонов больше массы покоя ядра. Эта разница называется дефектом массы: $Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} = \Delta m$

Соответственно, энергия системы невзаимодействующих нуклонов больше энергии ядра на величину энергии связи: $E_{\text{св}} = \Delta mc^2$

Можно говорить об удельной энергии связи – энергия связи на один нуклон: $E_{\text{уд.св}} = E_{\text{св}}/A$

Максимальная удельная энергия связи приходится на элементы, с массовыми числами 50-60 (стабильные ядра)

Самые стабильные ядра: хром, железо, кобальт. Энергетически выгоден: распад тяжелых ядер, синтез из легких ядер.



Ядерные силы

Нуклоны в ядре связаны между собой ядерными силами; их свойства:

- Ядерные силы – проявление сильного взаимодействия, которое на порядок интенсивнее электромагнитных сил, взаимоотталкивающих протоны.
- Ядерные силы – «гигант с короткими руками», они проявляются лишь на расстояниях порядка размера ядра (стотысячная ангстрема), на существенно меньших расстояниях они становятся силами отталкивания.
- Ядерные силы, действующие между двумя нуклонами, не зависят от зарядов взаимодействующих частиц.
- Ядерные силы не являются центральными, они направлены под углом к прямой, соединяющей центры нуклонов, и зависят от их взаимной ориентации.
- Свойство насыщения: в сферу силового действия одного нуклона может попасть только ограниченное количество соседних нуклонов.

Некоторые свойства ядерных сил описываются в рамках мезонной теории: вводится виртуальная частица – *мезон*, являющаяся переносчиком ядерного взаимодействия. Существование мезонов вытекает из неопределенности энергии: в течении конечного промежутка времени система имеет неопределенность энергии $\Delta E \tau = \hbar$;

Таким образом, нуклон может без потери энергии выпустить частицу энергии $\Delta E = m_M c^2$, среднее время жизни которой $\tau = \hbar / \Delta E$.

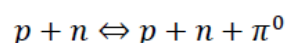
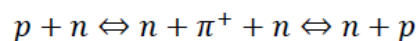
В рамках этой теории объясняется короткий радиус ядерного взаимодействия: поскольку мезон не может двигаться быстрее скорости света, радиус облака виртуальных мезонов, которое окружает каждый нуклон, равен:

$$r_M = c\tau = c * \frac{\hbar}{m_M c^2} = \frac{\hbar}{m_M c} = \lambda_M$$

То есть, комптоновской длине мезона. Поскольку, радиус сильного взаимодействия равен 1..2 фм, мезон должен иметь массу, равную 200..300 масс электрона.

В современной мезонной теории обнаружено несколько видов мезонов, с массами больше, чем 300 масс электронов, а также обнаружена предсказанная частица ядерного взаимодействия, названная пи-мезоном. Пи-мезоны имеют массу около 270 масс электрона, могут иметь положительный, отрицательный элементарный заряд, а также быть нейтральными. Пи-мезоны имеют нулевой спин.

Ядерное взаимодействие таким образом можно интерпретировать как обмен пи-мезонами, к примеру по схемам:



Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Прохождение микрочастицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.
2. Собственная проводимость полупроводников. Концентрация электронов и дырок в чистых беспримесных полупроводниках. Температурная зависимость собственной проводимости полупроводников. Уровень Ферми в собственных полупроводниках.
3. На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0 , чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами l ? Решите задачу для электронов в случае $l=10^{-15}$ м, что соответствует характерному размеру атомных ядер.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0 ...

Соотношение неопределенностей: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$. В нашем случае $\Delta x = l$, поэтому $l \Delta p_x \geq \hbar$.

Импульс частицы $p = \langle p \rangle + \Delta p$, где Δp – неопределенность импульса, $\langle p \rangle$ – среднее значение импульса.

Минимальное значение импульса равно его неопределенности: $l \Delta p_x = l \cdot p_{\min} \approx \hbar$.

$$\begin{aligned}(E_{\kappa} + mc^2)^2 &= m^2 c^4 + c^2 p^2 \\ E_{\kappa}^2 + 2mc^2 E_{\kappa} &= c^2 p^2 \\ p &= \frac{1}{c} \sqrt{E_{\kappa} (E_{\kappa} + 2m_0 c^2)} \\ p_{\min} &= \frac{1}{c} \sqrt{E_{\kappa_{\min}} (E_{\kappa_{\min}} + 2m_0 c^2)} \\ \frac{l}{c} \sqrt{E_{\kappa_{\min}} (E_{\kappa_{\min}} + 2m_0 c^2)} &= \frac{\hbar}{2} \\ E_{\kappa_{\min}}^2 + 2m_0 c^2 E_{\kappa_{\min}} - \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2 &= 0\end{aligned}$$

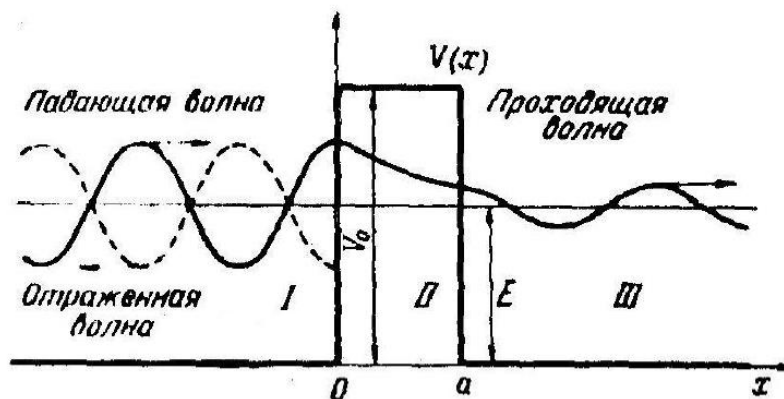
Решая это уравнение, получаем: $E_{\kappa_{\min}} = -m_0 c^2 \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2}$. Так как отрицательный

корень физического смысла не имеет, то: $E_{\kappa_{\min}} = -m_0 c^2 + c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\frac{\hbar}{2l}\right)^2}$.

13. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.

Барьер задается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & \text{if } x \in [0; a] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Аналогично:

$$\begin{cases} \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1'' + k_1^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2'' - k_2^2\psi_2 = 0 \\ \psi_3'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_3 = \psi_3'' + k_1^2\psi_3 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \exp[ik_1x] + B_1 \exp[-ik_1x] \\ \psi_2 = A_2 \exp[k_2x] + B_2 \exp[-k_2x] \\ \psi_3 = A_3 \exp[ik_1x] + B_3 \exp[-ik_1x] \end{cases}$$

Применим граничные условия, условия регулярности, условия нормированности:

- 1) A_1 положим 1 ; во третьей области нет отраженной волны $\Rightarrow B_3 = 0$;
- 2) Получим систему из 4 уравнений, с 4 неизвестными, применив условия непрерывности. Решив ее, получим коэффициент A_3 , описываемый громоздкой формулой.

Коэффициент прохождения:

$$\bar{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \text{grad} \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \text{grad} \Psi)$$

Определим $|\bar{j}_{\text{пад}}|, |\bar{j}_{\text{прош}}|$

$$|\bar{j}_{\text{пад}}| = \frac{\hbar k_1}{m} |A_1|^2 = \frac{\hbar k_1}{m} ; |\bar{j}_{\text{прош}}| = \frac{\hbar k_3}{m} |A_3|^2 = \frac{\hbar k_1}{m} |A_3|^2$$

Отсюда:

Коэффициент прохождения $D = \frac{|\bar{J}_{\text{прош}}|}{|\bar{J}_{\text{пад}}|} = |A_3|^2 \approx D_0 \exp[-2k_2 a] \approx \exp[-2k_2 a]$

$$D \approx \exp\left[-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right]$$

В случае криволинейного барьера, мы разбиваем его на прямоугольные элементарные участки шириной dx и суммируем:

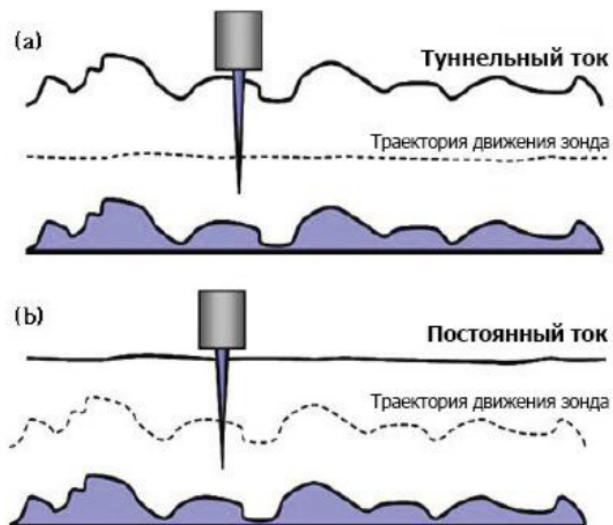
$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right]$$

Прохождение частицы через потенциальный барьер называется **туннельным эффектом**. Вероятность прохождения зависит от высоты и ширины барьера. При прохождении через барьер не меняется полная энергия частицы.

Туннельным эффектом объясняется контактная разность потенциалов, холодная эмиссия электронов из металла, альфа-распад.

Сканирующий туннельный микроскоп (СТМ):

Устройство, позволяющее «увидеть атом»: между иглой и поверхностью металлов создается разность потенциалов – потенциальный барьер. В силу туннельного эффекта между металлом и иглой возникает туннельный ток, по величине которого можно судить о вероятности прохождения, пропорциональной расстоянию от иглы до поверхности металла.



32. Собственная проводимость полупроводников. Концентрация электронов и дырок в чистых полупроводниках. Температурная зависимость собственной проводимости полупроводников. Уровень Ферми в чистых полупроводниках.

Собственная проводимость полупроводников: при высоких температурах электрон из валентной зоны может перескочить в зону проводимости – образуется пара носителей заряда: электрон и дырка. Концентрация электронов соответственно будет равна концентрации дырок.

Электрон проводимости – свободно перемещающийся внутри кристалла электрон, **дырка** – квази-частица, вакантное место на месте опустевшей ковалентной связи.

По закону Ома:

$$\vec{j} = -en\vec{v}_n + ep\vec{v}_p = \sigma\vec{E}$$

Отсюда:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$



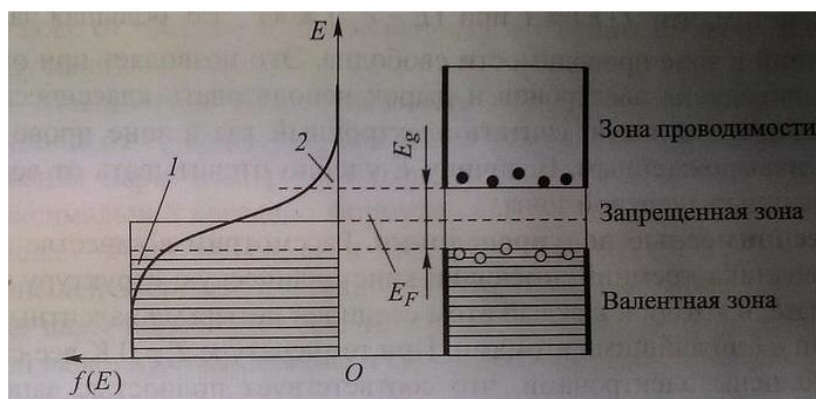
В случае собственного полупроводника: $\sigma = en(\mu_n + \mu_p)$

Концентрация носителей заряда в собственном полупроводнике является функцией от температуры:

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{E_g}{2kT}\right] = 2\left(\frac{2\pi kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} (m_n m_p)^{\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{E_g}{2kT}\right]$$

E_g – ширина запрещенной зоны.

Энергия Ферми в собственных полупроводниках находится приблизительно посередине запрещенной зоны, поскольку дырок в валентной зоне находится столько же, сколько электронов в зоне проводимости. На самом деле, из-за разницы в эффективной массе электрона и дырки, она несколько смещена от центра, но это смещение незначительно.



Примесная проводимость полупроводников.

Некоторые примеси даже в малых концентрациях очень сильно изменяют проводимость полупроводника. Такие примеси приводят либо к появлению:

- Избыточного количества свободных электронов – примеси, которые **отдают электроны – донорные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией свободных электронов, называются полупроводниками **n-типа**.
- Избыточного количества дырок – **примеси, забирающие свободные электроны – акцепторные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией дырок называются полупроводниками **p-типа**.

Билет №5

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Примесная проводимость полупроводников. Уровень Ферми примесного полупроводника p- типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника p- типа.
2. Волновая функция, ее вероятностный смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Принцип суперпозиции в квантовой механике.
3. Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям, найдите отношение средней кинетической энергии свободных электронов в металле при $T = 0$ к их максимальной энергии.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям...

$$E_{\max} = E_F^{(0)}; \langle E_K \rangle = \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} E f(E) g(E) dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} f(E) g(E) dE} = \left| \frac{g(E) \cong \sqrt{E}}{f(E) \cong 1} \right| = \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} E^{1/2} dE} = \frac{2/5 E_F^{5/2}}{2/3 E_F^{3/2}} = \frac{3}{5} E_F^{(0)} \Rightarrow$$

$$\frac{\langle E_K \rangle}{E_{\max}} = \frac{\frac{3}{5} E_F^{(0)}}{E_F^{(0)}} = \frac{3}{5}$$

34. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводнике p-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника p-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника p-типа.

Примесная проводимость полупроводников.

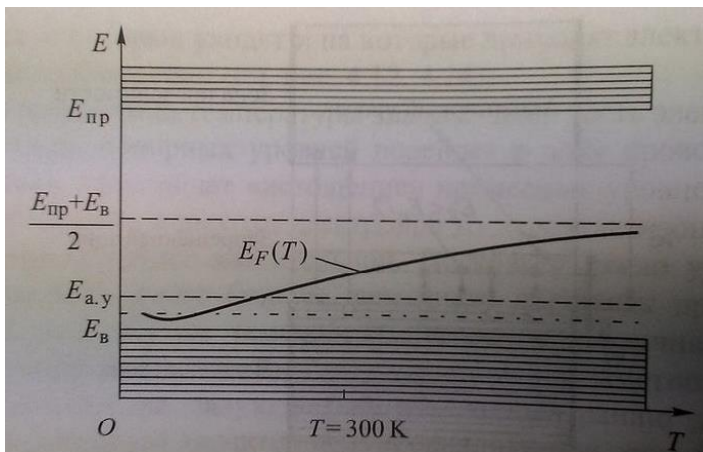
Некоторые примеси даже в малых концентрациях очень сильно изменяют проводимость полупроводника. Такие примеси приводят либо к появлению:

- Избыточного количества свободных электронов – примеси, которые **отдают электроны** – **донорные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией свободных электронов, называются полупроводниками **n-типа**.
- Избыточного количества дырок – **примеси, забирающие свободные электроны** – **акцепторные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией дырок называются полупроводниками **p-типа**.

Акцепторные полупроводники получают путем добавления в полупроводник элементов, которые легко отбирают электрон у атомов полупроводника. Например, добавление к четырехвалентному кремнию, трехвалентного индия. Одна валентная связь из четырех остается незаполненной, и электрон из соседней связи легко переходит на это вакантное место, образуя одну дырку на каждый атом индия в кристаллической решетке.

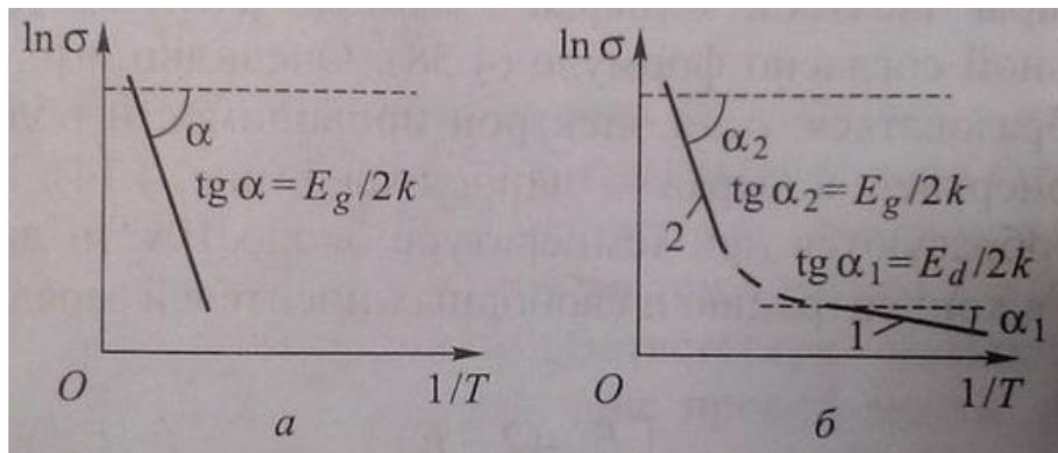
Аналогично с донорными полупроводниками, возможно образование пар электрон-дырка, но при комнатной температуре проводимость за счет этого эффекта крайне мала в сравнении с акцепторной проводимостью.

В акцепторном проводнике, как и в донорном образуются дополнительные зоны, но не сверху запрещенной зоны, а снизу, над верхней границей валентной зоны. При низкой температуре, энергия Ферми, соответственно, оказывается посередине между акцепторными уровнями, а при повышении температуры, за счет насыщения акцепторных примесей, и активной генерации пар электрон-дырка, энергия Ферми смещается в центр запрещенной зоны, соответственно, акцепторный проводник при высокой температуре ведет себя как обычный беспримесный.



Температурная зависимость логарифма проводимости примесного полупроводника n-типа.

На графиках показано сравнение логарифма проводимости беспримесного проводника и донорного проводника. Из графика видно, что донорный проводник приобретает проводимость при значительно более низкой температуре.



Построение такого графика используют для экспериментального определения ширины запрещенной зоны.

7. Волновая функция, ее статистический смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Принцип суперпозиции в квантовой механике.

Волновой функцией называется комплекснозначная функция, используемая в квантовой механике для описания квантового состояния системы.

Волновая функция не имеет физического смысла, это «нечто комплексное» в пространстве. Физический смысл имеет квадрат волновой функции – это вероятность обнаружить систему в положении, описываемом координатами x_i в момент времени t .

$$\omega = |\Psi(x, y, z, t)|^2 = \Psi\bar{\Psi} = \frac{dP}{dV}$$

ω – плотность вероятности

Вероятность P обнаружить частицу в объеме V :

$$P = \int_V \Psi\bar{\Psi} dV$$

Условие нормировки волновой функции (вытекает из вероятностного смысла волновой функции):

$$\int_{\infty} \Psi\bar{\Psi} dV = 1$$

Условие нормировки выполняется не во всех задачах квантовой механики, например, интеграл будет расходиться в случае, если частица удаляется в бесконечность.

В нашем курсе мы имеем дело только с ортонормированными системами функций:

Система Ψ_n, Ψ_m называется ортонормированной, если:

$$\int_V \Psi_n \bar{\Psi}_m dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

δ_{nm} – коэффициент Кронегера.

Условия регулярности волновой функции (обязательны для всех волновых функций):

1. Условие конечности: $|\Psi|^2$ принимает только конечные значения (для нормированной функции $|\Psi|^2 \xrightarrow{\infty} 0$)
2. Условие однозначности: $\Psi(x, y, z, t)$ – однозначная функция координат и времени.
3. Условия непрерывности и гладкости – волновая функция в любой момент времени должна быть непрерывной функцией координат, ее частные производные по координатам также непрерывны (*они могут терпеть разрыв только в случае, если силовая функция в данной точке терпит бесконечный разрыв*)

Принцип суперпозиции в квантовой механике: следствие волновых свойств, линейности уравнения Шредингера.

Суперпозиция состояний квантовомеханической системы (частицы) также является ее состоянием.

Если частица может находиться в состояниях Ψ_1, Ψ_2 , то существует состояние

$$\Psi = A\Psi_1 + B\Psi_2$$

При измерении состояния мы редуцируем волновую функцию: состояние суперпозиции, где она неопределена, сводится к определенному состоянию Ψ_1 или Ψ_2

Коэффициенты в разложении $\Psi = \sum C_m \Psi_m$ можно найти по формуле:

$$C_m = \int_V \Psi \overline{\Psi_m} dV$$

(из нормировки)

Вектор плотности потока вероятности:

Введем вектор плотности потока вероятности, определяющий, с какой скоростью из данной области «вытекает» или «втекает» вероятность обнаружить частицу.

Интегральная форма: $\oint \vec{j} dS = -\frac{dP}{dt} = -\frac{d}{dt} \int |\Psi|^2 dV$

Дифференциальная форма: $\nabla \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$

Этот вектор можно также интерпретировать как количество частиц, проходящих через данную площадь в направлении нормали к ней за единицу времени.

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \text{grad} \overline{\Psi} - \overline{\Psi} \text{grad} \Psi)$$

Билет №6

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Ядерная модель атома Резерфорда-Бора. Постулаты Бора. Энергетический спектр атома водорода в теории Бора.
2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами.
3. Рассчитайте активность одного грамма ${}^{226}_{88}\text{Ra}$, если период полураспада этого изотопа $T_{1/2} = 1620$ лет.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Рассчитайте активность одного грамма Ra(226./88) если период полураспада 1620 лет.

2. Рассчитать активность 1 гр.
 ^{226}Ra , если $T_{1/2} = 1620$ лет ($M = 226 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$)

$$A = N_0 \lambda e^{-\lambda t} \text{ - формула активности}$$

$$N_0 = \nu N_a = \frac{m}{M} N_a; \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}};$$

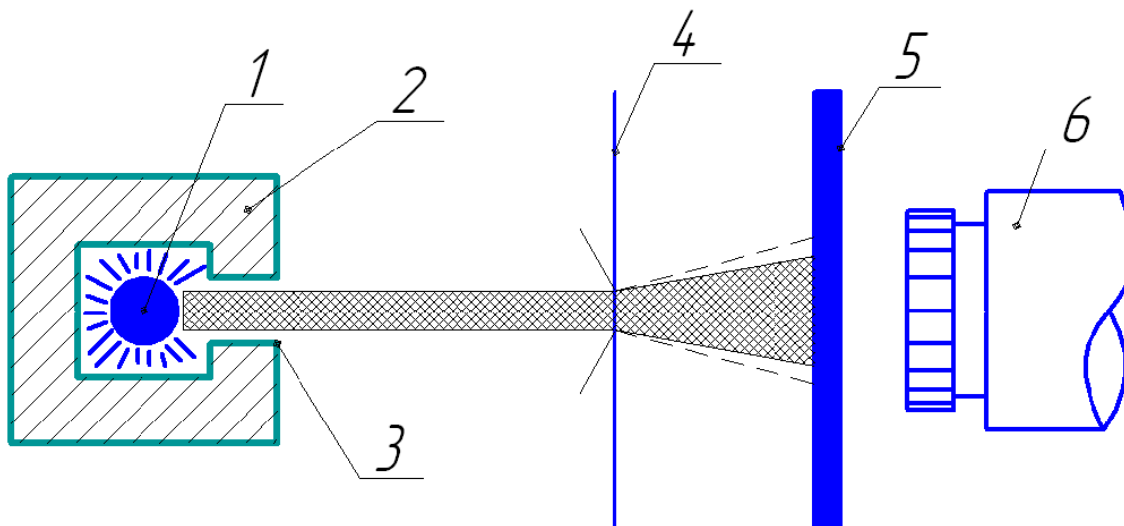
$$A(0) = N_0 \lambda = \frac{m}{M} N_a \frac{\ln 2}{T_{1/2}};$$

5. Ядерная модель атома Резерфорда-Бора. Постулаты Бора.

Опыты по рассеянию альфа-частиц: Эрнест Резерфорд (1871 – 1937) проводил опыты по изучению прохождения альфа-частиц через тонкие металлические пластины золота и платины.

Альфа-частица – это полностью ионизированный атом гелия. Масса альфа-частицы примерно в 8000 раз больше массы электрона. Положительный заряд равен по модулю удвоенному заряду электрона $2e$. Скорость альфа-частицы составляет $1/15$ скорости света или $2 \cdot 10^7$ м/с.

Альфа-частицы испускались радиоактивным источником 1, помещённым внутри свинцового цилиндра 2 с узким каналом 3. Узкий пучок альфа-частиц из канала падал на фольгу 4 из исследуемого материала, перпендикулярно к поверхности фольги. Из свинцового цилиндра альфа-частицы проходили только через канал, а остальные поглощались свинцом. Прошедшие сквозь фольгу и рассеянные ею альфа-частицы попадали на полупрозрачный экран 5, который был покрыт люминесцирующим веществом (сульфатом цинка). Это вещество было способно светиться при ударе об него альфа-частицы. Столкновение каждой частицы с экраном сопровождалось вспышкой света. За экраном находился микроскоп 6. Чтобы не происходило дополнительного рассеяния альфа-частиц в воздухе, весь прибор размещался в сосуде с достаточным вакуумом.



Наблюдаемая на экране картина позволила заключить, что большинство альфа-частиц проходит сквозь золотую фольгу без заметного изменения направления их движения. Однако некоторые частицы отклонялись на большие углы от первоначального направления альфа-частиц (порядка $135^\circ \dots 150^\circ$) и даже отбрасывались назад. Исследования показали, что при прохождении альфа-частиц сквозь фольгу примерно на каждые 10000 падающих частиц только одна отклоняется на угол более 10° от первоначального направления движения.

Тот факт, что многие альфа-частицы проходили сквозь фольгу, не отклоняясь от своего направления движения, говорит о том, что атом не является сплошным образованием. Так как масса альфа-частицы почти в 8000 раз превосходит массу электрона, то электроны, входящие в состав атомов фольги, не могут заметно изменить траекторию альфа-частиц. Рассеяние альфа-частиц может вызывать положительно заряженная частица атома – атомное ядро.

Ядерная модель атома

Резерфорд на основании результатов эксперимента по рассеянию α -частиц на атомах металлической фольги обосновал планетарную модель строения атома. Согласно этой модели, атом состоит из тяжёлого положительно заряженного ядра очень малых размеров ($\sim 10^{-15}$ м), вокруг которого по некоторым орбитам движутся электроны. Радиусы этих орбит имеют размеры $\sim 10^{-10}$ м. Наличие у электрона заряда делает планетарную модель противоречивой с точки зрения классической физики, т.к. вращающийся вокруг ядра электрон, как и любая ускоренно движущаяся заряженная частица должен излучать электромагнитные волны. Спектр такого излучения должен быть непрерывным. В опытах наблюдается линейчатый спектр излучения атомов. Кроме того, непрерывное излучение уменьшает энергию электрона, и он из-за уменьшения орбиты обязан был бы упасть на ядро.

Постулаты Нильса Бора (водородоподобных атомов)

Нильс Бор «спас» планетарную модель для атома водорода, сформулировав три постулата:

1. В атоме существуют стационарные состояния, в которых излучение отсутствует. Этим состояниям соответствуют стационарные орбиты, движение электронов по которым не сопровождается излучением ЭМВ.
2. Электрон на стационарной орбите имеет дискретные значения орбитального момента импульса: $mvr = n\hbar$, $n = 1, 2, 3 \dots$
3. При переходе 1 электрона с одной орбиты на другую выделяется/поглощается 1 фотон энергии $\hbar\omega = \Delta E$

$$\begin{cases} mvr = n\hbar \\ ma = Fe \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{n\hbar}{mr} \\ \frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{Zme^2} \Big|_{\substack{Z=1 \\ n=1}} = 0,529\text{\AA} - \text{боровский радиус}$$

$$E = q\varphi = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Z^2 me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$$

15. ! Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений. (проверить)

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

↑
Обобщенная
координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — x, y, z) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi dt$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dt .

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

↑
Элемент объема

Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

↑ Собственная функция оператора H

↑ Собственное значение

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L оператора уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ , имеющей квантово-механический оператор λ , в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 , то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2 , либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2 .

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = \underline{\underline{-}} \Psi(q_1, \underline{q_3}, \underline{q_2}, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Операторы квантовой механики.

1. Операторы координаты определяются действием на функции

$$\hat{x}(\Psi) = x \cdot \Psi, \quad \hat{y}(\Psi) = y \cdot \Psi, \quad \hat{z}(\Psi) = z \cdot \Psi.$$

Все три оператора перестановочны между собой. Например, коммутатор $[\hat{x}, \hat{y}](\Psi) = \hat{x}(\hat{y}(\Psi)) - \hat{y}(\hat{x}(\Psi)) = x \cdot y \cdot \Psi - y \cdot x \cdot \Psi = 0$, т.е. $[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{0}$.

Следовательно, координаты могут быть одновременно измерены с любой точностью. Оператор координаты является самосопряженным. Проверим это, например, для \hat{x} :

$$\begin{aligned} (\hat{x}(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_V \Psi_2^* \cdot \hat{x}(\Psi_1) \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x \cdot \Psi_1 \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = \\ &= \int_V (x\Psi_2)^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = (\Psi_1, \hat{x}(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные числа этого оператора – это значения координат. Очевидно, что эти значения - действительные числа. Оператор координаты обладает непрерывным спектром, поэтому среднее значение, например, координаты x определяется равенством

$$\langle x \rangle = \int_V \Psi^* \hat{x}(\Psi) dV = \int_V \Psi^* x \Psi dV = \int_V x |\Psi|^2 dV.$$

Оператор радиус-вектора определяется как векторная функция

$$\vec{R}(\Psi) = \vec{e}_x \hat{x}(\Psi) + \vec{e}_y \hat{y}(\Psi) + \vec{e}_z \hat{z}(\Psi) = x \cdot \Psi \cdot \vec{e}_x + y \cdot \Psi \cdot \vec{e}_y + z \cdot \Psi \cdot \vec{e}_z$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

2. Оператор проекции импульса на ось декартовой системы координат

$$\hat{p}_x(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \hat{p}_y(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \hat{p}_z(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Проверим, что этот оператор самосопряженный для одномерного случая. Т.к. частица находится в ограниченной области, то на границе области волновая функция частицы обязательно обращается в ноль. Если область задана интервалом $a < x < b$, то $\Psi(a) = 0$ и $\Psi(b) = 0$

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_a^b \Psi_2^* \cdot \hat{p}_x(\Psi_1) \cdot dx = \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \frac{\hbar}{i} \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \left\{ \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx - \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx \right\} = \int_a^b \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \right) \cdot \Psi_1 \cdot dx = \int_a^b \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^* \cdot \Psi_1 \cdot dx = (\Psi_1, \hat{p}_x(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные значения оператора проекции импульса – это значения проекции импульса. Найдём, например, собственные функции оператора проекции импульса на ось X. Для этого надо разрешить операторное уравнение $\hat{p}_x(\Psi) = p_x \cdot \Psi$. С учётом определения оператора получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \cdot \Psi,$$

которое решаем методом разделения переменных $\frac{d\Psi}{\Psi} = i \frac{p_x}{\hbar} \cdot dx$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{p_x}{\hbar} x}$, где C не зависит от x .

В квантовой механике вводят оператор *полной энергии* \hat{E} , такой, что изменение волновой функции во времени (или как говорят *эволюция*) полностью определяется этим оператором:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{E}(\Psi).$$

Собственные значения оператора полной энергии – это значения энергии системы:

$\hat{E}(\Psi) = E \cdot \Psi$. Найдём вид собственных функций для оператора полной энергии.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi, \quad \frac{d\Psi}{\Psi} = -i \frac{E}{\hbar} \cdot dt, \quad \Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

где ψ - функция, не зависящая от времени.

Если энергия системы не меняется (стационарное состояние), то волновая функция имеет вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.$$

3. Оператор момента импульса.

В классической физике вектор момента импульса относительно некоторой точки определяется

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yp_z - zp_y) + \vec{e}_y (zp_x - xp_z) + \vec{e}_z (xp_y - yp_x),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

Тогда вектор-оператор момента импульса должен принять вид

$$\hat{L} = \vec{R} \times \hat{p} = \vec{e}_x (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) + \vec{e}_y (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) + \vec{e}_z (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x).$$

Операторы проекций моментов импульса на оси

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x.$$

Собственные значения оператора проекции импульса на ось – это величины проекции момента импульса $\hat{L}_z(\Psi) = L_z \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций, отвечающих этим собственным значениям: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = L_z \cdot \Psi$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \varphi}$ (где C – функция, не зависящая от φ). Учитывая, что при повороте вокруг оси z на угол $2\pi m$ (m – целое число) вид функции не меняется, получаем равенство $\frac{L_z}{\hbar} = m$, т.е. проекция момента импульса на ось z может принимать значения, кратные приведенной постоянной Планка \hbar : $L_z = m \cdot \hbar$. В этом смысле постоянную Планка иногда называют *квантом действия*.

4. Оператор потенциальной энергии

В классической механике потенциальная энергия зависит от взаимного положения тел.

Выражение для потенциальной энергии квазиупругой силы (вдоль оси X) $U = \frac{kx^2}{2}$ в операторном виде будет выглядеть так же $\hat{U}(\Psi) = \frac{k\hat{x}^2}{2}(\Psi) = \frac{k}{2} \hat{x}(\hat{x}(\Psi)) = \frac{k}{2} x \cdot x \cdot \Psi = \frac{kx^2}{2} \cdot \Psi$.

Выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{R}$ перейдет в оператор такого же вида $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi)$, где оператор $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right)$ является обратным к оператору $\hat{R}(\Psi) = R \cdot \Psi$. Очевидно, что $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi) = \frac{1}{R} \cdot \Psi$, поэтому $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \Psi$

5. Оператор кинетической энергии.

В классической механике кинетическая энергия тела определяется выражением

$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Поэтому оператор кинетической энергии имеет вид

$$\hat{E}_K(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) = \frac{1}{2m} \hat{p}(\hat{p}(\Psi)) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar}{i} \bar{\nabla} \left(\frac{\hbar}{i} \bar{\nabla}(\Psi) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi.$$

Найдём собственные значения оператора кинетической энергии для одномерного случая

$\hat{E}_K(\Psi) = E_K \cdot \Psi$ или $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E_K \cdot \Psi$. Получаем уравнение, с которым уже встречались в задаче об одномерной яме с непроницаемыми стенками

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_K \cdot \Psi = 0.$$

Откуда $\Psi = C \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_K}}{\hbar} x + \alpha\right)$.

6. Оператор Гамильтона.

В классической механике механическая энергия тела, записанная как функция импульса и координат, называется *функцией Гамильтона* $H = E_K + U = \frac{p^2}{2m} + U$.

В квантовой механике соответствующий оператор называется оператором Гамильтона (или *гамильтонианом*)

$$\hat{H}(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) + \hat{U}(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi.$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической величине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

А) **Линейными**

В) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \overline{\Psi_1} \hat{F} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{F} \Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Собственные значения, собственные функции операторов:

$$\hat{F}\Psi = a\Psi$$

Спектр собственных значений называется дискретным, если его собственные значения можно пронумеровать, если нельзя – непрерывным. Если одному собственному значению принадлежит несколько собственных функций, собственное значение называется вырожденным.

Собственные функции ортонормированы $\int_V \Psi_n \overline{\Psi_m} dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

Среднее значение

$$\langle f \rangle = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \overline{\Psi} \hat{F} \Psi dV$$

Основные операторы физических величин:

- 1) оператор координат $\hat{x} = x$, непрерывный спектр собственных значений
- 2) радиус-вектор $\hat{r} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$, непрерывный спектр собственных значений
- 3) оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar \text{grad}$, непрерывный спектр собственных значений
- 4) квадрат импульса $\hat{p}^2 = (\hat{p})^2 = -\hbar^2 \Delta$, непрерывный спектр собственных значений
- 5) момент импульса $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$, момент импульса неопределен – нет собственных значений!
- 6) Проекция момента импульса на ось $\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ дискретный спектр собственных значений
- 7) Квадрат момента импульса – дискретный спектр собственных значений (угловой момент)

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \phi}$$
$$\Delta_{\theta, \phi} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

- 8) Кинетическая энергия $\hat{E}_k = \hat{p}^2 / 2m = -\hbar^2 / 2m \Delta$
- 9) Потенциальная энергия $\hat{U} = U$
- 10) Гамильтониан – оператор полной энергии

$$\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m + \hat{U} = -\hbar^2 / 2m \Delta + U$$

16. ! Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Вычисление средних значений физических величин. (проверить)

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической величине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

- А) **Линейными**
- В) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \bar{\Psi}_1 \hat{F} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{F} \Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Основные операторы физических величин:

- 1) оператор координат $\hat{x} = x$, непрерывный спектр собственных значений
- 2) радиус-вектор $\hat{r} = \bar{i}\hat{x} + \bar{j}\hat{y} + \bar{k}\hat{z}$, непрерывный спектр собственных значений
- 3) оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar\text{grad}$, непрерывный спектр собственных значений
- 4) квадрат импульса $\hat{p}^2 = (\hat{p})^2 = -\hbar\Delta$, непрерывный спектр собственных значений
- 5) момент импульса $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$, момент импульса неопределен – нет собственных значений!
- 6) Проекция момента импульса на ось $\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ дискретный спектр собственных значений
- 7) Квадрат момента импульса – дискретный спектр собственных значений (угловой момент)

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \phi}$$

$$\Delta_{\theta, \phi} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

- 8) Кинетическая энергия $\hat{E}_k = \hat{p}^2 / 2m = -\hbar^2 / 2m \Delta$
- 9) Потенциальная энергия $\hat{U} = U$
- 10) Гамильтониан – оператор полной энергии

$$\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m + \hat{U} = -\hbar^2 / 2m \Delta + U$$

Среднее значение

$$\langle f \rangle = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \bar{\Psi} \hat{F} \Psi dV$$

Билет №7

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.
2. Стационарные состояния в квантовой механике. Их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.
3. Определите красную границу $\lambda_{кр}$ фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость фотоэлектронов равна $V_{\max} = 6,5 \cdot 10^5$ м/с.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Определите красную границу фотоэффекта для цезия если при его облучении...

Решение. При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $\epsilon = A + T$ в случае красной границы запишется в виде

$$\epsilon = A, \text{ или } hc/\lambda_0 = A.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = hc/A. \quad (1)$$

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A = \epsilon - T = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Выпишем числовые значения величин, выразив их в СИ: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $\lambda = 400$ нм = $4 \cdot 10^{-7}$ м; $m = 9,11 \times 10^{-31}$ кг; $v = 6,5 \cdot 10^5$ м/с.

Подставив эти значения величин в формулу (2) и вычислив, получим

$$A = 3,05 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,305 \text{ эВ}.$$

Для определения красной границы фотоэффекта подставим значения A , h и c в формулу (1) и вычислим:

$$\lambda_0 = 651 \text{ нм}.$$

31. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.

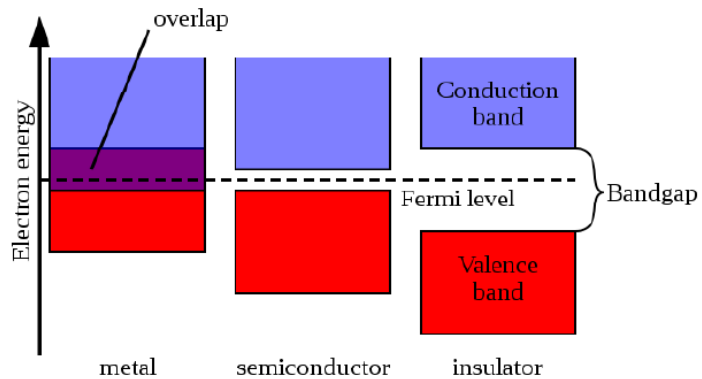
В основе зонной теории лежат следующие главные приближения:

- Твёрдое тело представляет собой идеально периодический кристалл.
- Равновесные положения узлов кристаллической решётки фиксированы.
- Многоэлектронная задача сводится к одноэлектронной: воздействие на данный электрон всех остальных описывается некоторым усредненным периодическим полем.

По взаимному расположению зон вещества делят на три большие группы:

Проводники — зона проводимости и валентная зона перекрываются, образуя одну зону, называемую зоной проводимости. В металлах зоной проводимости называется наивысшая разрешённая зона, в

которой находятся электроны при температуре 0 К. Электрон может свободно перемещаться между ними, получив любую допустимо малую энергию. Таким образом, при приложении к телу разности потенциалов, электроны свободно движутся из точки с меньшим потенциалом в точку с большим, образуя электрический ток. К проводникам относят все металлы;



Полупроводники — зоны не перекрываются, и расстояние между ними (ширина запрещённой зоны) составляет менее 3,5 эВ. При абсолютном нуле температуры в зоне проводимости нет электронов, а валентная зона полностью заполнена электронами, которые не могут изменить своё квантомеханическое состояние, то есть не могут упорядоченно двигаться при приложении электрического поля. При повышении температуры за счет теплового движения часть электронов, нарастающая при повышении температуры, «забрасывается» из валентной зоны в зону проводимости и собственный полупроводник становится электропроводным, причём его проводимость нарастает при увеличении температуры, так как растёт концентрация носителей заряда — электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. У полупроводников ширина запрещённой зоны относительно невелика, поэтому для перевода электронов из валентной зоны в зону проводимости требуется энергия меньшая, чем для диэлектрика, именно поэтому чистые (собственные, нелегированные) полупроводники обладают заметной проводимостью при ненулевой температуре;

Диэлектрики — зоны как и у полупроводников не перекрываются, и расстояние между ними составляет, условно, более 3,5 эВ. Таким образом, для того, чтобы перевести электрон из валентной зоны в зону проводимости требуется значительная энергия (температура), поэтому диэлектрики ток при невысоких температурах практически не проводят.

9. Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Стационарные состояния.

Состояния частицы, для которых значение энергии определено однозначно, называются *стационарными состояниями*.

Замечание. Из принципа неопределённостей для времени и энергии $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ следует, что если неопределённость энергии в каком-то состоянии стремится к нулю $\Delta E \rightarrow 0$, то время пребывания системы в этом состоянии должно быть бесконечно большим. В этом смысле состояние называется *стационарным*.

Как будет установлено далее (в теории операторов), волновая функции частицы в стационарном состоянии со значением энергии E принимает особый вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t},$$

где функция «пси малая» ψ зависит только от координат частицы, но не зависит от времени, поэтому её иногда называют *координатной частью волновой функции стационарного состояния*.

В стационарном состоянии плотность вероятности *не зависит от времени*. Действительно, плотность вероятности равна квадрату модуля волновой функции

$$|\Psi|^2 = \left| \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right|^2 = |\psi|^2 \cdot \left| e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right|^2 = |\psi|^2.$$

Следовательно, для стационарного состояния уравнение непрерывности для вероятности примет вид:

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = 0.$$

Соответственно, вектор плотности вероятности для стационарного состояния

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \cdot \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \cdot \operatorname{grad} \psi).$$

Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния.

Необходимым условием стационарности состояния является независимость от времени функции U , т.е. в стационарном состоянии эта функция однозначно трактуется как потенциальная энергия. В этом случае, подставим во временное уравнение Шрёдингера $\Psi = \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \left(\psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right) + U \cdot \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \\ i\hbar \psi \left(-i\frac{E}{\hbar} \right) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \Delta \psi + U \cdot \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \end{aligned}$$

Т.к. $e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \neq 0$, то можно сократить $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$: $E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \cdot \psi$. После преобразований получаем уравнение

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \cdot \psi = 0$$

которое носит название *уравнение Шрёдингера для стационарного состояния*.

Билет №8

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Спонтанное и индуцированное вынужденное излучение. Коэффициенты “А” и “В” Эйнштейна.
2. Основные постулаты квантовой механики. Вероятностный характер результатов измерений в квантовой механике.
3. В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид

$\psi(x) = A \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right\}$, где A и a - некоторые постоянные, а k - заданный параметр, имеющий размерность обратной длины. Найдите для данного состояния среднее значение координаты частицы $\langle x \rangle$.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

В некоторый момент времени частица находится в состоянии...

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{\int_0^\infty \Psi^* \hat{x} \Psi dx}{\int_0^\infty \Psi^* \Psi dx} = \frac{\int_0^\infty \left(A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \right) \cdot x \cdot \left(A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \right) dx}{\int_0^\infty \left(A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \right) \cdot \left(A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \right) dx} = \\ &= \frac{\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{a^2}{2} \right) e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \Big|_0^\infty}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

22. Спонтанное и индуцированное излучение. Коэффициенты “А” и “В” Эйнштейна.

Рассмотрим проблему равновесного теплового излучения в полости, приняв следующие допущения:

- Вещество состоит из одинаковых атомов, не взаимодействующих друг с другом
- Атомы могут находиться в двух состояниях: основное с энергией E_1 , и возбужденное с энергией E_2 ($E_2 > E_1$)
- В возбужденное состояние атом переходит только при поглощении кванта излучения
- Излучение в полости монохроматическое, частоты $\hbar\omega = E_2 - E_1$

Оба энергетических уровня будем считать невырожденными (то есть атомы в этих состояниях подчиняются распределению Больцмана), рассмотрим количество атомов в основном и возбужденном состояниях: $N_1 = Ae^{-E_1/kT}$, $N_2 = Ae^{-E_2/kT}$

Таким образом:

$$N_2/N_1 = e^{-E_2-E_1/kT}$$

Число атомов в основном состоянии всегда больше, чем в возбужденном, при увеличении температуры число атомов в основном и возбужденном состоянии уравнивается.

Атом в основном состоянии может находиться сколь угодно долго, до тех пор, пока он не поглотит квант излучения, переходя в возбужденное состояние. В возбужденном – в течение малого промежутка времени, в течение которого он самопроизвольно переходит в основное состояние, испуская квант энергии. Это называется *спонтанным излучением*. Оно неполяризовано, и некогерентно.

Возбужденный атом имеет определенную вероятность за единицу времени самопроизвольно испустить квант энергии и перейти в основное состояние. Эта вероятность обозначается коэффициентом A . Величину:

$$Z_{21} = AN_2$$

Можно назвать скоростью перехода из возбужденного состояния в основное: скорость процесса перехода энергии вещества в энергию теплового излучения.

Также есть процесс *вынужденного излучения*: когда квант излучения взаимодействует с атомом в возбужденном состоянии, и он переходит в основное состояние, испуская квант излучения. Скорость такого перехода:

$$Z'_{21} = B_{21}N_2u_{\omega,T}$$

Свойства вынужденного излучения: ВИ распространяется строго в том же направлении, что и падающая волна, фаза волны и поляризация ВИ совпадает с фазой и поляризацией падающей волны.

Эти два процесса уравниваются процессом перехода из основного состояния в возбужденное, с поглощением кванта падающего излучения:

$$Z_{12} = B_{12}N_1u_{\omega,T}$$

В случае **равновесного теплового излучения** эти три процесса в сумме компенсируют друг друга:

$$AN_2 + B_{21}N_2u_{\omega,T} = B_{12}N_1u_{\omega,T}$$

Отсюда:

$$B_{12}u_{\omega,T} = A \frac{N_2}{N_1} + B_{21} \frac{N_2}{N_1} u_{\omega,T}$$

$T \rightarrow \infty \Rightarrow u_{\omega,T} \rightarrow \infty$; $\frac{N_2}{N_1} \rightarrow 1$, следовательно из этого соотношения $B_{21} = B_{12} = B$

$$u_{\omega,T} = \frac{A}{B} * \frac{1}{\left(\frac{N_1}{N_2} - 1\right)} = \frac{A}{B} * \frac{1}{\left(e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}} - 1\right)}$$

Получили формулу Планка «с другой стороны»;

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}$$

Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений.

Постулаты

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

↑
Обобщенная
координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — x, y, z) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi dt$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dt .

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

↑
Элемент объема

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

↑ Собственная функция оператора H

↑ Собственное значение

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\psi_i = L\psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ , имеющей квантово-механический оператор λ , в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 , то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2 , либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2 .

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = \underline{\underline{-}} \Psi(q_1, \underline{q_3}, \underline{q_2}, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

В ней результаты измерений физических величин носят вероятностный характер. Это значит, что при изменении какой-то величины возможно несколько результатов, каждому из которых соответствует

определенная вероятность. Приведем пример: монетка крутится на столе. Пока она крутится, она не находится в каком-то определенном состоянии (орел-решка), а имеет лишь вероятность в одном из этих состояний оказаться.

Билет №9

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

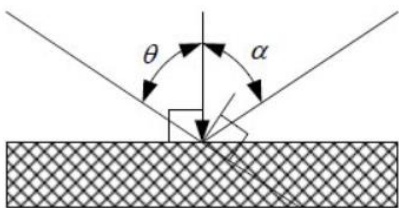
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Примесная проводимость полупроводников. Полупроводники р- и n-типа. Уровень Ферми в примесных полупроводниках.
2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Вычисление средних значений физических величин.
3. Узкий пучок моноэнергетических нерелятивистских электронов падает нормально на поверхность монокристалла. В направлении, составляющим угол $\alpha = 60^\circ$ с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения электронов третьего порядка. Определите ускоряющую разность потенциалов, которую прошли электроны, если расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла $d = 0,2$ нм.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Узкий пучок моноэнергетических нерелятивистских электронов падает нормально...



$$\theta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 60^\circ$$

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}}$$

$$2 \cdot d \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda_B, \quad n = 3 \Rightarrow$$

$$2 \cdot d \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \lambda_B = \frac{6\pi\hbar}{\sqrt{2meU}}$$

$$\alpha\sqrt{3} \cdot \sqrt{2meU} = 6\pi\hbar \Rightarrow 2meU = \frac{12\pi^2\hbar^2}{d^2} \Rightarrow U = \frac{6\pi^2\hbar^2}{med^2}$$

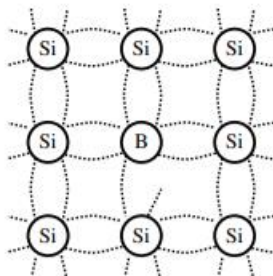
Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводнике p-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника p-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника p-типа.

Примесная проводимость полупроводников.

Некоторые примеси даже при малых их концентрациях очень сильно изменяют проводимость полупроводника. Такие примеси приводят к появлению избыточного количества или свободных электронов, или дырок. Их называют соответственно донорными примесями (отдающими электроны) или акцепторными примесями (забирающими электроны).

Получившийся после добавления донорных примесей полупроводник называют донорным полупроводником. Его также называют электронным (так как в нем - избыток свободных электронов) или же полупроводником *n*-типа: от слова «*negative*» - отрицательный, поскольку в нем - избыток отрицательных свободных носителей заряда.

Получившийся после добавления акцепторных примесей полупроводник называют акцепторным полупроводником. Его также называют дырочным (так как в нем - избыток свободных дырок) или же полупроводником *p*-типа: от слова «*positive*» - положительный, поскольку в нем - избыток положительных свободных носителей заряда. Донорные полупроводники - по-



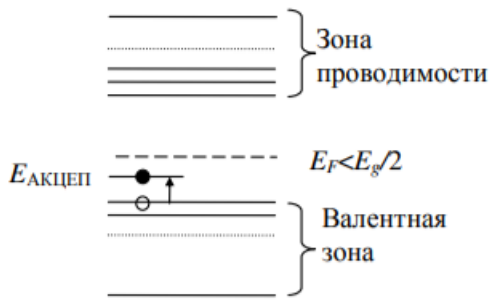
Акцепторные полупроводники - получают при добавлении в полупроводник элементов, которые легко «отбирают» электрон у атомов полупроводника. Например, если к четырехвалентному кремнию (или германию) добавить трехвалентный бор (индий), то последний использует свои три валентных электрона для создания трех валентных связей в кристаллической решетке, а четвертая связь окажется без электрона. Электрон из соседней связи может перейти на это пустое место, и тогда в кристалле получится дырка. В таком случае в кристалле образуется избыток дырок. Также может происходить образование пар электрон - дырка, как это рассматривалось в случае беспримес-

ного полупроводника, однако вероятность этого процесса при комнатных температурах достаточно мала. Дырки в *акцепторном* полупроводнике принято называть *основными носителями*, а электроны - *неосновными*.

На языке зонной теории переход электрона из полноценной ковалентной связи в связь с недостающим электроном соответствует появлению в запрещенной зоне акцепторных уровней вблизи нижнего края зоны проводимости. Электрону для такого перехода из валентной зоны на акцепторный уровень (при этом электрон просто переходит из одной ковалентной связи в почти такую же другую связь) требуется меньше энергии, чем для перехода из валентной зоны в зону проводимости, то есть для «полного ухода» электрона из ковалентной связи.

При температурах порядка комнатной основной вклад в проводимость полупроводника будут давать дырки, образовавшиеся в валентной зоне после перехода валентных электронов на

акцепторные уровни, вероятность же перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости будет очень мала.



При увеличении температуры значительная часть малого числа акцепторных уровней окажется занятой электронами. Кроме того, вероятность перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости станет значительной.

Поскольку число уровней в валентной зоне много больше, чем число примесных уровней, то с ростом температуры различие увеличивающихся концентраций электронов и дырок станет менее заметно, так как они отличаются на малую величину - концентрацию акцепторных уровней. Ак-

цепторный характер полупроводника при этом будет все менее и менее выражен. И, наконец, при еще большем повышении температуры концентрация носителей заряда в полупроводнике станет очень большой, и акцепторный полупроводник станет аналогичен сначала беспримесному полупроводнику, а затем - проводнику.

Уровень Ферми в акцепторном полупроводнике смещается вниз по шкале энергии, причем это смещение больше при низких температурах, когда концентрация дырок значительно превышает концентрацию свободных электронов. При повышении температуры, когда акцепторный характер полупроводника становится все менее и менее выраженным, уровень Ферми смещается в среднюю часть запрещенной зоны, как в беспримесном полупроводнике.

Итак, при постепенном увеличении температуры наблюдается постепенное превращение как донорного, так и акцепторного полупроводника в полупроводник аналогичный беспримесному, а затем - в полупроводник аналогичный по проводимости проводнику. В этом заключается причина отказа при перегреве полупроводниковых устройств, состоящих из нескольких областей полупроводников донорного и акцепторного типов. При увеличении температуры различия между областями постепенно пропадает и в итоге полупроводниковое устройство превращается в простой проводник.

15. ! Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений. (проверить)

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

↑
Обобщенная
координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — x, y, z) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi dt$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dt .

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

↑
Элемент объема

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

↑ Собственная функция оператора H
↑ Собственное значение

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L оператора уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ , имеющей квантово-механический оператор λ , в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 , то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2 , либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2 .

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = - \Psi(q_1, \underline{q_3}, \underline{q_2}, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Операторы квантовой механики.

1. Операторы координаты определяются действием на функции

$$\hat{x}(\Psi) = x \cdot \Psi, \quad \hat{y}(\Psi) = y \cdot \Psi, \quad \hat{z}(\Psi) = z \cdot \Psi.$$

Все три оператора перестановочны между собой. Например, коммутатор $[\hat{x}, \hat{y}](\Psi) = \hat{x}(\hat{y}(\Psi)) - \hat{y}(\hat{x}(\Psi)) = x \cdot y \cdot \Psi - y \cdot x \cdot \Psi = 0$, т.е. $[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{0}$.

Следовательно, координаты могут быть одновременно измерены с любой точностью. Оператор координаты является самосопряженным. Проверим это, например, для \hat{x} :

$$\begin{aligned} (\hat{x}(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_V \Psi_2^* \cdot \hat{x}(\Psi_1) \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x \cdot \Psi_1 \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = \\ &= \int_V (x\Psi_2)^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = (\Psi_1, \hat{x}(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные числа этого оператора – это значения координат. Очевидно, что эти значения - действительные числа. Оператор координаты обладает непрерывным спектром, поэтому среднее значение, например, координаты x определяется равенством

$$\langle x \rangle = \int_V \Psi^* \hat{x}(\Psi) dV = \int_V \Psi^* x \Psi dV = \int_V x |\Psi|^2 dV.$$

Оператор радиус-вектора определяется как векторная функция

$$\vec{R}(\Psi) = \vec{e}_x \hat{x}(\Psi) + \vec{e}_y \hat{y}(\Psi) + \vec{e}_z \hat{z}(\Psi) = x \cdot \Psi \cdot \vec{e}_x + y \cdot \Psi \cdot \vec{e}_y + z \cdot \Psi \cdot \vec{e}_z$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

2. Оператор проекции импульса на ось декартовой системы координат

$$\hat{p}_x(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \hat{p}_y(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \hat{p}_z(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Проверим, что этот оператор самосопряженный для одномерного случая. Т.к. частица находится в ограниченной области, то на границе области волновая функция частицы обязательно обращается в ноль. Если область задана интервалом $a < x < b$, то $\Psi(a) = 0$ и $\Psi(b) = 0$

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_a^b \Psi_2^* \cdot \hat{p}_x(\Psi_1) \cdot dx = \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \frac{\hbar}{i} \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \left\{ \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx - \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx \right\} = \int_a^b \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \right) \cdot \Psi_1 \cdot dx = \int_a^b \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^* \cdot \Psi_1 \cdot dx = (\Psi_1, \hat{p}_x(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные значения оператора проекции импульса – это значения проекции импульса. Найдем, например, собственные функции оператора проекции импульса на ось X. Для этого надо разрешить операторное уравнение $\hat{p}_x(\Psi) = p_x \cdot \Psi$. С учетом определения оператора получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \cdot \Psi,$$

которое решаем методом разделения переменных $\frac{d\Psi}{\Psi} = i \frac{p_x}{\hbar} \cdot dx$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{p_x}{\hbar} x}$, где C не зависит от x .

В квантовой механике вводят оператор *полной энергии* \hat{E} , такой, что изменение волновой функции во времени (или как говорят *эволюция*) полностью определяется этим оператором:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{E}(\Psi).$$

Собственные значения оператора полной энергии – это значения энергии системы:

$\hat{E}(\Psi) = E \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций для оператора полной энергии.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi, \quad \frac{d\Psi}{\Psi} = -i \frac{E}{\hbar} \cdot dt, \quad \Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

где ψ - функция, не зависящая от времени.

Если энергия системы не меняется (стационарное состояние), то волновая функция имеет вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.$$

3. Оператор момента импульса.

В классической физике вектор момента импульса относительно некоторой точки определяется

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yp_z - zp_y) + \vec{e}_y (zp_x - xp_z) + \vec{e}_z (xp_y - yp_x),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

Тогда вектор-оператор момента импульса должен принять вид

$$\hat{L} = \vec{R} \times \hat{p} = \vec{e}_x (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) + \vec{e}_y (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) + \vec{e}_z (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x).$$

Операторы проекций моментов импульса на оси

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x.$$

Собственные значения оператора проекции импульса на ось – это величины проекции момента импульса $\hat{L}_z(\Psi) = L_z \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций, отвечающих этим собственным значениям: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = L_z \cdot \Psi$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \varphi}$ (где C – функция, не зависящая от φ). Учитывая, что при повороте вокруг оси z на угол $2\pi m$ (m – целое число) вид функции не меняется, получаем равенство $\frac{L_z}{\hbar} = m$, т.е. проекция момента импульса на ось z может принимать значения, кратные приведенной постоянной Планка \hbar : $L_z = m \cdot \hbar$. В этом смысле постоянную Планка иногда называют *квантом действия*.

4. Оператор потенциальной энергии

В классической механике потенциальная энергия зависит от взаимного положения тел.

Выражение для потенциальной энергии квазиупругой силы (вдоль оси X) $U = \frac{kx^2}{2}$ в операторном виде будет выглядеть так же $\hat{U}(\Psi) = \frac{k\hat{x}^2}{2}(\Psi) = \frac{k}{2} \hat{x}(\hat{x}(\Psi)) = \frac{k}{2} x \cdot x \cdot \Psi = \frac{kx^2}{2} \cdot \Psi$.

Выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{R}$ перейдет в оператор такого же вида $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi)$, где оператор $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right)$ является обратным к оператору $\hat{R}(\Psi) = R \cdot \Psi$. Очевидно, что $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi) = \frac{1}{R} \cdot \Psi$, поэтому $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \Psi$

5. Оператор кинетической энергии.

В классической механике кинетическая энергия тела определяется выражением

$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Поэтому оператор кинетической энергии имеет вид

$$\hat{E}_K(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) = \frac{1}{2m} \hat{p}(\hat{p}(\Psi)) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar}{i} \bar{\nabla} \left(\frac{\hbar}{i} \bar{\nabla}(\Psi) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi.$$

Найдём собственные значения оператора кинетической энергии для одномерного случая

$\hat{E}_K(\Psi) = E_K \cdot \Psi$ или $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E_K \cdot \Psi$. Получаем уравнение, с которым уже встречались в задаче об одномерной яме с непроницаемыми стенками $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_K \cdot \Psi = 0$.

Откуда $\Psi = C \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_K}}{\hbar} x + \alpha\right)$.

6. Оператор Гамильтона.

В классической механике механическая энергия тела, записанная как функция импульса

и координат, называется *функцией Гамильтона* $H = E_K + U = \frac{p^2}{2m} + U$.

В квантовой механике соответствующий оператор называется оператором Гамильтона (или *гамильтонианом*)

$$\hat{H}(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) + \hat{U}(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi.$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической величине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

А) **Линейными**

В) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \overline{\Psi_1} \hat{F} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{F} \Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Собственные значения, собственные функции операторов:

$$\hat{F}\Psi = a\Psi$$

Спектр собственных значений называется дискретным, если его собственные значения можно пронумеровать, если нельзя – непрерывным. Если одному собственному значению принадлежит несколько собственных функций, собственное значение называется вырожденным.

Собственные функции ортонормированы $\int_V \Psi_n \overline{\Psi_m} dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

Среднее значение

$$\langle f \rangle = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \overline{\Psi} \hat{F} \Psi dV$$

Основные операторы физических величин:

- 1) оператор координат $\hat{x} = x$, непрерывный спектр собственных значений
- 2) радиус-вектор $\hat{r} = \bar{i}\hat{x} + \bar{j}\hat{y} + \bar{k}\hat{z}$, непрерывный спектр собственных значений
- 3) оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar \text{grad}$, непрерывный спектр собственных значений
- 4) квадрат импульса $\widehat{p^2} = (\hat{p})^2 = -\hbar\Delta$, непрерывный спектр собственных значений
- 5) момент импульса $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$, момент импульса неопределен – нет собственных значений!
- 6) Проекция момента импульса на ось $\widehat{L_z} = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ дискретный спектр собственных значений
- 7) Квадрат момента импульса – дискретный спектр собственных значений (угловой момент)

$$\widehat{L^2} = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$$
$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

- 8) Кинетическая энергия $\widehat{E_k} = \widehat{p^2} / 2m = -\hbar^2 / 2m \Delta$
- 9) Потенциальная энергия $\widehat{U} = U$
- 10) Гамильтониан – оператор полной энергии

$$\widehat{H} = \widehat{p^2} / 2m + \widehat{U} = -\hbar^2 / 2m \Delta + U$$

15. ! Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений. (проверить)

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

↑
Обобщенная
координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — x, y, z) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi dt$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dt .

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

↑
Элемент объема

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

↑ Собственная функция оператора H

↑ Собственное значение

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ , имеющей квантово-механический оператор λ , в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 , то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2 , либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2 .

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = \underline{\underline{-}} \Psi(q_1, \underline{q_3}, \underline{q_2}, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Операторы квантовой механики.

1. Операторы координаты определяются действием на функции

$$\hat{x}(\Psi) = x \cdot \Psi, \quad \hat{y}(\Psi) = y \cdot \Psi, \quad \hat{z}(\Psi) = z \cdot \Psi.$$

Все три оператора перестановочны между собой. Например,

коммутатор $[\hat{x}, \hat{y}](\Psi) = \hat{x}(\hat{y}(\Psi)) - \hat{y}(\hat{x}(\Psi)) = x \cdot y \cdot \Psi - y \cdot x \cdot \Psi = 0$, т.е. $[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{0}$.

Следовательно, координаты могут быть одновременно измерены с любой точностью.

Оператор координаты является самосопряженным. Проверим это, например, для \hat{x} :

$$\begin{aligned} (\hat{x}(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_V \Psi_2^* \cdot \hat{x}(\Psi_1) \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x \cdot \Psi_1 \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = \\ &= \int_V (x\Psi_2)^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = (\Psi_1, \hat{x}(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные числа этого оператора – это значения координат. Очевидно, что эти значения - действительные числа. Оператор координаты обладает непрерывным спектром, поэтому среднее значение, например, координаты x определяется равенством

$$\langle x \rangle = \int_V \Psi^* \hat{x}(\Psi) dV = \int_V \Psi^* x \Psi dV = \int_V x |\Psi|^2 dV.$$

Оператор радиус-вектора определяется как векторная функция

$$\vec{R}(\Psi) = \vec{e}_x \hat{x}(\Psi) + \vec{e}_y \hat{y}(\Psi) + \vec{e}_z \hat{z}(\Psi) = x \cdot \Psi \cdot \vec{e}_x + y \cdot \Psi \cdot \vec{e}_y + z \cdot \Psi \cdot \vec{e}_z$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

2. Оператор проекции импульса на ось декартовой системы координат

$$\hat{p}_x(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \hat{p}_y(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \hat{p}_z(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Проверим, что этот оператор самосопряженный для одномерного случая. Т.к. частица находится в ограниченной области, то на границе области волновая функция частицы обязательно обращается в ноль. Если область задана интервалом $a < x < b$, то $\Psi(a) = 0$ и $\Psi(b) = 0$

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_a^b \Psi_2^* \cdot \hat{p}_x(\Psi_1) \cdot dx = \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \frac{\hbar}{i} \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \left\{ \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx - \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx \right\} = \int_a^b \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \right) \cdot \Psi_1 \cdot dx = \int_a^b \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^* \cdot \Psi_1 \cdot dx = (\Psi_1, \hat{p}_x(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные значения оператора проекции импульса – это значения проекции импульса. Найдём, например, собственные функции оператора проекции импульса на ось X. Для этого надо разрешить операторное уравнение $\hat{p}_x(\Psi) = p_x \cdot \Psi$. С учётом определения оператора получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \cdot \Psi,$$

которое решаем методом разделения переменных $\frac{d\Psi}{\Psi} = i \frac{p_x}{\hbar} \cdot dx$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{p_x}{\hbar} x}$, где C не зависит от x .

В квантовой механике вводят оператор *полной энергии* \hat{E} , такой, что изменение волновой функции во времени (или как говорят *эволюция*) полностью определяется этим оператором:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{E}(\Psi).$$

Собственные значения оператора полной энергии – это значения энергии системы:

$\hat{E}(\Psi) = E \cdot \Psi$. Найдём вид собственных функций для оператора полной энергии.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi, \quad \frac{d\Psi}{\Psi} = -i \frac{E}{\hbar} \cdot dt, \quad \Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

где ψ - функция, не зависящая от времени.

Если энергия системы не меняется (стационарное состояние), то волновая функция имеет вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.$$

3. Оператор момента импульса.

В классической физике вектор момента импульса относительно некоторой точки определяется

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yp_z - zp_y) + \vec{e}_y (zp_x - xp_z) + \vec{e}_z (xp_y - yp_x),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

Тогда вектор-оператор момента импульса должен принять вид

$$\hat{L} = \hat{R} \times \hat{p} = \vec{e}_x (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) + \vec{e}_y (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) + \vec{e}_z (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x).$$

Операторы проекций моментов импульса на оси

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x.$$

Собственные значения оператора проекции импульса на ось – это величины проекции момента импульса $\hat{L}_z(\Psi) = L_z \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций, отвечающих этим собственным значениям: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = L_z \cdot \Psi$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \varphi}$ (где C – функция, не зависящая от φ). Учитывая, что при повороте вокруг оси z на угол $2\pi m$ (m – целое число) вид функции не меняется, получаем равенство $\frac{L_z}{\hbar} = m$, т.е. проекция момента импульса на ось z может принимать значения, кратные приведенной постоянной Планка \hbar : $L_z = m \cdot \hbar$. В этом смысле постоянную Планка иногда называют *квантом действия*.

4. Оператор потенциальной энергии

В классической механике потенциальная энергия зависит от взаимного положения тел.

Выражение для потенциальной энергии квазиупругой силы (вдоль оси X) $U = \frac{kx^2}{2}$ в операторном виде будет выглядеть так же $\hat{U}(\Psi) = \frac{k\hat{x}^2}{2}(\Psi) = \frac{k}{2} \hat{x}(\hat{x}(\Psi)) = \frac{k}{2} x \cdot x \cdot \Psi = \frac{kx^2}{2} \cdot \Psi$.

Выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{R}$ перейдет в оператор такого же вида $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi)$, где оператор $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right)$ является обратным к оператору $\hat{R}(\Psi) = R \cdot \Psi$. Очевидно, что $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi) = \frac{1}{R} \cdot \Psi$, поэтому $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \Psi$

5. Оператор кинетической энергии.

В классической механике кинетическая энергия тела определяется выражением

$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Поэтому оператор кинетической энергии имеет вид

$$\hat{E}_k(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) = \frac{1}{2m} \hat{p}(\hat{p}(\Psi)) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar}{i} \bar{\nabla} \left(\frac{\hbar}{i} \bar{\nabla}(\Psi) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi.$$

Найдём собственные значения оператора кинетической энергии для одномерного случая

$\hat{E}_k(\Psi) = E_k \cdot \Psi$ или $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E_k \cdot \Psi$. Получаем уравнение, с которым уже встречались в задаче об одномерной яме с непроницаемыми стенками $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_k \cdot \Psi = 0$.

Откуда $\Psi = C \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_k}}{\hbar} x + \alpha\right)$.

6. Оператор Гамильтона.

В классической механике механическая энергия тела, записанная как функция импульса и координат, называется *функцией Гамильтона* $H = E_k + U = \frac{p^2}{2m} + U$.

В квантовой механике соответствующий оператор называется оператором Гамильтона (или *гамильтонианом*)

$$\hat{H}(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) + \hat{U}(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi.$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической величине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

А) **Линейными**

В) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \bar{\Psi}_1 \hat{F} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{F} \Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Собственные значения, собственные функции операторов:

$$\hat{F}\Psi = a\Psi$$

Спектр собственных значений называется дискретным, если его собственные значения можно пронумеровать, если нельзя – непрерывным. Если одному собственному значению принадлежит несколько собственных функций, собственное значение называется вырожденным.

Собственные функции ортонормированы $\int_V \Psi_n \bar{\Psi}_m dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

Среднее значение

$$\langle f \rangle = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \bar{\Psi} \hat{F} \Psi dV$$

Основные операторы физических величин:

- 1) оператор координат $\hat{x} = x$, непрерывный спектр собственных значений
- 2) радиус-вектор $\hat{r} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$, непрерывный спектр собственных значений
- 3) оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar \text{grad}$, непрерывный спектр собственных значений
- 4) квадрат импульса $\hat{p}^2 = (\hat{p})^2 = -\hbar\Delta$, непрерывный спектр собственных значений
- 5) момент импульса $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$, момент импульса неопределен – нет собственных значений!
- 6) Проекция момента импульса на ось $\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ дискретный спектр собственных значений
- 7) Квадрат момента импульса – дискретный спектр собственных значений (угловой момент)

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \phi}$$
$$\Delta_{\theta, \phi} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

- 8) Кинетическая энергия $\hat{E}_k = \hat{p}^2 / 2m = -\hbar^2 / 2m \Delta$
- 9) Потенциальная энергия $\hat{U} = U$
- 10) Гамильтониан – оператор полной энергии

$$\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m + \hat{U} = -\hbar^2 / 2m \Delta + U$$

Билет №10

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Прохождение микрочастицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.
2. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.
3. Температурный коэффициент сопротивления $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$ чистого беспримесного германия при комнатной температуре равен $\alpha = -0,05 \text{K}^{-1}$. Найдите ширину запрещенной зоны данного полупроводника.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Температурный коэффициент сопротивления...

$$\sigma(T) = \sigma_0 e^{\frac{\varepsilon_0}{2kT}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} = \frac{d \ln \rho}{dT}; \quad \alpha dT = d \ln \rho;$$

$$\rho = e^{\alpha T}; \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = e^{-\alpha T};$$

$$\Delta E_3 = -2kT \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = -2kT e^{-\alpha T} \ln \frac{1}{\sigma_0} e^{-\alpha T};$$

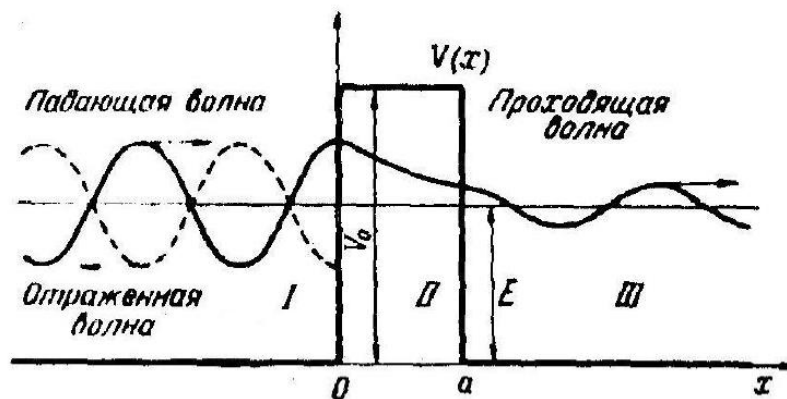
$$\rho = \frac{1}{\sigma}; \quad \sigma(T) = \sigma_0 e^{\frac{\varepsilon_0}{2kT}}; \quad \alpha = \sigma \frac{1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dT} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dT} \left(\frac{\varepsilon_0}{2kT} \right)$$

$$\alpha = -\frac{\varepsilon_0}{2kT^2}; \quad \varepsilon_0 = -2kT^2 \alpha$$

13. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.

Барьер задается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} U_0 > E & x \in [0; a] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Аналогично:

$$\begin{cases} \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1'' + k_1^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2'' - k_2^2\psi_2 = 0 \\ \psi_3'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_3 = \psi_3'' + k_1^2\psi_3 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \exp[ik_1x] + B_1 \exp[-ik_1x] \\ \psi_2 = A_2 \exp[k_2x] + B_2 \exp[-k_2x] \\ \psi_3 = A_3 \exp[ik_1x] + B_3 \exp[-ik_1x] \end{cases}$$

Применим граничные условия, условия регулярности, условия нормированности:

- 1) A_1 положим 1 ; во третьей области нет отраженной волны $\Rightarrow B_3 = 0$;
- 2) Получим систему из 4 уравнений, с 4 неизвестными, применив условия непрерывности. Решив ее, получим коэффициент A_3 , описываемый громоздкой формулой.

Коэффициент прохождения:

$$\bar{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \text{grad} \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \text{grad} \Psi)$$

Определим $|\bar{j}_{\text{пад}}|, |\bar{j}_{\text{прош}}|$

$$|\bar{j}_{\text{пад}}| = \frac{\hbar k_1}{m} |A_1|^2 = \frac{\hbar k_1}{m} ; |\bar{j}_{\text{прош}}| = \frac{\hbar k_3}{m} |A_3|^2 = \frac{\hbar k_1}{m} |A_3|^2$$

Отсюда:

Коэффициент прохождения $D = \frac{|\bar{J}_{\text{прош}}|}{|\bar{J}_{\text{пад}}|} = |A_3|^2 \approx D_0 \exp[-2k_2 a] \approx \exp[-2k_2 a]$

$$D \approx \exp\left[-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right]$$

В случае криволинейного барьера, мы разбиваем его на прямоугольные элементарные участки шириной dx и суммируем:

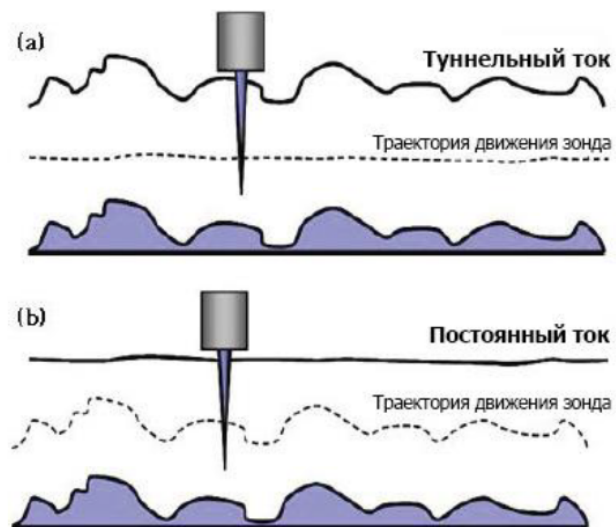
$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right]$$

Прохождение частицы через потенциальный барьер называется **туннельным эффектом**. Вероятность прохождения зависит от высоты и ширины барьера. При прохождении через барьер не меняется полная энергия частицы.

Туннельным эффектом объясняется контактная разность потенциалов, холодная эмиссия электронов из металла, альфа-распад.

Сканирующий туннельный микроскоп (СТМ):

Устройство, позволяющее «увидеть атом»: между иглой и поверхностью металлов создается разность потенциалов – потенциальный барьер. В силу туннельного эффекта между металлом и иглой возникает туннельный ток, по величине которого можно судить о вероятности прохождения, пропорциональной расстоянию от иглы до поверхности металла.



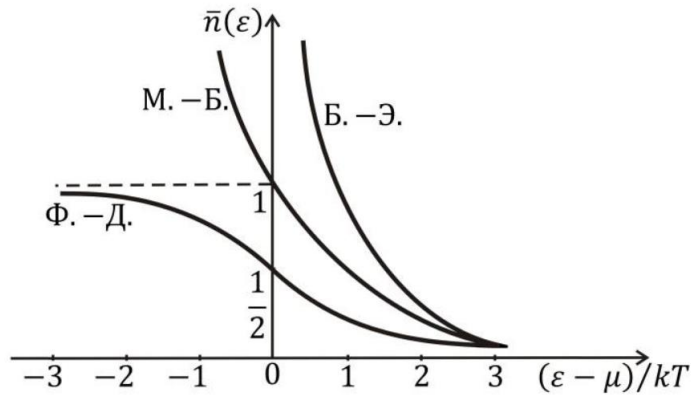
24. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.

Квантовые статистические распределения

Мы рассматриваем 3 статистики, каждая из которых основывается на эргодической гипотезе. Эргодическая гипотеза говорит, что все доступные микросостояния частицы равновероятны за длительный период времени.

Классическая статистика (статистика Больцмана):

$f(\varepsilon) = A e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ (среднее число частиц с энергией ε), в статистике Больцмана 2 частицы различимы.



В квантовых статистиках действует **принцип тождественности одинаковых частиц** – в системе одинаковых частиц реализуются только такие состояния, которые не меняются при перестановке частиц местами, иными словами: одна частица неотличима от другой такой же.

Возьмем волновую функцию $\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N, t)$, зависящую от координат частиц системы.

Если ввести оператор перестановки, переставляющий i и j частицы системы местами:

$$\hat{P}_{ij}\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N, t) = \psi(q_1, \dots, q_j, \dots, q_i, \dots, q_N, t)$$

То принцип тождественности можно представить в виде $\hat{P}_{ij}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}_{ij}$. Из этого следует, что $\hat{P}_{ij}\psi$ также является решением уравнения Шредингера: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{P}_{ij}\psi = \hat{H}\hat{P}_{ij}\psi$

Иначе можно сказать, что ψ и $\hat{P}_{ij}\psi$ описывают одно и то же состояние, а, следовательно, могут отличаться лишь постоянным множителем: $\hat{P}_{ij}\psi = \lambda\psi$, подействовав еще раз оператором перестановки на левую и правую часть, получим: $\hat{P}_{ij}^2\psi = \lambda\hat{P}_{ij}\psi$, поскольку два раза подействовав оператором перестановки на одну и ту же функцию, мы получаем ее же самую, получим: $\psi = \lambda^2\psi$, отсюда $\lambda = \pm 1$

Если $\hat{P}_{ij}\psi = \psi$, то состояние называется **симметричным**. Частицы, описываемыми такими волновыми функциями, называются Бозе-частицами, или **Бозонами** – они

подчиняются **статистике Бозе-Эйнштейна**: $f(\varepsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}$

Если $\hat{P}_{ij}\psi = -\psi$, то состояние называется **антисимметричным**. Частицы, описываемыми такими волновыми функциями, называются Ферми-частицами, или **Фермионы** – они

подчиняются **статистике Ферми-Дирака**: $f(\varepsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}$

Бозоны – частицы-коммунисты, два бозона могут занимать одно и то же состояние, **фермионы** – частицы-индивидуалисты, для них действует принцип Паули.

$f(\varepsilon_i)$ – среднее число частиц в состоянии с энергией ε_i , μ – химический потенциал, термодинамическая функция, применяемая при описании состояния систем с переменным числом частиц. Представляет собой энергию добавления одной частицы в систему без совершения работы

Билет №11

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Уравнение Шредингера для атома водорода. Квантовые числа и их физический смысл.
2. Тепловое излучение. Интегральные и спектральные характеристики излучения. Закон Кирхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина.
3. Найдите кинетическую энергию электрона, при которой его длина волны де Бройля равна его комптоновской длине волны λ_K .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Найдите кинетическую энергию электрона при которой его волны де бройля равна его комптоновской длине волны...

Решение:

Длина волны де Бройля

$$\lambda_{dB} = \frac{\frac{2\pi\hbar}{m_0v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2\pi\hbar}{m_0v} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

и комптоновская длина волны равна

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}$$

Они равны, если $\beta = \sqrt{1 - \beta^2}$, где $\beta = \frac{v}{c}$

$$\text{или } \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Соответствующая кинетическая энергия

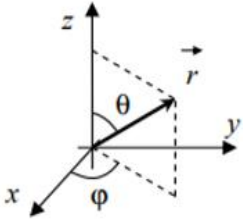
$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 = (\sqrt{2} - 1)m_0c^2$$

Здесь m_0 - масса покоя частицы (электрона).

18. Уравнение Шредингера для атома водорода. Квантовые числа, их физический смысл.

Стационарное уравнение Шредингера для атома водорода.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из неподвижного ядра с зарядом Ze (Z – целое число) и электрона. Такая система при $Z > 1$ описывает водородоподобный ион, а при $Z = 1$ – атом водорода. Считая энергию системы постоянной, запишем уравнение Шредингера для стационарного состояния



$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0.$$

Запишем это уравнение в сферической системе координат, $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Так как оператор Лапласа в этой системе принимает вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

то получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right]$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$\Delta_{\theta, \varphi}(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Для поиска собственных функций этого оператора необходимо решить уравнение

$$\Delta_{\theta, \varphi}(\psi) = \lambda \psi$$

Исследование этого уравнения показывает, что оно обладает непрерывным решением, если собственное имеет специальный вид число $\lambda = -l \cdot (l+1)$, где l – целое неотрицательное число $l = 0, 1, 2, \dots$.

Введём оператор квадрата момента импульса $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$.

В сферической системе координат этот оператор принимает вид

$$\hat{L}^2(\Psi) = -\hbar^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right\} \text{ или } \hat{L}^2(\Psi) = -\hbar^2 \cdot \Delta_{\theta, \varphi}(\Psi).$$

Поиск собственных значений этого оператора $\hat{L}^2(\Psi) = L^2 \cdot \Psi$ приводит к уже известному уравнению $\Delta_{\theta, \varphi}(\Psi) + \frac{L^2}{\hbar^2} \Psi = 0$, откуда следует равенство $\lambda = -\frac{L^2}{\hbar^2}$ или $\frac{L^2}{\hbar^2} = l \cdot (l+1)$ для неотрицательных целых чисел l . Поэтому величина момента импульса для электрона в атоме принимает значения

$$L = \hbar \sqrt{l \cdot (l+1)}.$$

Т.к. проекция вектора на ось Z не может быть больше длины вектора, то из соотношения $|L_z| \leq L$ и равенств $L_z = m\hbar$, $L = \hbar \sqrt{l \cdot (l+1)}$ получаем $|m\hbar| \leq \hbar \sqrt{l \cdot (l+1)}$ или $m^2 \leq l \cdot (l+1)$. С учётом того, что числа m и l – целые это соотношение эквивалентно тому, что значения m находятся в диапазоне $m = -l, \dots, 0, \dots, l$.

Исходное уравнение Шредингера $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$, в сферической системе координат

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = -\frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi}(\psi)$$

с учётом выражения для квадрата момента импульса $\hat{L}^2(\Psi) = -\hbar^2 \cdot \Delta_{\theta,\varphi}(\Psi)$ может быть записано в форме, учитывающей квадрат момента импульса

$$\hbar^2 r^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi \right) = \hat{L}^2(\psi).$$

Следовательно, решение этого уравнения должно зависеть от величины момента импульса.

Это уравнение имеет непрерывные решения при любых положительных значениях энергии $E > 0$. Этому случаю соответствуют решения описывающие электрон, пролетающий мимо ядра.

Для отрицательных значений энергии $E < 0$ непрерывные решения существуют при

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. В этом случае электрон связан с ядром. При этом число l меняется в диапазоне $l = 0, 1, \dots, (n-1)$

Физический смысл квантовых чисел:

1. Главное квантовое число: $n = 1, 2, 3 \dots$ определяет полную энергию электрона в любом квантовом состоянии:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

2. Орбитальное квантовое число $l = 0, 1, 2 \dots, n - 1$ определяет величину момента импульса атома: $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, характеризует размер и форму электронного облака
3. Магнитное квантовое число $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \pm l$ определяет величину проекции момента импульса $L_z = \hbar m$, орбитального магнитного момента $p_z^m = \mu_B m$, соответственно, ориентацию электронного облака в пространстве
4. Магнитное спиновое квантовое число $m_s = \pm \frac{1}{2}$ - характеризует направление собственных механического и магнитного момента электронов

В атоме может быть только один электрон с данным набором квантовых чисел, согласно **принципу запрета Паули** (в системе тождественных фермионов несколько фермионов не могут находиться в одном и том же состоянии)

Число различных состояний в зависимости от энергетического уровня равно $2n^2$

1. Тепловое излучение. Интегральные и спектральные характеристики излучения. Закон Кирхгофа. Закон смещения Вина. Закон Стефана-Больцмана.

Тепловым излучением (ТИ) называется излучение ЭМВ веществом за счет его внутренней энергии.

Нетепловое излучение (за счет внешней энергии) называется люминесценцией.

Характеристики излучения:

Интегральные: (количественные)

- a) Энергия излучения W
- b) Поток излучения (мощность) $\Phi_T = \frac{dW}{dt}$, Вт – энергия излучения, переносимая через элементарную поверхность за время dt
- c) Энергетическая светимость $R_T = \frac{d\Phi}{dS}$ – отношение потока через элементарную поверхность к ее площади, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

Спектральные: (описывающие распределение по длинам волн, частотам)

- a) Спектральная плотность энергетической светимости (испускательная способность):
 $r_{\lambda,T} = \frac{d\Phi}{dS d\lambda}$, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ – энергетическая светимость излучения в интервале $[\lambda - d\lambda; \lambda + d\lambda]$

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda$$

- b) Поток излучения с площади S в интервале длин волн $[\lambda_1; \lambda_2]$

$$\Phi_{\lambda,T} = \int_S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r_{\lambda,T} d\lambda dS$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}; d\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda; r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c}{\lambda^2} r_{\omega,T}$$

Поглощательная способность тела: (в интервале $[\omega - d\omega; \omega + d\omega]$) $a_{\omega,T} = \frac{\varphi_{\omega,T}}{\varphi_{\omega,T}} < 1$,

($\varphi_{\omega,T}$ – поглощенный поток)

Абсолютно черное тело: $a_{\omega,T}^* = 1$

Закон Кирхгофа: $\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = r^*_{\omega,T} = f(\omega, T)$, отношение излучательной способности любого тела к его поглотительной способности одинаково для всех тел при данной температуре для данной частоты и не зависит от их формы и химической природы.

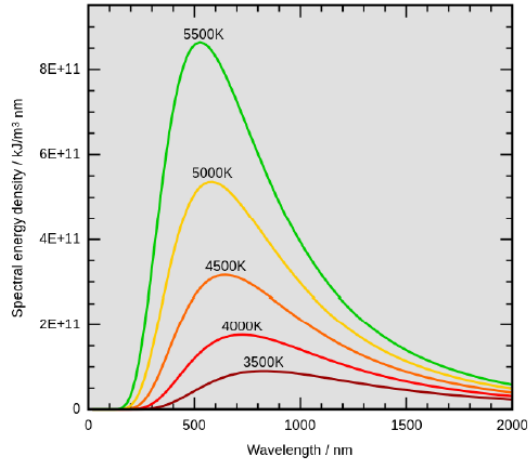
Закон смещения Вина: $f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right)$,

$$\left(F\left(\frac{\omega}{T}\right) = F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)\right) \text{ из чего следует}$$

$$\lambda_{\max} T = \text{const} = b$$

λ_{\max} – длина волны которой соответствует максимум отношения испускательной и поглотительной способностей при данной температуре.

$$b = 2,9 * 10^{-3} \text{ мК}, \text{ постоянная Вина}$$



Закон Стефана-Больцмана: $R^*_T = \sigma T^4$, $\sigma = 5,67 * 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$ постоянная Стефана-Больцмана.

Для неабсолютно черного: $R_T = \gamma \sigma T^4$, $\gamma = \gamma(T) < 1$

$$u_T = \int_0^\infty u_{\omega,T} d\omega - \text{объемная плотность энергии равновесного теплового излучения.}$$

$u_{\omega,T}$ – спектральная объемная плотность энергии равновесного ТИ.

$$dn_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega - \text{объемная плотность узлов стоячих волн.}$$

$$u_T = \int_0^\infty u_{\omega,T} d\omega = KT \int_0^\infty dn_\omega$$

Формула Рэля-Джинса:

$$u_{\omega,T} = KT \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

Дискретный характер испускания и поглощения электромагнитного теплового излучения веществом. (Гипотеза Планка): ТИ излучается и поглощается порциями, энергия которых пропорциональна частоте: $\varepsilon = \hbar \omega$ ($\hbar = 1,055 * 10^{-34} \text{ Дж} * \text{с}$)

Формула Планка для равновесного ТИ:

$$r^*_{\omega,T} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} * \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar \omega}{kT}\right] - 1}$$

$$u_{\omega,T} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} * \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar \omega}{kT}\right] - 1}$$

Билет №12

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Эффект Холла в полупроводниках, его практическое применение.
2. Волновая функция, ее вероятностный смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Принцип суперпозиции в квантовой механике.
3. Определите красную границу $\lambda_{\text{кр}}$ фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость фотоэлектронов равна $V_{\text{макс}} = 6,5 \cdot 10^5$ м/с.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Определите красную границу фотоэффекта для цезия...

Решение. При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = A + T$ в случае красной границы запишется в виде

$$\varepsilon = A, \text{ или } hc/\lambda_0 = A.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = hc/A. \quad (1)$$

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A = \varepsilon - T = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Выпишем числовые значения величин, выразив их в СИ: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $\lambda = 400$ нм = $4 \cdot 10^{-7}$ м; $m = 9,11 \times 10^{-31}$ кг; $v = 6,5 \cdot 10^5$ м/с.

Подставив эти значения величин в формулу (2) и вычислив, получим

$$A = 3,05 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,305 \text{ эВ}.$$

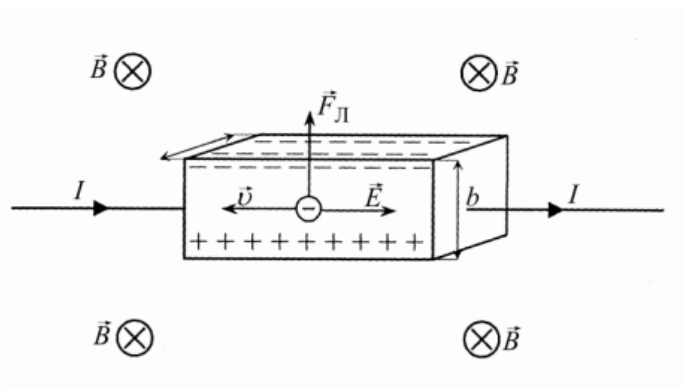
Для определения красной границы фотоэффекта подставим значения A , h и c в формулу (1) и вычислим:

$$\lambda_0 = 651 \text{ нм}.$$

36. Эффект Холла в полупроводниках, его практическое применение.

Эффект Холла заключается в возникновении поперечного электрического поля в полупроводнике с током, помещенном во внешнее магнитное поле.

Этот эффект возникает вследствие перераспределения заряда по проводнику из-за действующий на носитель тока силы Лоренца. В результате перераспределения заряда возникает поперечное электрическое поле.



Напряженность этого поля можно найти из условия равновесия: $e\bar{E}_H = \bar{F}_L$

Общая формула для Холловской напряженности: $\bar{E}_H = R_H[\bar{B}, \bar{j}]$, R_H – постоянная Холла.

- Проводник p-типа: $\bar{F}_L = e[\bar{v}, \bar{B}] = e\left[\frac{\bar{j}}{ep}, \bar{B}\right]$

Отсюда: $\bar{E}_H = \frac{1}{ep}[\bar{B}, \bar{j}] = R_H[\bar{B}, \bar{j}]$

Соответственно для полупроводников p-типа $R_H = \frac{1}{ep}$

Аналогично можно вывести:

- для полупроводников n-типа $R_H = -\frac{1}{en}$
- для смешанных полупроводников:

$$R_H = \frac{-n\mu_n^2 + p\mu_p^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}$$

ЭДС Холла: из $\bar{E}_H = R_H[\bar{B}, \bar{j}] \Rightarrow E_H = R_H B I / ha$

h, a – высота и ширина поперечного сечения проводника,

ЭДС холла легко найти как: $U_H = hE_H = R_H B I / a$

Такая простая зависимость сделала Холловские датчики лучшими приборами для измерения напряженности магнитного поля. Также их используют в тахометрах, и во многих других приборах.

. Волновая функция, ее статистический смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Принцип суперпозиции в квантовой механике.

Волновой функцией называется комплекснозначная функция, используемая в квантовой механике для описания квантового состояния системы.

Волновая функция не имеет физического смысла, это «нечто комплексное» в пространстве. Физический смысл имеет квадрат волновой функции – это вероятность обнаружить систему в положении, описываемом координатами x_i в момент времени t .

$$\omega = |\Psi(x, y, z, t)|^2 = \Psi\bar{\Psi} = \frac{dP}{dV}$$

ω – плотность вероятности

Вероятность P обнаружить частицу в объеме V :

$$P = \int_V \Psi\bar{\Psi} dV$$

Условие нормировки волновой функции (вытекает из вероятностного смысла волновой функции):

$$\int_{\infty} \Psi\bar{\Psi} dV = 1$$

Условие нормировки выполняется не во всех задачах квантовой механики, например, интеграл будет расходиться в случае, если частица удаляется в бесконечность.

В нашем курсе мы имеем дело только с ортонормированными системами функций:

Система Ψ_n, Ψ_m называется ортонормированной, если:

$$\int_V \Psi_n \bar{\Psi}_m dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

δ_{nm} – коэффициент Кронегера.

Условия регулярности волновой функции (обязательны для всех волновых функций):

1. Условие конечности: $|\Psi|^2$ принимает только конечные значения (для нормированной функции $|\Psi|^2 \xrightarrow{\infty} 0$)
2. Условие однозначности: $\Psi(x, y, z, t)$ – однозначная функция координат и времени.
3. Условия непрерывности и гладкости – волновая функция в любой момент времени должна быть непрерывной функцией координат, ее частные производные по координатам также непрерывны (они могут терпеть разрыв только в случае, если силовая функция в данной точке терпит бесконечный разрыв)

Принцип суперпозиции в квантовой механике: следствие волновых свойств, линейности уравнения Шредингера.

Суперпозиция состояний квантовомеханической системы (частицы) также является ее состоянием.

Если частица может находиться в состояниях Ψ_1, Ψ_2 , то существует состояние

$$\Psi = A\Psi_1 + B\Psi_2$$

При измерении состояния мы редуцируем волновую функцию: состояние суперпозиции, где она неопределена, сводится к определенному состоянию Ψ_1 или Ψ_2

Коэффициенты в разложении $\Psi = \sum C_m \Psi_m$ можно найти по формуле:

$$C_m = \int_V \Psi \overline{\Psi_m} dV$$

(из нормировки)

Вектор плотности потока вероятности:

Введем вектор плотности потока вероятности, определяющий, с какой скоростью из данной области «вытекает» или «втекает» вероятность обнаружить частицу.

Интегральная форма: $\oint \vec{j} dS = -\frac{dP}{dt} = -\frac{d}{dt} \int |\Psi|^2 dV$

Дифференциальная форма: $\nabla \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$

Этот вектор можно также интерпретировать как количество частиц, проходящих через данную площадь в направлении нормали к ней за единицу времени.

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \text{grad} \overline{\Psi} - \overline{\Psi} \text{grad} \Psi)$$

Билет №13

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 13
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Собственный механический и магнитный моменты электрона. Опыт Штерна и Герлаха.
2. Примесная проводимость полупроводников. Полупроводники р- и п-типа. Уровень Ферми в примесных полупроводниках.
3. Покажите, что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля электрона. Определите длину волны де Бройля электрона на круговой орбите с главным квантовым числом n .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Покажите что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите..

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

$$mVr = n\hbar$$

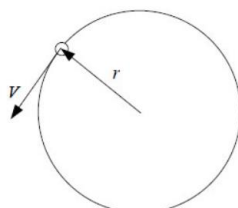
$$\rightarrow r(n) = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$V = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar n}$$

$$l(n) = 2\pi r(n) = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{2\pi\hbar}{mV} = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n}{me^2}$$

$$\frac{l}{\lambda_{\text{Б}}} = n$$



19. Собственные механический и магнитный моменты электрона. Опыт Штерна и Герлаха.

Атом обладает механическим моментом L , у которого определена величина и проекция на ось, $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$; $L_z = \hbar m$

Так, как движущийся вокруг ядра электрон является заряженной частицей, его орбиту можно рассматривать как некоторый замкнутый контур с током, который можно охарактеризовать орбитальным магнитным моментом p^m

В классической теории $p^m = j\pi r^2 = (ev/2\pi r)(\pi r^2) = evr/2$

Механический и магнитный моменты связаны гиромангнитным соотношением:

$$\frac{p^m}{L} = \frac{e}{2m}$$

Отсюда:

$$p^m = L \frac{e}{2m} = \frac{\hbar e}{2m} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{Тл}$ – магнетон Бора, единица измерения магнитных моментов атомов.

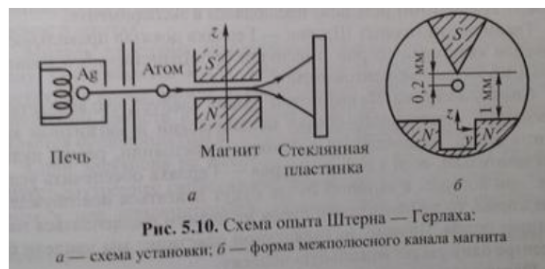
Величина проекции магнитного момента равна:

$$p_z^m = m\mu_B$$

Опыт Штерна и Герлаха.

Помимо квантования энергии в атоме присутствует пространственное квантование – дискретность проекции магнитного момента атома на выбранное направление. В опыте Штерна и Герлаха поток атомов пропускается сквозь полюса магнита с

сильным неоднородным магнитным полем, направленным вдоль оси z , которое за счет особой формы магнита сильно отклоняет пролетающие атомы в зависимости от их магнитного момента. С позиций классической механики магнитные моменты в атомах ориентированы хаотически, и на экране должно появляться сплошное пятно, но по результатам опыта мы наблюдаем серию узких полос, подтверждающих пространственное квантование магнитных моментов атомов.



33. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводниках n-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника n-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника n-типа.

Примесная проводимость полупроводников.

Некоторые примеси даже в малых концентрациях очень сильно изменяют проводимость полупроводника. Такие примеси приводят либо к появлению:

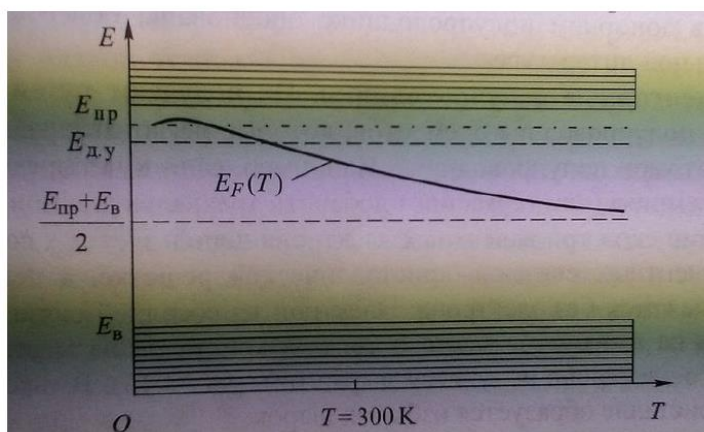
- Избыточного количества свободных электронов – примеси, которые отдают электроны – **донорные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией свободных электронов, называются полупроводниками **n-типа**.
- Избыточного количества дырок – **примеси, забирающие свободные электроны – акцепторные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией дырок называются полупроводниками **p-типа**.

Донорные полупроводники получают, путем добавления в полупроводник элементов, от которых легко отрывается электрон. К примеру, добавляя к 4 валентному кремнию 5-валентный мышьяк, мышьяк использует свои четыре валентных электрона для создания валентных связей с кристаллической решеткой кремния, а один электрон останется «лишним».

Энергия ионизации «лишнего» электрона крайне мала, и составляет порядка 0,01эВ. Он легко отрывается от своего атома и становится свободным электроном. Как и в случае беспримесного проводника, происходят процессы генерации пар электрон-дырка, но их вклад в общую проводимость значительно меньше при комнатной температуре.

Согласно зонной теории, это приведет к появлению дополнительных донорных уровней вблизи нижней границы зоны проводимости. Электрону для перехода в зону проводимости нужно значительно меньше энергии (энергия активации донорной примеси $E_{дон}$), чем для перехода их валентной зоны (эта энергия соответствует ширине запрещенной зоны).

С ростом температуры энергия Ферми, которая при низкой температуре находится посередине между донорным уровнем и зоной проводимости, из-за «истощения» донорных уровней, а также из-за активной генерации пар электрон-дырка возвращается в середину запрещенной зоны.



34. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводнике p-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника p-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника p-типа.

Примесная проводимость полупроводников.

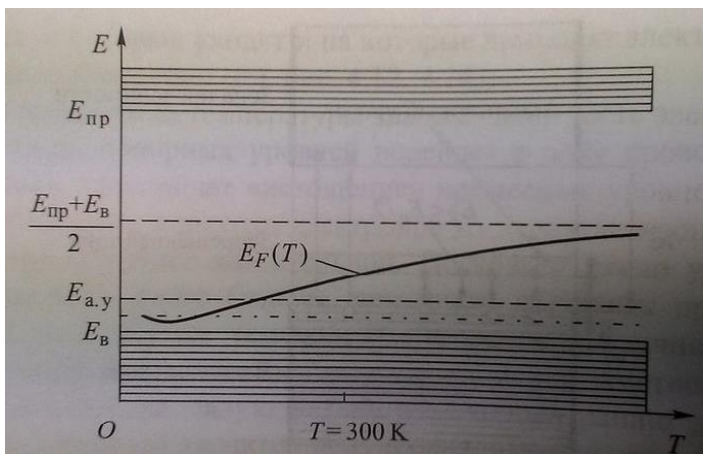
Некоторые примеси даже в малых концентрациях очень сильно изменяют проводимость полупроводника. Такие примеси приводят либо к появлению:

- Избыточного количества свободных электронов – примеси, которые **отдают электроны** – **донорные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией свободных электронов, называются полупроводниками **n-типа**.
- Избыточного количества дырок – **примеси, забирающие свободные электроны** – **акцепторные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией дырок называются полупроводниками **p-типа**.

Акцепторные полупроводники получают путем добавления в полупроводник элементов, которые легко отбирают электрон у атомов полупроводника. Например, добавление к четырехвалентному кремнию, трехвалентного индия. Одна валентная связь из четырех остается незаполненной, и электрон из соседней связи легко переходит на это вакантное место, образуя одну дырку на каждый атом индия в кристаллической решетке.

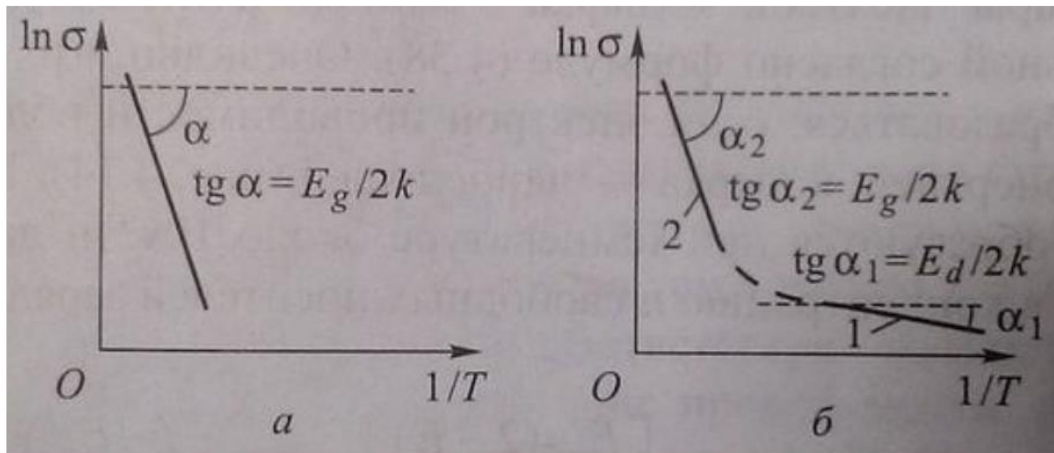
Аналогично с донорными полупроводниками, возможно образование пар электрон-дырка, но при комнатной температуре проводимость за счет этого эффекта крайне мала в сравнении с акцепторной проводимостью.

В акцепторном проводнике, как и в донорном образуются дополнительные зоны, но не сверху запрещенной зоны, а снизу, над верхней границей валентной зоны. При низкой температуре, энергия Ферми, соответственно, оказывается посередине между акцепторными уровнями, а при повышении температуры, за счет насыщения акцепторных примесей, и активной генерации пар электрон-дырка, энергия Ферми смещается в центр запрещенной зоны, соответственно, акцепторный проводник при высокой температуре ведет себя как обычный беспримесный.



Температурная зависимость логарифма проводимости примесного полупроводника n-типа.

На графиках показано сравнение логарифма проводимости беспримесного проводника и донорного проводника. Из графика видно, что донорный проводник приобретает проводимость при значительно более низкой температуре.



Построение такого графика используют для экспериментального определения ширины запрещенной зоны.

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 14
 по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частицы для различных состояний.
2. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Виды радиоактивных излучений. Активность.
3. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в $\eta = 2$ раза длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определите начальную и конечную температуры тела T_1 и T_2 .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
 (число, месяц, год)

При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в $\eta=2$ раза

Дано:

$$T_2 = 2T_1$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 400 \text{ нм} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Найти:

$$T_1 - ? \quad T_2 - ?$$

Решение.

$$\begin{cases} \lambda_1 T_1 = b \\ \lambda_2 T_2 = b \end{cases} \text{ закон смещения Вина} \rightarrow \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_2 T_2} = 1 \rightarrow \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_2 \cdot 2T_1} = 1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2 \rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2 \rightarrow \Delta\lambda T_2 = b \rightarrow T_2 = \frac{b}{\Delta\lambda} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-7}} = 7250 \text{ К} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{2} = \frac{7250}{2} = 3625 \text{ К}$$

Ответ.

$$3625 \text{ К}$$

$$7250 \text{ К}$$

10. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частицы для различных состояний.

Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Волновая функция:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - 0)\psi = \psi'' + k^2\psi = 0$$

Решение имеет вид $\psi = A\sin kx + B\cos kx$

Из граничных условий: $\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$; $\psi(a) = 0 \Rightarrow ka = \pi n, n = 1, 2, 3 \dots$

$$ka = \pi n \Rightarrow \frac{\pi^2 n^2}{a^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

Получили **Квантование энергии:**

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n \sim n \Rightarrow \frac{\Delta E_n}{E_n} \sim \frac{1}{n}$$

Дискретность энергии убывает при увеличении номера уровня.

Энергия частицы в яме не равна нулю – это согласуется с принципом Гейзенберга.

Плотность вероятности для различных энергетических уровней – найдем

коэффициент A из условия нормировки: $\int_0^a A^2 \sin^2 \pi nx/a dx = A^2 a/2 = 1$

Получили волновую функцию $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \pi nx/a$

С математической точки зрения задача о частице в одномерной потенциальной яме аналогична задаче о колебании жестко закрепленной струны: в яму должно

«укладываться» (из граничных условий) целое число полуволен де Бройля: $a = \frac{n\lambda_B}{2}$

Плотность вероятности для различных энергетических уровней:

$$|\psi_n|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \pi n x / a$$

Вероятность обнаружить частицу внутри некоторого интервала:

$$P = \int_1^2 |\psi_n|^2 dx$$



Рис. 4.3. Волновые функции частицы в потенциальной яме с непроницаемыми стенками

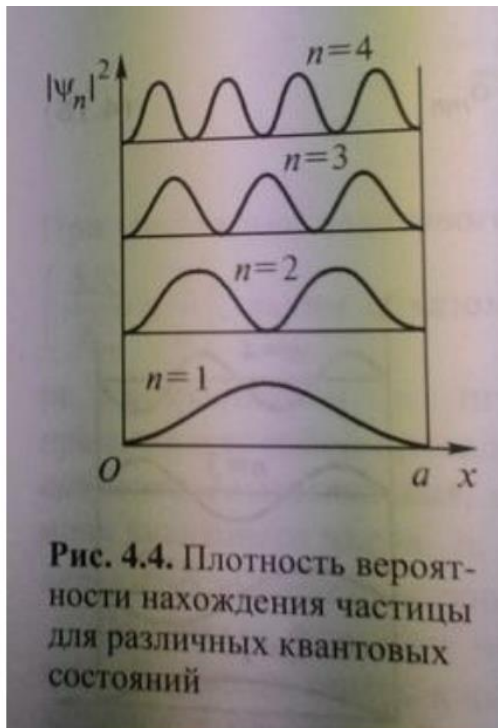


Рис. 4.4. Плотность вероятности нахождения частицы для различных квантовых состояний

42. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Активность. Естественная и искусственная радиоактивность.

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, с испусканием частиц.

Основной закон радиоактивного распада: $N(t) = N_0 \exp[-\lambda t] = N_0 2^{[-t/T]}$

Постоянная распада $\lambda = -dN/Ndt$, вероятность распада ядра за единицу времени

Период полураспада: $\tau = \ln 2 / \lambda$, время за которое распадется половина ядер

Среднее время жизни ядра: $\tau_{жизни} = 1/\lambda$

- К-захват электрона: ${}^0_{-1}e + {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} X + {}^0_0\gamma$
- Гамма-распад – испускание жесткого коротковолнового ЭМИ.

Активность радиоактивного источника – количество распадов за единицу времени. В Международной системе единиц (СИ) единицей активности является **беккерель** (Бк, Bq).

В образце с активностью 1 Бк происходит в среднем 1 распад в секунду: $1 \text{ Бк} = 1 \text{ с}^{-1}$

Внесистемными единицами активности являются:

- кюри (Ки, Ci); $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$.
- резерфорд (Рд, Rd); $1 \text{ Рд} = 10^6 \text{ Бк}$ (используется редко).

Радиоактивность ядер, существующих в природных условиях, называется естественной. Радиоактивность ядер, полученных с помощью ядерных реакций в лабораторных условиях (например, на ускорителях), называется искусственной.

Билет №15

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 15
 по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Фотоэффект, его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.
2. Структура атомного ядра. Характеристики ядер: заряд, размеры, масса, энергия связи. Свойства и обменный характер ядерных сил.
3. До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов была равна средней энергии свободных электронов в серебре при $T = 0$ К? Энергия Ферми серебра $E_F = 5,51$ эВ.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
 (число, месяц, год)

До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot F(E) dE}{\int_0^{\infty} F(E) dE}, \text{ где } F(E) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} m_0^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases} \quad \text{— функция распределения свободных электронов по энергиям}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F.$$

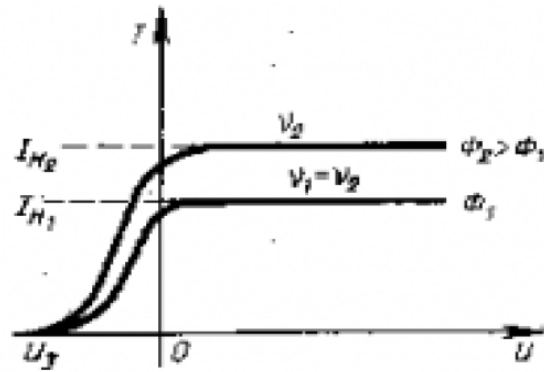
Для классического газа: $\langle E \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT$

$$T = \frac{2}{5} \frac{E_F}{k} = 2,55 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

3. Фотоэффект, его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.

Фотоэффектом называются различные процессы поглощения фотона квантовой системой. Фотоэффект может быть внешним (эмиссия электронов с поверхности металла), внутренним (образование в полупроводнике пары электрон-дырка, что повышает концентрацию носителей тока, следовательно, общую электропроводность, при поглощении фотона), также к фотоэффекту относится фотоионизация – ионизация атома при поглощении фотона.

На установке для исследования внешнего фотоэффекта током насыщения называют максимальный ток, достигаемый, когда все эмиссированные электроны попадают с катода на анод, запирающим напряжением – напряжение, при котором пропадает фотоэффект.



Законы фотоэффекта:

- Ток насыщения пропорционален потоку падающего излучения.
- $T_{max} = eU_{зап}$ не зависит от интенсивности излучения, но зависит от материала фотокатода, и линейно зависит от частоты падающего света (линейно возрастает с увеличением частоты).
- Для каждого материала фотокатода существует красная граница фотоэффекта – такая длина волны, что при увеличении длины волны падающего света больше красной границы фотоэффект прекращается.

Работа выхода: с точки зрения квантовой физики электроны в металле находятся в потенциальной яме. Энергия электрона внутри ямы принимает дискретные значения, наибольшее из которых называется энергией Ферми. Работой выхода из металла называется энергия, которую нужно придать электрону Ферми для вылета из потенциальной ямы металла (при условии, что электрон не теряет энергию на взаимодействие с другими электронами и дефектами кристаллической решетки)

Уравнение Эйнштейна:

$$T_{max} = \hbar\omega - A_{\text{вых}}$$

Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения: ТИ является как потоком единичных неделимых частиц, так и волнами, способными к дифракции, интерференции и поляризации.

40. Структура атомного ядра. Характеристики ядер: заряд, масса, размеры, энергия связи. Свойства и обменный характер ядерных сил.

Существование ядра было доказано в опытах Резерфорда. Пространственные размеры ядра – порядка стотысячной ангстрема. В ядре сосредоточено 99,9% массы атома.

Ядро состоит из:

- Протонов: масса протона равна 1836 масс электрона, протон заряжен положительным элементарным зарядом, имеет полуцелый спин $\frac{1}{2}$. Протон имеет собственный магнитный момент $\mu_p = 2,7928 \mu_n$ ($\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$ ядерный магнетон, в 1836 раз меньше магнетона Бора), который в 660 раз меньше магнитного момента электрона. В свободном состоянии протон абсолютно стабилен (период полураспада много больше, чем возраст Вселенной)
- Нейтронов: масса нейтрона на 2,5 массы электрона больше, чем масса протона, нейтрон не заряжен, но имеет полуцелый спин $\frac{1}{2}$, и собственный магнитный момент $\mu_n = -1,9131 \mu_n$ (магнитный момент нейтрона направлен против механического момента). Нейтроны устойчивы только в составе ядра, свободный нейтрон распадается на протон, электрон и антинейтрино со средним временем жизни 12 минут.

Структура ядра обозначается как A_ZX

X – обозначение химического элемента, Z – зарядовое число (число протонов), A – массовое число (число протонов и нейтронов).

Два ядра являются:

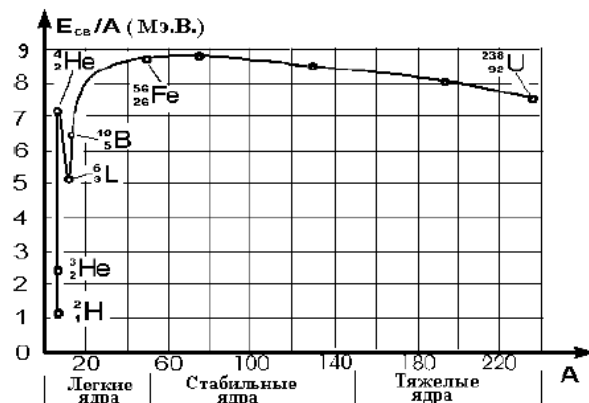
- Изотопами одного и того же химического элемента, если у них одинаковое зарядовое и разное массовые числа.
- Изобарами, если у них одинаковое массовое, и разные зарядовые числа.
- Изомерами, если у них одинаковые массовое и зарядовое число, но разный период полураспада.

Суммарная масса покоя нуклонов больше массы покоя ядра. Эта разница называется дефектом массы: $Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} = \Delta m$

Соответственно, энергия системы невзаимодействующих нуклонов больше энергии ядра на величину энергии связи: $E_{\text{св}} = \Delta mc^2$

Можно говорить об удельной энергии связи – энергия связи на один нуклон: $E_{\text{уд.св}} = E_{\text{св}}/A$

Максимальная удельная энергия связи приходится на элементы, с массовыми числами 50-60 (стабильные ядра)
Самые стабильные ядра: хром, железо, кобальт.
Энергетически выгоден: распад тяжелых ядер, синтез из легких ядер.



Ядерные силы

Нуклоны в ядре связаны между собой ядерными силами; их свойства:

- Ядерные силы – проявление сильного взаимодействия, которое на порядок интенсивнее электромагнитных сил, взаимоотталкивающих протоны.
- Ядерные силы – «гигант с короткими руками», они проявляются лишь на расстояниях порядка размера ядра (стотысячная ангстрема), на существенно меньших расстояниях они становятся силами отталкивания.
- Ядерные силы, действующие между двумя нуклонами, не зависят от зарядов взаимодействующих частиц.
- Ядерные силы не являются центральными, они направлены под углом к прямой, соединяющей центры нуклонов, и зависят от их взаимной ориентации.
- Свойство насыщения: в сферу силового действия одного нуклона может попасть только ограниченное количество соседних нуклонов.

Некоторые свойства ядерных сил описываются в рамках мезонной теории: вводится виртуальная частица – *мезон*, являющаяся переносчиком ядерного взаимодействия. Существование мезонов вытекает из неопределенности энергии: в течении конечного промежутка времени система имеет неопределенность энергии $\Delta E \tau = \hbar$;

Таким образом, нуклон может без потери энергии выпустить частицу энергии $\Delta E = m_M c^2$, среднее время жизни которой $\tau = \hbar / \Delta E$.

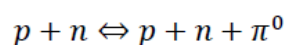
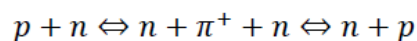
В рамках этой теории объясняется короткий радиус ядерного взаимодействия: поскольку мезон не может двигаться быстрее скорости света, радиус облака виртуальных мезонов, которое окружает каждый нуклон, равен:

$$r_M = c\tau = c * \frac{\hbar}{m_M c^2} = \frac{\hbar}{m_M c} = \lambda_M$$

То есть, комптоновской длине мезона. Поскольку, радиус сильного взаимодействия равен 1..2 фм, мезон должен иметь массу, равную 200..300 масс электрона.

В современной мезонной теории обнаружено несколько видов мезонов, с массами больше, чем 300 масс электронов, а также обнаружена предсказанная частица ядерного взаимодействия, названная пи-мезоном. Пи-мезоны имеют массу около 270 масс электрона, могут иметь положительный, отрицательный элементарный заряд, а также быть нейтральными. Пи-мезоны имеют нулевой спин.

Ядерное взаимодействие таким образом можно интерпретировать как обмен пи-мезонами, к примеру по схемам:



1. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.
2. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.
3. Масс-спектрометрический анализ образцов лунной породы показал, что отношение количества атомов ^{40}Ar и ^{40}K в ней равно $\eta = 10,3$. Считая, что аргон целиком образовался из калия в результате радиоактивного распада, определите возраст лунной породы. Период полураспада ^{40}K составляет $T_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9$ лет.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.

(число, месяц, год)

Масс-спектрометрический анализ образцов лунной породы показал, что отношение количества атомов ^{40}Ar ...

η Отн. кол-ва атомов в породе ^{40}Ar и ^{40}K равно $\eta = 10,3$. Считая, что Ar получен из K распада, определить возраст породы.
 $T_{1/2}$ для K - $1,25 \cdot 10^9$ лет

$$\frac{N_{\text{Ar}}}{N_{\text{K}}} = \eta \Rightarrow \text{исходно } N_{\text{K}_0} = N_{\text{Ar}} + N_{\text{K}} = N_{\text{K}}(1 + \eta)$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{з-н распада}$$

$$N_{\text{K}} = N_{\text{K}}(1 + \eta) e^{-\lambda t_1}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$(1 + \eta)^{-1} = e^{-\lambda t_1} \Rightarrow \ln(1 + \eta) = \lambda t_1$$

$$t_1 = \frac{\ln(1 + \eta)}{\ln 2} T = 4,37 \cdot 10^9 \text{ лет}$$

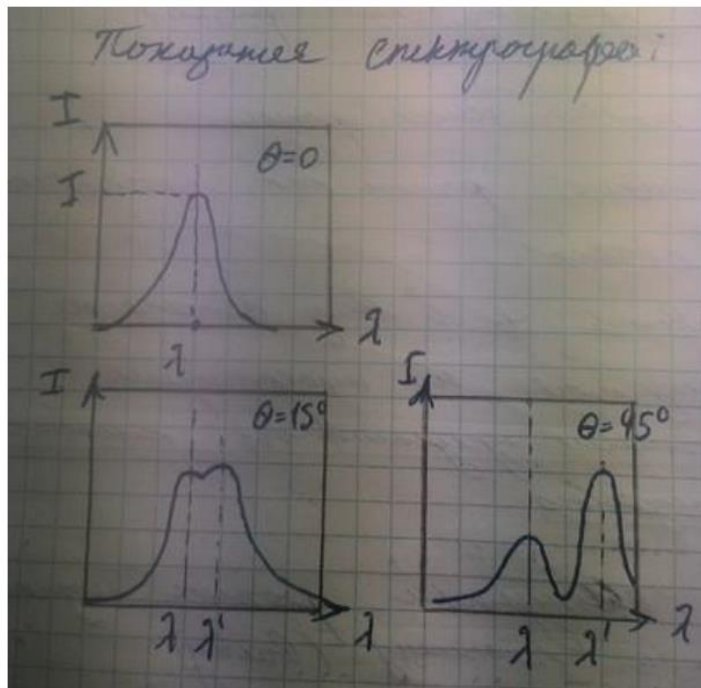
4. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.

Эффект Комптона объясняется упругим рассеиванием фотонов на свободных электронах вещества.

Часть импульса фотон передает электрону, от чего уменьшается энергия фотона и увеличивается его длина волны.

Определим зависимость

$\lambda' - \lambda = f(\theta)$, записав уравнения законов сохранения энергии и импульса для системы из электрона и фотона, а также релятивистского инварианта для электрона (k – волновой вектор электрона, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)



$$\begin{cases} \hbar\omega + mc^2 = E_{\text{эл}} + \hbar\omega' \\ \hbar\vec{k}_\phi = \hbar\vec{k}'_\phi + \vec{P}_e \\ E_{\text{эл}}^2 - P_e^2 c^2 = m^2 c^4 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta)$

$\lambda_c = 2,43 * 10^{-12}\text{м}$ - длина волны Комптона для электрона.

Мы не наблюдаем комптоновского рассеяния на ядрах, поскольку из-за их большой массы величина комптоновской длины волны для ядер слишком мала. Эффект комптоновского рассеивания на электронах мы наблюдаем только в рентгеновском излучении, потому что длина рентгеновского излучения сопоставима с длиной волны Комптона.

31. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.

В основе зонной теории лежат следующие главные приближения:

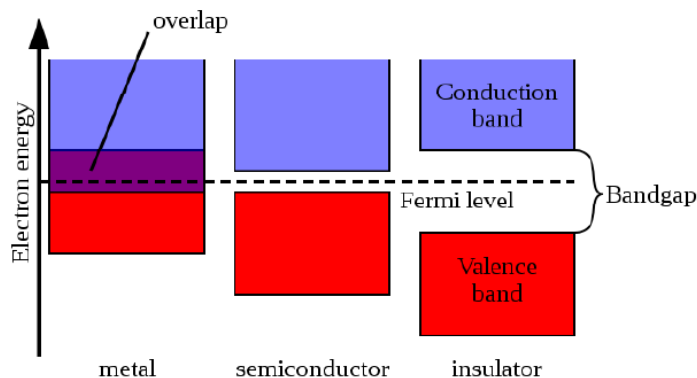
- Твёрдое тело представляет собой идеально периодический кристалл.
- Равновесные положения узлов кристаллической решётки фиксированы.
- Многоэлектронная задача сводится к одноэлектронной: воздействие на данный электрон всех остальных описывается некоторым усредненным периодическим полем.

По взаимному расположению зон вещества делят на три большие группы:

Проводники — зона проводимости и валентная зона перекрываются, образуя одну зону, называемую зоной проводимости. В металлах зоной проводимости называется наивысшая разрешённая зона, в которой находятся электроны при температуре 0 К. Электрон может свободно перемещаться между ними, получив любую допустимо малую энергию. Таким образом, при приложении к телу разности потенциалов, электроны свободно движутся из точки с меньшим потенциалом в точку с большим, образуя электрический ток. К проводникам относят все металлы;

Полупроводники — зоны не перекрываются, и расстояние между ними (ширина запрещённой зоны) составляет менее 3,5 эВ. При абсолютном нуле температуры в зоне проводимости нет электронов, а валентная зона полностью заполнена электронами, которые не могут изменить своё квантомеханическое состояние, то есть не могут упорядоченно двигаться при приложении электрического поля. При повышении температуры за счет теплового движения часть электронов, нарастающая при повышении температуры, «забрасывается» из валентной зоны в зону проводимости и собственный полупроводник становится электропроводным, причём его проводимость нарастает при увеличении температуры, так как растёт концентрация носителей заряда — электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. У полупроводников ширина запрещённой зоны относительно невелика, поэтому для перевода электронов из валентной зоны в зону проводимости требуется энергия меньшая, чем для диэлектрика, именно поэтому чистые (собственные, нелегированные) полупроводники обладают заметной проводимостью при ненулевой температуре;

Диэлектрики — зоны как и у полупроводников не перекрываются, и расстояние между ними составляет, условно, более 3,5 эВ. Таким образом, для того, чтобы перевести электрон из валентной зоны в зону проводимости требуется значительная энергия (температура), поэтому диэлектрики ток при невысоких температурах практически не проводят.



1. Частица в трехмерном потенциальном ящике. Энергетический спектр частицы. Понятие о вырождении энергетических уровней.
2. Элементарные частицы. Виды взаимодействий элементарных частиц. Классификация частиц. Лептоны и адроны. Кварковая структура адронов.
3. Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям, найдите отношение средней кинетической энергии свободных электронов в металле при $T=0$ к их максимальной энергии.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям?

$$E_{\max} = E_F^{(0)}; \langle E_K \rangle = \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} E f(E) g(E) dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} f(E) g(E) dE} = \left| \begin{array}{l} g(e) \cong \sqrt{E} \\ f(E) \cong 1 \end{array} \right| = \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} E^{1/2} dE} = \frac{2/5 E_F^{5/2}}{2/3 E_F^{3/2}} = \frac{3}{5} E_F^{(0)} \Rightarrow$$

$$\frac{\langle E_K \rangle}{E_{\max}} = \frac{\frac{3}{5} E_F^{(0)}}{E_F^{(0)}} = \frac{3}{5}$$

11. Частица в трехмерном потенциальном ящике. Энергетический спектр частицы. Понятие о вырождении энергетических уровней.

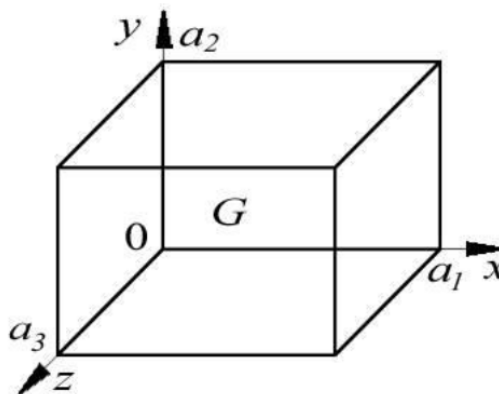
$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & u(x, y, z) \in G \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Решение будем искать в виде

$$\psi(x, y, z) = \psi(x)\psi(y)\psi(z)$$

Получим три одномерных уравнения
(аналогично случаю с одномерной ямой)

$$\frac{\partial^2 \psi(x_i)}{\partial x_i^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_i \psi = 0$$



Решения которых, с учетом граничных условий:

$$\psi_n(x_i) = \sqrt{\frac{2}{a_i}} \sin \pi n x_i / a_i$$

Отсюда, волновая функция частицы в трехмерном потенциальном ящике:

$$\psi_n(x, y, z) = \prod \psi_n(x_i) = \sqrt{\frac{8}{a_1 a_2 a_3}} \sin \pi n x / a_1 \sin \pi n y / a_2 \sin \pi n z / a_3$$

Энергетический спектр: $E = \sum E_i$

$$E_{n_i} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n_i^2}{2m a_i^2}$$

$$E = E(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right), n_i = 1, 2, 3 \dots$$

Энергия частицы в трехмерном потенциальном ящике зависит от трех квантовых чисел.

Понятие о вырожденности состояний: уровни энергии, когда одному значению энергии соответствуют несколько различных состояний называются вырожденными. Кратность вырождения – количество этих состояний. Для кубической ямы уровень не вырожден, когда $n_1 = n_2 = n_3$, вырожден 3 порядка, когда $n_1 = n_2 \neq n_3$, вырожден 6 порядка, когда $n_1 \neq n_2 \neq n_3$

Номер уровня	Квантовые числа (n_1, n_2, n_3)	$\sum_{i=1}^3 n_i^2$
1	(1, 1, 1)	3
2	(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)	6
3	(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)	9
4	(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)	11
5	(2, 2, 2)	12
6	(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)	14

Как следует из таблицы, 6-му энергетическому уровню соответствует сумма квадратов квантовых чисел, равная четырнадцатью соответственно,

$$E_6 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} 14 = 7 \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_0 a^2}$$

39. Элементарные частицы. Виды взаимодействий элементарных частиц. Классификация частиц. Лептоны и адроны. Кварковая структура адронов.

Виды взаимодействий элементарных частиц.

В настоящее время известно 4 вида взаимодействия между частицами, интенсивность которых характеризуется с помощью константы взаимодействия A , определенная относительно сильного взаимодействия. Сила взаимодействия пропорциональна A , а вероятность взаимодействия пропорциональна квадрату A .

Сильное взаимодействие: $A=1$, радиус действия 10^{-15} м. Частицы, участвующие в сильном взаимодействии, называются адронами. В сильное взаимодействие вступают не все частицы. Процессы, вызываемые сильным взаимодействием, подчиняются наибольшему числу законов сохранения, то есть, наиболее симметричны. Одно из проявлений сильного взаимодействия – ядерные силы.

Электромагнитное взаимодействие: A порядка 10^{-2} , радиус действия бесконечный. Это взаимодействие ответственно за электрические, магнитные, оптические, тепловые, механические, химические явления. Электромагнитное взаимодействие также высоко симметрично.

Слабое взаимодействие: A порядка 10^{-6} , радиус действия 10^{-18} м. В слабом взаимодействии участвуют все частицы, кроме фотона – слабое взаимодействие универсально. Слабое взаимодействие ответственно за бета-распад ядер, за все процессы взаимодействия нейтрино с веществом, а также за многие ядерные реакции.

Гравитационное взаимодействие: A порядка 10^{-38} , радиус действия бесконечный. Самое слабое взаимодействие, абсолютно все частицы участвуют в гравитационном взаимодействии, но оно проявляется лишь в макромире и мегамире.

Классификация частиц.

Таблица 7.2

Переносчики взаимодействий	Лептоны	Адроны		
		Мезоны	Барионы	
			Нуклоны	Гипероны
$\gamma, W^{\pm}, Z^0,$ глюоны	e, μ, τ $\nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$	π, K, η и резонансы	p, n	$\Lambda, \Sigma, \Xi, \Omega$ и резонансы

Элементарные частицы делят на 4 класса:

- 1) Переносчики взаимодействий
- 2) Лептоны – частицы со спином, равным $\frac{1}{2}$, лептонами называются частицы, не участвующие в сильном взаимодействии. Пример лептона – электрон, мюон, все виды нейтрино. Лептоны подчиняются закону сохранения лептонного числа: Вводится новая физическая величина: лептонное число, для лептона $L=1$, для антилептона $L=-1$, для остальных частиц $L=0$.
- 3) Адроны:
 - а) Мезоны – адроны с нулевым или целочисленным спином. Пример мезона – пи-мезон. Мезоны участвуют в сильном, электромагнитном и слабом взаимодействиях.
 - б) Барионы – адроны с полуцелым спином, пример бариона – протон. Аналогично с лептонами, вводится величина барионного заряда, и выполняется закон сохранения барионного заряда.

Кварковая структура адронов

Большое количество адронов говорит о том, что адрон является составной частицей. В 1964г. Была выдвинута гипотеза, согласно которой все адроны построены из кварков, установлено, что существуют 6 типов кварков. Спин всех кварков равен $\frac{1}{2}$, барионный заряд $\frac{1}{3}$. Остальные характеристики кварков различаются: электрический заряд, странность, шарм, красота, правдивость.

С точки зрения кварковой модели каждый барион состоит из трех кварков, а каждый мезон – из кварка, и анти-кварка.

Билет №18

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 18
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частицы для различных состояний.
2. Контактные явления в полупроводниках. P-n – переход, его вольтамперная характеристика. Выпрямляющие свойства p-n – перехода.
3. До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов была равна средней энергии свободных электронов в серебре при $T = 0$ К? Энергия Ферми серебра $E_F = 5,51$ эВ.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot F(E) dE}{\int_0^{\infty} F(E) dE}, \text{ где } F(E) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}m_0^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases} \quad \text{– функция распределения свободных электронов по энергиям}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F.$$

Для классического газа: $\langle E \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT$

$$T = \frac{2}{5} \frac{E_F}{k} = 2,55 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

10. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частицы для различных состояний.

Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Волновая функция:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - 0)\psi = \psi'' + k^2\psi = 0$$

Решение имеет вид $\psi = A\sin kx + B\cos kx$

Из граничных условий: $\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$; $\psi(a) = 0 \Rightarrow ka = \pi n, n = 1, 2, 3 \dots$

$$ka = \pi n \Rightarrow \frac{\pi^2 n^2}{a^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

Получили **Квантование энергии:**

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n \sim n \Rightarrow \frac{\Delta E_n}{E_n} \sim \frac{1}{n}$$

Дискретность энергии убывает при увеличении номера уровня.

Энергия частицы в яме не равна нулю – это согласуется с принципом Гейзенберга.

Плотность вероятности для различных энергетических уровней – найдем

коэффициент A из условия нормировки: $\int_0^a A^2 \sin^2 \pi nx/a dx = A^2 a/2 = 1$

Получили волновую функцию $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \pi nx/a$

С математической точки зрения задача о частице в одномерной потенциальной яме аналогична задаче о колебании жестко закрепленной струны: в яму должно

«укладываться» (из граничных условий) целое число полуволен де Бройля: $a = \frac{n\lambda_B}{2}$

Плотность вероятности для различных энергетических уровней:

$$|\psi_n|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \pi n x / a$$

Вероятность обнаружить частицу внутри некоторого интервала:

$$P = \int_1^2 |\psi_n|^2 dx$$



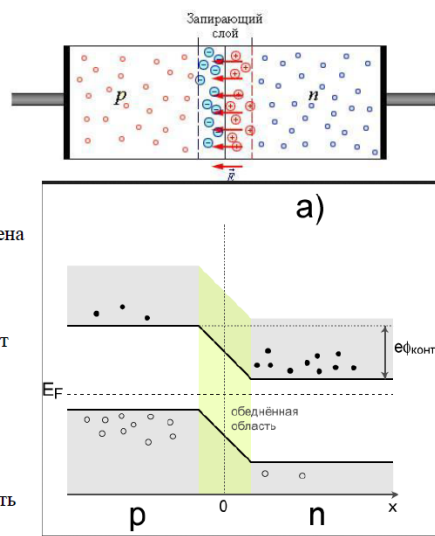
37. Контактные явления в полупроводниках. p-n переход, его вольт-амперная характеристика.

В месте контакта (имеется ввиду контакт на атомном уровне – сварка, спайка) двух полупроводников происходят контактные явления, важные для физики и техники.

При контакте 2 полупроводников (разного типа – p и n) в узкой области вблизи контакта (шириной порядка 0,1 микрон) происходит явление перераспределения носителей заряда: электроны стекаются в область p-типа, а дырки – в область n-типа.

- Энергии Ферми обоих полупроводников сравниваются.
- В области p-n перехода образуется контактная разность потенциалов, равная:

$$e\phi_k = \epsilon_n - \epsilon_p$$
- Возникает электрическое поле, напряженность которого направлена от n к p области: оно отталкивает дырки p-области и электроны n-области вглубь своих областей.
- В разных направлениях возникают два разных по направлению тока:
Ток основных носителей – направлен от p к n, основные носители заряда, преодолевая потенциальный порог, перескакивают в соседнюю область – *этот ток зависит от контактной разности потенциалов.*



Ток неосновных носителей – направлен от n к p, неосновные носители заряда из области легко скатываются вниз по потенциальному барьеру – этот ток ограничен малой их концентрацией и не зависит от контактной разности потенциалов.

В состоянии равновесия (в отсутствии внешнего поля) эти токи компенсируют друг друга.

Одностороннее свойство р-п перехода: прикладываемая разность потенциалов, мы получаем в области контакта внешнее электрическое поле. Ток основных носителей зависит от разности потенциалов как:

$$I_{\text{осн}} = I_0 \exp \left[-\frac{e(\varphi_k - U)}{kT} \right]$$

Положительная разность потенциалов: внешнее поле против контактного.

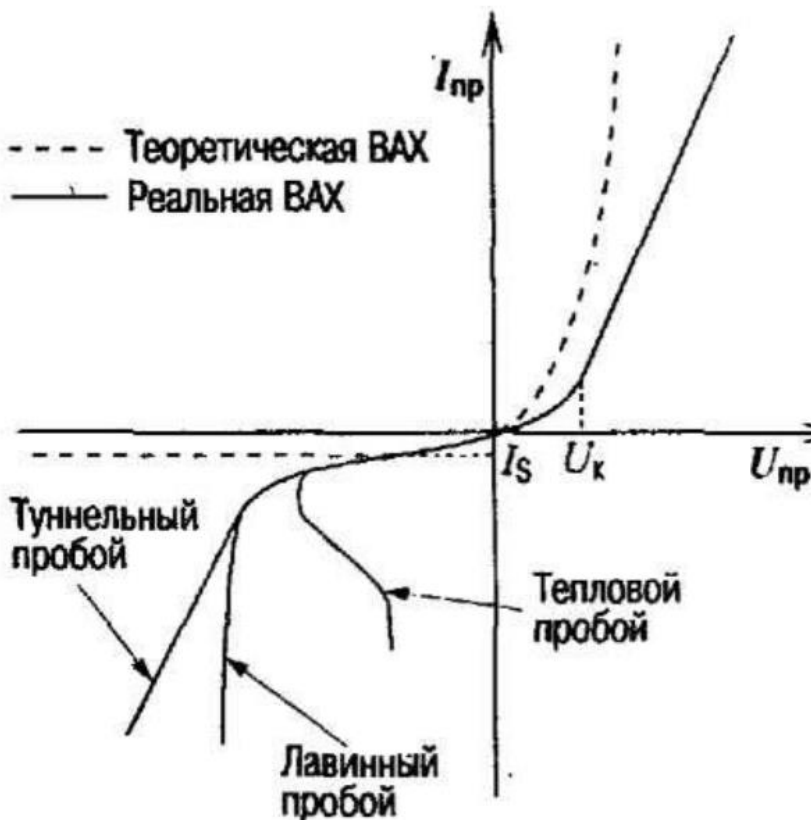
Ток неосновных носителей считаем практически постоянной величиной.

$$I_{\text{неосн}} = I_{\text{осн}}(0) = I_0 \exp \left[-\frac{e\varphi_k}{kT} \right]$$

Суммируя, получим результирующий ток:

$$I = I_{\text{осн}} - I_{\text{неосн}} = I_{\text{неосн}} \exp \left[\frac{eU}{kT} - 1 \right]$$

Отсюда видно одностороннее свойство: ток через переход **протекает** при положительной разности потенциалов, и **не идет** при отрицательной.



Билет №19

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 19
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Уравнение Шредингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.
2. Условие возможности одновременного измерения разных физических величин в квантовой механике. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.
3. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в $\eta = 2$ раза длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определите начальную и конечную температуры тела T_1 и T_2 .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в $n=2$ раза длина волны на которую приходится максимум спектральной плотности...

Дано:

$$T_2 = 2T_1$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 400 \text{ нм} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Найти:

$$T_1 - ? \quad T_2 - ?$$

Решение.

$$\begin{cases} \lambda_1 T_1 = b \\ \lambda_2 T_2 = b \end{cases} \text{ закон смещения Вина} \rightarrow \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_2 T_2} = 1 \rightarrow \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_2 2T_1} = 1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2 \rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2 \rightarrow \Delta\lambda T_2 = b \rightarrow T_2 = \frac{b}{\Delta\lambda} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-7}} = 7250 \text{ K} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{2} = \frac{7250}{2} = 3625 \text{ K}$$

Ответ.

3625K

7250K

8. Уравнение Шрёдингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.

Уравнение Шрёдингера.

Волновая функция должна являться решением уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

где m – масса частицы, U – действительная функция координат и времени, такая, что вектор $-\text{grad}U$ является классическим аналогом силы, действующей на частицу. В случае, когда U не зависит от времени, она совпадает с потенциальной энергией.

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \text{ - результат действия на функцию } \Psi \text{ оператора Лапласа.}$$

Следовательно, волновая функция должна быть непрерывно-дифференцируемой один раз по времени и два раза по пространственным координатам.

$$\text{Уравнение } i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi \text{ носит название (временного) уравнения Шрёдингера}$$

по имени немецкого физика Эрвина Шрёдингера, предложившего его в 1926 году.

Уравнение Шрёдингера является одним из постулатов (аксиом) квантовой механики и играет в атомной физике такую же фундаментальную роль, как уравнения Ньютона в классической механике и уравнения Максвелла в классической электродинамике.

Уравнение Шрёдингера является линейным, т.е. линейная комбинация решений тоже является решением. Действительно, если каждая из функций Ψ_1 и Ψ_2 является решением, то их линейная комбинация $\Psi_3 = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$ (где c_1 и c_2 – некоторые константы) тоже является решением, т.к. уравнение $i\hbar \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_3 + U \cdot \Psi_3$ в силу равенств

$$i\hbar \frac{\partial (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2) + U \cdot (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2)$$

$$\text{или } c_1 i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + c_2 i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -c_1 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + c_1 U \cdot \Psi_1 - c_2 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_2 + c_2 U \cdot \Psi_2$$

является линейной комбинацией уравнений

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + U \cdot \Psi_1 \text{ и } i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_2 + U \cdot \Psi_2.$$

Следовательно, принцип суперпозиции состояний не противоречит уравнению Шрёдингера.

Замечание. Сопряжённое уравнение Шрёдингера для волновой функции имеет вид

$$\left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi \right)^* \text{ или } -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi^* + U \cdot \Psi^*.$$

Условие нормировки.

Уравнение Шрёдингера линейное, поэтому если решением является функция Ψ , то решением является также и функция $\Psi_1 = c \cdot \Psi$, где $c = \text{const}$. В этом смысле говорят, что волновая функция определяется с точностью до константы.

Из физического смысла следует, что для всей области определения волновой функции V справедливо утверждение – вероятность того, что частица находится в этой области V , равна единице

$$P(V) = \int_V |\Psi|^2 dV = 1.$$

Следовательно, если при решении задачи о поиске волновой функции в некоторой области было найдено решение Ψ_1 , но при этом $\int_V |\Psi_1|^2 dV = |C|^2 \neq 1$, то в качестве волновой функции следует

взять функцию $\Psi_2 = \frac{1}{C} \Psi_1$, т.к. она тоже является решением и для неё выполняется

$$\int_V |\Psi_2|^2 dV = \int_V \left| \frac{\Psi_1}{C} \right|^2 dV = \frac{1}{|C|^2} \int_V |\Psi_1|^2 dV = \frac{1}{|C|^2} |C|^2 = 1.$$

Правило выбора решения Ψ , такого, что для него во всей области выполняется условие

$$P(V) = \int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

называется условием нормировки решения на единицу или просто условием нормировки.

17. Условия возможности одновременного измерения разных физических величин в квантовой механике. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.

При измерении физической величины мы получаем **собственное значение** ее оператора.

Вероятность получить определенное значение при измерении равна $P_n = |C_n|^2$

Если две различные величины можно точно измерить одновременно, то $\hat{A}\hat{B}\Psi = ab\Psi$

Это выполняется только в том случае, когда операторы этих физических величин коммутируют.

Соотношение неопределенности Гейзенберга:

Объект микромира нельзя характеризовать одновременно точной координатой и точной величиной проекции импульса на ту же ось координат. Также это справедливо для неопределенности энергии микропроцесса в процессе длительности t .

Среднеквадратичная флуктуация: $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} = \Delta x$ - назоём это неопределенностью координаты, аналогично с импульсом. Тогда:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Стоит учесть, что $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$

Для любых некоммутируемых операторов:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = c$$

$$\Delta a \Delta b \geq \frac{|c|}{2}$$

Билет №20

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 20
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, свойства его решений.
2. Элементарные частицы, их основные характеристики. Симметрия и законы сохранения в мире элементарных частиц.
3. Считая, что кинетическая энергия E нуклона (протона или нейтрона) в ядре равна 10 МэВ, оцените, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Считая что кинетическая энергия E нуклона...

25
Известно, что E_k нуклона в ядре 10 эВ. Оценить линейные размеры ядра.

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} \quad ; \quad m_0 - \text{масса протона}$$
$$\Delta p \geq \hbar \Rightarrow l \approx \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0 E_k}} \approx 1,4 \cdot 10^{-12}$$

14. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, анализ его

Гармонический осциллятор – система, совершающая гармонические колебания под действием квазиупругой силы $F = -\alpha x$.

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}x = 0, \frac{\alpha}{m} = \omega_0^2$$

Потенциальная энергия ГО $U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$

Будем называть КГО частицу, находящуюся в таком силовом поле.

Уравнение Шредингера в данном случае имеет вид:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar} \left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$$

Введем обозначения: $\eta = 2E/\hbar\omega_0$, $x_0 = \sqrt{\hbar/m_0\omega_0}$, $\zeta = x/x_0$ уравнение Шредингера примет вид:

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + (E - \eta^2)\psi = 0$$

Анализ этого выражения показывает, что волновые функции будут непрерывны и конечны лишь при значениях $\eta = 2E/\hbar\omega_0 = 2n + 1, n = 1, 2, 3 \dots$

решений.

Соответственно получаем дискретный спектр энергии КГО:

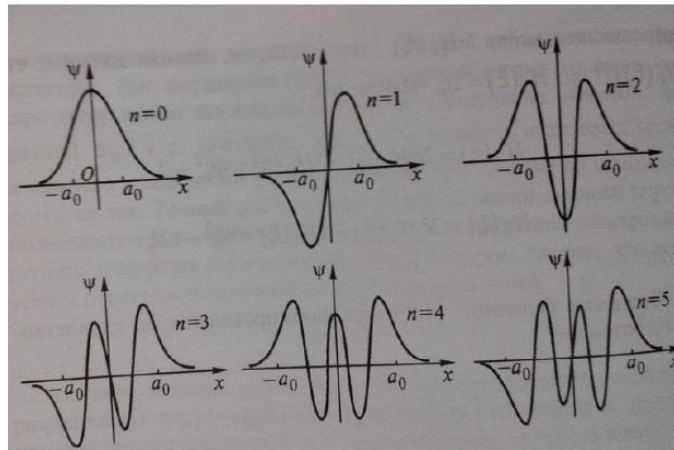
$$E = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Волновые функции КГО имеют сложный вид, состоящий из произведения нормировочной постоянной, экспоненты и полинома Чебышева-Эрмита n-го порядка.

Волновые функции для первых трех энергетических уровней КГО имеют вид:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{x^2}{2x_0^2}\right]$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}} \frac{2x}{x_0} \exp\left[-\frac{x^2}{2x_0^2}\right] \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{8x_0\sqrt{\pi}}} \left(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2 \right) \exp\left[-\frac{x^2}{2x_0^2}\right]$$



38. Элементарные частицы, их основные характеристики. Симметрия и законы сохранения в мире элементарных частиц.

Системы можно систематизировать по характерным размерам. Рассмотрим нижние уровни этой системы:

- атомы – порядка ангстрема
- ядра – порядка 1..10 фемтометра
- адроны – их представителями являются нуклоны, размеры порядка 1 фемтометра
- кварки, из которых состоят адроны, лептоны, переносчики взаимодействий (фотон, мезон) – «истинно элементарные частицы»

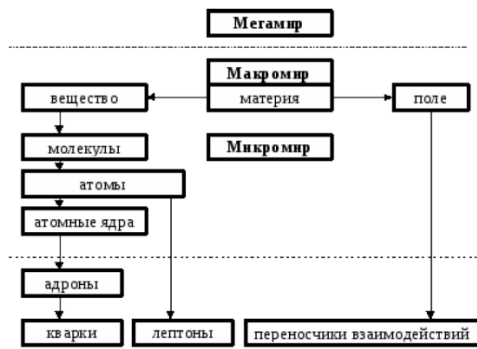


Рис.2. Структурные уровни строения материи в Микромире

По традиции элементарными частицами называются все субъядерные микрообъекты, хотя изначально так называли частицы, которые считали неделимыми. Также случилось и с названием атома (в переводе с греческого – «неделимый»)

На данный момент известно около 500 элементарных частиц.

У большинства элементарных частиц, обладающих массой, она сравнима с массой протона. Одна из самых легких частиц, электрон, в 1836 раз легче протона, одна из самых тяжелых частиц, Z^0 -бозон, в 100 раз больше.

Элементарные частицы отличаются: средним временем жизни, спином, электрическим зарядом, магнитным моментом, лептонным и барионным зарядом.

Практически каждой частице соответствует античастица, обозначаемая тильдой (протон p антипротон \bar{p}). Частица и античастица имеют одинаковую массу, спин и время жизни, но их остальные характеристики равны по модулю, и отличаются знаком.

Существуют частицы, у которых все заряды – электрический, лептонный и барионный, равны нулю – такие частицы тождественны своим античастицам, и называются истинно нейтральными, к примеру – фотон, пи-ноль мезон.

При столкновении частицы и античастицы они аннигилируют, выпуская два фотона гамма-излучения.

Билет №21

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 21
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Дискретный характер испускания и поглощения излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения.
2. Эффект Холла в полупроводниках, его практическое применение.
3. Красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия при очень низких температурах $\lambda_{кр} = 1,7 \mu\text{м}$. Найдите температурный коэффициент сопротивления $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$ этого полупроводника при комнатной температуре.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия при очень низких температурах...

Фотоэлектрический порог определяет запрещенную зону $\Delta\epsilon$

$$\Delta\epsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\epsilon h}}$$

С другой стороны, температурный коэффициент сопротивления определяется (ρ - удельное сопротивление)

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{d\rho}{dT} = \frac{d}{dT} \ln \rho = - \frac{d}{dT} \ln \sigma$$

где σ - проводимость. Но

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta\epsilon}{2kT}$$

$$\text{Тогда } \alpha = - \frac{\Delta\epsilon}{2kT^2} = - \frac{\pi\hbar c}{kT^2 \lambda_{\epsilon h}} = -0,047\text{K}^{-1}$$

2. Дискретный характер испускания и поглощения излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения.

Спонтанное излучение или спонтанное испускание — процесс самопроизвольного испускания электромагнитного излучения квантовыми системами (атомами, молекулами) при их переходе из возбуждённого состояния в стабильное.

Спонтанное испускание фотона: Частота спонтанного электромагнитного излучения ν_{ik} определяется разностью энергий i -ого и k -ого уровней системы: $E_i - E_k = h\nu_{ik}$

Если населённость уровня с энергией E_i равна N_i , то мощность спонтанного

излучения равна:

$$I = N_i \cdot A_{ik} \cdot h\nu_{ik}$$

Полная вероятность спонтанного излучения: $A_i = \sum_k A_{ik}$

Вынужденное излучение - индуцированное излучение, испускание электромагнитного излучения квантовыми системами под действием падающего на них излучения. Фотоны, испускаемые при в. и., совпадают по частоте, направлению распространения и поляризации с фотонами, вынуждающими их испускание.

Закон излучения Планка.

Спектральная энергетическая светимость АЧТ равна $r^{AЧТ}(\omega, T) = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}$.

Следствия из формулы излучения Планка.

1) Вид функции в законе Планка совпадает с формулой Вина $r^{AЧТ}(\omega, T) = \omega^3 \cdot F\left(\frac{\omega}{T}\right)$.

2) Найдем длину волны, соответствующую максимуму спектральной светимости АЧТ.

Решение этого уравнения $x_0 \approx 4,965114232$. Откуда для длины волны λ_{MAX} , соответствующей максимуму спектральной испускательной способности получаем выражение

$$\lambda_{MAX} = \frac{\hbar}{kT} \frac{2\pi c}{x_0} \approx \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T} \text{ м.}$$

Следовательно, вычисленное значение постоянной Вина $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ практически совпадает с экспериментальным значением.

3) Найдем интегральную светимость

$$R_T = \int_0^{+\infty} r^{A_{\text{ЧТ}}}_{\omega, T} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \frac{k^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} T^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx$$

Численный расчёт даёт значение $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx \approx 6,5$, откуда $R_T \approx 5,65 \cdot 10^{-8} \cdot T^4$.

Т.е. вычисленное значение постоянной Стефана-Больцмана практически совпадает с экспериментальным.

4) Если в законе излучения Планка $r^{A_{\text{ЧТ}}}_{\omega, T} = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$ устремить $\hbar\omega \rightarrow +0$, то с учетом

разложения $\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$, получим выражение $r^{A_{\text{ЧТ}}}_{\omega, T} \approx \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega^3}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT$,

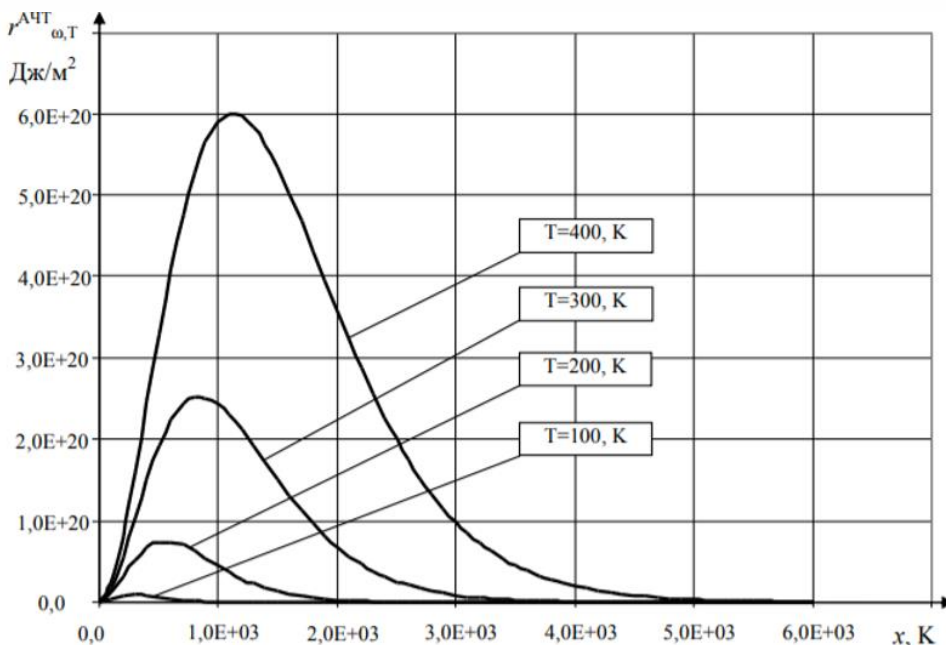
совпадающее с формулой Рэля-Джинса. Т.е. формула Рэля-Джинса описывает случай, когда энергия кванта излучения много меньше энергии теплового движения $\hbar\omega \ll kT$.

5) Для примера представим графики $r^{A_{\text{ЧТ}}}_{\omega, T}$ для некоторых температур. Для этого введём переменную $x = \frac{\hbar\omega}{k}$ и перепишем закон излучения Планка в виде

$$r^{A_{\text{ЧТ}}}_{\omega, T} = \frac{(k)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{k}\right)^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} = \frac{k^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} = \frac{(1,38 \cdot 10^{-23})^3}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{-16} \cdot 1,055^2 \cdot 10^{-68}} \cdot \frac{x^3}{\exp\left(\frac{x}{T}\right) - 1}$$

Тогда $r^{A_{\text{ЧТ}}}_{\omega, T} \approx 6,6 \cdot 10^{12} \frac{x^3}{\exp\left(\frac{x}{T}\right) - 1}$. Графики такой зависимости для различных T представлены

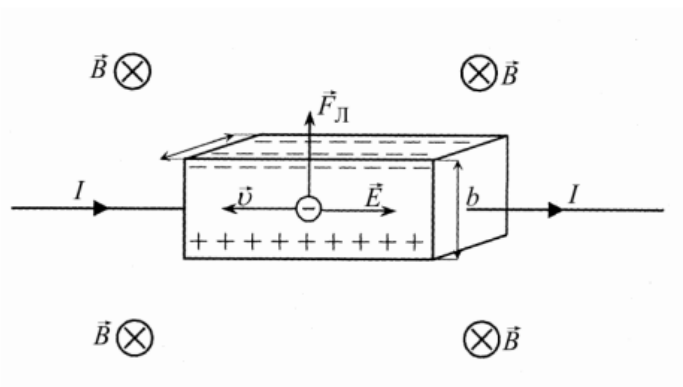
выше.



36. Эффект Холла в полупроводниках, его практическое применение.

Эффект Холла заключается в возникновении поперечного электрического поля в полупроводнике с током, помещенном во внешнее магнитное поле.

Этот эффект возникает вследствие перераспределения заряда по проводнику из-за действующий на носитель тока силы Лоренца. В результате перераспределения заряда возникает поперечное электрическое поле.



Напряженность этого поля можно найти из условия равновесия: $e\bar{E}_H = \bar{F}_L$

Общая формула для Холловской напряженности: $\bar{E}_H = R_H[\bar{B}, \bar{j}]$, R_H – постоянная Холла.

- Проводник p-типа: $\bar{F}_L = e[\bar{v}, \bar{B}] = e\left[\frac{\bar{j}}{ep}, \bar{B}\right]$

Отсюда: $\bar{E}_H = \frac{1}{ep}[\bar{B}, \bar{j}] = R_H[\bar{B}, \bar{j}]$

Соответственно для полупроводников p-типа $R_H = \frac{1}{ep}$

Аналогично можно вывести:

- для полупроводников n-типа $R_H = -\frac{1}{en}$
- для смешанных полупроводников:

$$R_H = \frac{-n\mu_n^2 + p\mu_p^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}$$

ЭДС Холла: из $\bar{E}_H = R_H[\bar{B}, \bar{j}] \Rightarrow E_H = R_H B I / ha$

h, a – высота и ширина поперечного сечения проводника,

ЭДС холла легко найти как: $U_H = hE_H = R_H B I / a$

Такая простая зависимость сделала Холловские датчики лучшими приборами для измерения напряженности магнитного поля. Также их используют в тахометрах, и во многих других приборах.

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 22
 по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, свойства его решений.
2. Фотоэффект, его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.
3. Проводимость беспримесного полупроводника при освещении равна σ_1 , спустя промежуток времени t после выключения света равна σ_2 , а через очень большой промежуток времени после выключения света – σ_3 . Найдите среднее время жизни электронов проводимости и дырок τ .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
 (число, месяц, год)

Проводимость беспримесного полупроводника при освещении равна...

Запишем проводимость образца как $\sigma = \sigma_i + \sigma_\gamma$ где σ_i - собственная проводимость и σ_γ - фотопроводимость.

Время t после того, как источник света выключен, из-за рекомбинации электрона и дырок в образце имеем

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_{\gamma_0} e^{-t/T}$$

где T - среднее время жизни электронов и дырок.

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_1 + \sigma_{\gamma_0} \Rightarrow \sigma_{\gamma_0} = \sigma_2 - \sigma_1 \\ \sigma_3 &= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) e^{-t/T} \\ e^{-t/T} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \\ \ln e^{-t/T} &= \ln \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1} \\ \Rightarrow T &= \frac{t}{\ln \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1} \right)} \end{aligned}$$

8. Уравнение Шрёдингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.

Уравнение Шрёдингера.

Волновая функция должна являться решением уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$$

где m – масса частицы, U – действительная функция координат и времени, такая, что вектор $-\text{grad}U$ является классическим аналогом силы, действующей на частицу. В случае, когда U не зависит от времени, она совпадает с потенциальной энергией.

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \text{результат действия на функцию } \Psi \text{ оператора Лапласа.}$$

Следовательно, волновая функция должна быть непрерывно-дифференцируемой один раз по времени и два раза по пространственным координатам.

$$\text{Уравнение } i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi \text{ носит название (временного) уравнения Шрёдингера}$$

по имени немецкого физика Эрвина Шрёдингера, предложившего его в 1926 году.

Уравнение Шрёдингера является одним из постулатов (аксиом) квантовой механики и играет в атомной физике такую же фундаментальную роль, как уравнения Ньютона в классической механике и уравнения Максвелла в классической электродинамике.

Уравнение Шрёдингера является линейным, т.е. линейная комбинация решений тоже является решением. Действительно, если каждая из функций Ψ_1 и Ψ_2 является решением, то их линейная комбинация $\Psi_3 = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$ (где c_1 и c_2 – некоторые константы) тоже является решением,

т.к. уравнение $i\hbar \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_3 + U \cdot \Psi_3$ в силу равенств

$$i\hbar \frac{\partial (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2) + U \cdot (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2)$$

$$\text{или } c_1 i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + c_2 i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -c_1 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + c_1 U \cdot \Psi_1 - c_2 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_2 + c_2 U \cdot \Psi_2$$

является линейной комбинацией уравнений

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + U \cdot \Psi_1 \text{ и } i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_2 + U \cdot \Psi_2.$$

Следовательно, *принцип суперпозиции* *состояний* не противоречит уравнению Шрёдингера.

Замечание. Сопряжённое уравнение Шрёдингера для волновой функции имеет вид

$$\left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi \right)^* \text{ или } -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi^* + U \cdot \Psi^*.$$

Условие нормировки.

Уравнение Шрёдингера линейное, поэтому если решением является функция Ψ , то решением является также и функция $\Psi_1 = c \cdot \Psi$, где $c = \text{const}$. В этом смысле говорят, что волновая функция определяется с точностью до константы.

Из физического смысла следует, что для всей области определения волновой функции V справедливо утверждение – вероятность того, что частица находится в этой области V , равна единице

$$P(V) = \int_V |\Psi|^2 dV = 1.$$

Следовательно, если при решении задачи о поиске волновой функции в некоторой области было найдено решение Ψ_1 , но при этом $\int_V |\Psi_1|^2 dV = |C|^2 \neq 1$, то в качестве волновой функции следует

взять функцию $\Psi_2 = \frac{1}{C} \Psi_1$, т.к. она тоже является решением и для неё выполняется

$$\int_V |\Psi_2|^2 dV = \int_V \left| \frac{\Psi_1}{C} \right|^2 dV = \frac{1}{|C|^2} \int_V |\Psi_1|^2 dV = \frac{1}{|C|^2} |C|^2 = 1.$$

Правило выбора решения Ψ , такого, что для него во всей области выполняется условие

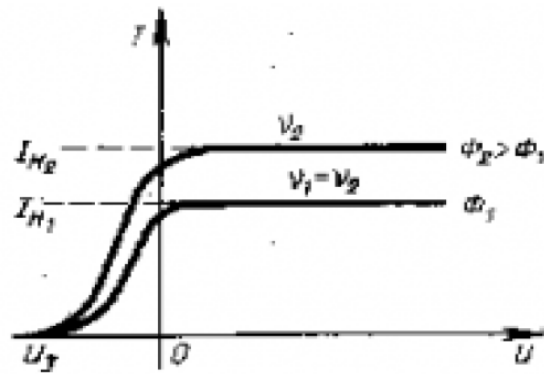
$$P(V) = \int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

называется *условием нормировки решения на единицу* или просто *условием нормировки*.

3. Фотоэффект, его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.

Фотоэффектом называются различные процессы поглощения фотона квантовой системой. Фотоэффект может быть внешним (эмиссия электронов с поверхности металла), внутренним (образование в полупроводнике пары электрон-дырка, что повышает концентрацию носителей тока, следовательно, общую электропроводность, при поглощении фотона), также к фотоэффекту относится фотоионизация – ионизация атома при поглощении фотона.

На установке для исследования внешнего фотоэффекта током насыщения называют максимальный ток, достигаемый, когда все эмиссированные электроны попадают с катода на анод, запирающим напряжением – напряжением, при котором пропадает фотоэффект.



Законы фотоэффекта:

- Ток насыщения пропорционален потоку падающего излучения.
- $T_{max} = eU_{зап}$ не зависит от интенсивности излучения, но зависит от материала фотокатода, и линейно зависит от частоты падающего света (линейно возрастает с увеличением частоты).
- Для каждого материала фотокатода существует красная граница фотоэффекта – такая длина волны, что при увеличении длины волны падающего света больше красной границы фотоэффект прекращается.

Работа выхода: с точки зрения квантовой физики электроны в металле находятся в потенциальной яме. Энергия электрона внутри ямы принимает дискретные значения, наибольшее из которых называется энергией Ферми. Работой выхода из металла называется энергия, которую нужно придать электрону Ферми для вылета из потенциальной ямы металла (при условии, что электрон не теряет энергию на взаимодействие с другими электронами и дефектами кристаллической решетки)

Уравнение Эйнштейна:

$$T_{max} = h\nu - A_{\text{вых}}$$

Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения: ГИ является как потоком единичных неделимых частиц, так и волнами, способными к дифракции, интерференции и поляризации.

Билет №23

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 23
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Дискретный характер испускания и поглощения излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения.
2. Эффект Движение микрочастицы в области одномерного потенциального порога. Случай “высокого” и “низкого” порога.
3. Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям, найдите отношение средней кинетической энергии свободных электронов в металле при $T = 0$ к их максимальной энергии.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям...

$$E_{\max} = E_F^{(0)}; \langle E_K \rangle = \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} E f(E) g(E) dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} f(E) g(E) dE} = \left| \frac{g(e) \cong \sqrt{E}}{f(E) \cong 1} \right| = \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} E^{1/2} dE} = \frac{2/5 E_F^{5/2}}{2/3 E_F^{3/2}} = \frac{3}{5} E_F^{(0)} \Rightarrow$$

$$\frac{\langle E_K \rangle}{E_{\max}} = \frac{\frac{3}{5} E_F^{(0)}}{E_F^{(0)}} = \frac{3}{5}$$

2. Дискретный характер испускания и поглощения излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения.

Спонтанное излучение или спонтанное испускание — процесс самопроизвольного испускания электромагнитного излучения квантовыми системами (атомами, молекулами) при их переходе из возбуждённого состояния в стабильное.

Спонтанное испускание фотона: Частота спонтанного электромагнитного излучения ν_{ik} определяется разностью энергий i -ого и k -ого уровней системы: $E_i - E_k = h\nu_{ik}$

Если населённость уровня с энергией E_i равна N_i , то мощность спонтанного

излучения равна:

$$I = N_i \cdot A_{ik} \cdot h\nu_{ik}$$

Полная вероятность спонтанного излучения: $A_i = \sum_k A_{ik}$

Вынужденное излучение - индуцированное излучение, испускание электромагнитного излучения квантовыми системами под действием падающего на них излучения. Фотоны, испускаемые при в. и., совпадают по частоте, направлению распространения и поляризации с фотонами, вынуждающими их испускание.

Закон излучения Планка.

$$\text{Спектральная энергетическая светимость АЧТ равна } r^{AЧТ}_{\omega,T} = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

Следствия из формулы излучения Планка.

1) Вид функции в законе Планка совпадает с формулой Вина $r^{AЧТ}(\omega, T) = \omega^3 \cdot F\left(\frac{\omega}{T}\right)$.

2) Найдем длину волны, соответствующую максимуму спектральной светимости АЧТ.

Решение этого уравнения $x_0 \approx 4,965114232$. Откуда для длины волны λ_{MAX} , соответствующей максимуму спектральной испускательной способности получаем выражение

$$\lambda_{MAX} = \frac{\hbar}{kT} \frac{2\pi c}{x_0} \approx \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T} \text{ м.}$$

Следовательно, вычисленное значение постоянной Вина $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К практически совпадает с экспериментальным значением.

3) Найдем интегральную светимость

$$R_T = \int_0^{\infty} r^{AЧТ}_{\omega,T} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right)^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} d\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) = \frac{k^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx$$

Численный расчёт даёт значение $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx \approx 6,5$, откуда $R_T \approx 5,65 \cdot 10^{-8} \cdot T^4$.

Т.е. вычисленное значение постоянной Стефана-Больцмана практически совпадает с экспериментальным.

4) Если в законе излучения Планка $r^{AЧТ}_{\omega,T} = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}$ устремить $\hbar \omega \rightarrow +0$, то с учетом

разложения $\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar \omega}{kT}$, получим выражение $r^{AЧТ}_{\omega,T} \approx \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega^3}{1 + \frac{\hbar \omega}{kT} - 1} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT$,

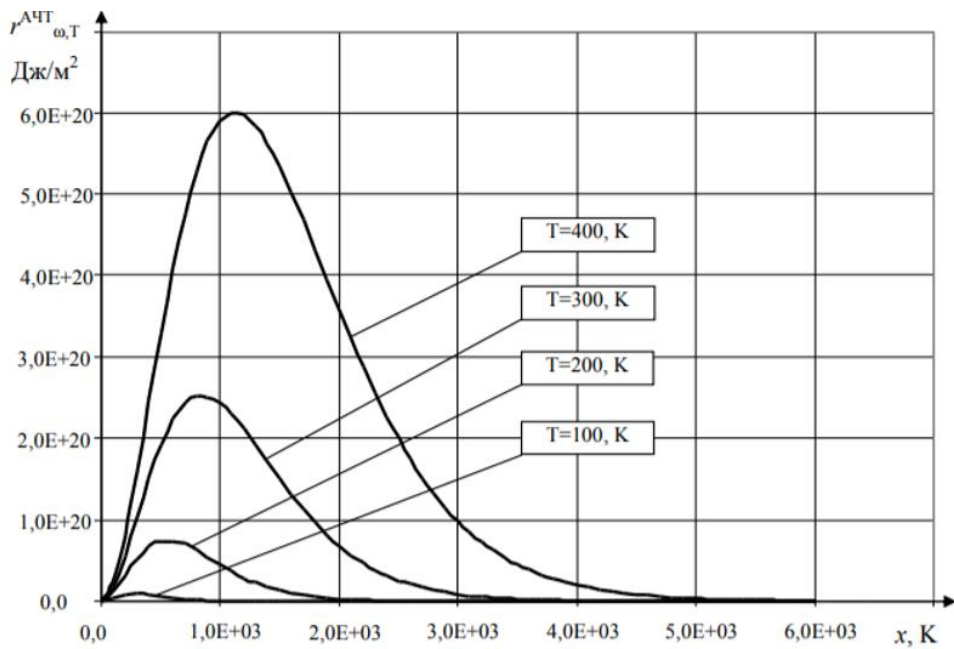
совпадающее с формулой Рэлея-Джинса. Т.е. формула Рэлея-Джинса описывает случай, когда энергия кванта излучения много меньше энергии теплового движения $\hbar \omega \ll kT$.

5) Для примера представим графики $r^{AЧТ}_{\omega,T}$ для некоторых температур. Для этого введём переменную $x = \frac{\hbar \omega}{k}$ и перепишем закон излучения Планка в виде

$$r^{AЧТ}_{\omega,T} = \frac{(k)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{\left(\frac{\hbar \omega}{k}\right)^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1} = \frac{k^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} = \frac{(1,38 \cdot 10^{-23})^3}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{-16} \cdot 1,055^2 \cdot 10^{-68}} \cdot \frac{x^3}{\exp\left(\frac{x}{T}\right) - 1}$$

Тогда $r^{AЧТ}_{\omega,T} \approx 6,6 \cdot 10^{12} \frac{x^3}{\exp\left(\frac{x}{T}\right) - 1}$. Графики такой зависимости для различных T представлены

выше.



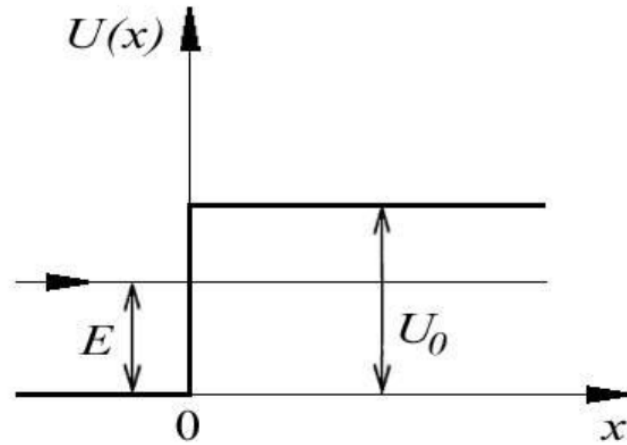
12. Движение микрочастицы в области одномерного потенциального порога. Случай “высокого” и “низкого” порога.

Порог задается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & x > 0 \end{cases}$$

1 – область $U = 0$

2 – область $U = U_0$



Уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1'' + k_1^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2'' - k_2^2\psi_2 = 0 \end{cases}$$

а) **Высокий порог: решения ищем в виде**

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \exp[ik_1x] + B_1 \exp[-ik_1x] \\ \psi_2 = A_2 \exp[k_2x] + B_2 \exp[-k_2x] \end{cases}$$

Применим граничные условия, условия регулярности, условия нормированности:

- 1) A_1 положим 1 ; $|\psi_2| \rightarrow 0 \Rightarrow A_2 = 0$;
- 2) непрерывность: $\psi_1(0) = \psi_2(0), \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow$

$$B_1 = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} ; B_2 = B_1 + 1 = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2}$$

Получили:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \exp[ik_1x] + \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} \exp[-ik_1x], & x < 0 \\ \psi_2 &= \frac{2k_1}{k_1 + ik_2} \exp[-k_2x], & x > 0 \end{aligned}$$

Первая волновая функция – сумма падающей и отраженной волны, вторая волновая функция – волна, прошедшая вглубь барьера.

Система уравнений имеет решения при любых значениях энергии – спектр энергии частицы непрерывен. Полученная функция ψ_2 также говорит о том, что существует (быстро убывающая при движении вдоль x) вероятность обнаружить частицу за порогом.

Коэффициенты отражения и прохождения:

$$\bar{j} = i\hbar/2m (\Psi grad\bar{\Psi} - \bar{\Psi} grad\Psi)$$

Определим $|\bar{j}_{пад}|, |\bar{j}_{отр}|, |\bar{j}_{прош}|$

$$|\bar{j}_{пад}| = \frac{\hbar k_1}{m}; |\bar{j}_{отр}| = \frac{\hbar k_1}{m} \left| \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} \right|^2; |\bar{j}_{прош}| = 0$$

Отсюда:

$$\text{Коэффициент отражения } R = \frac{|\bar{j}_{отр}|}{|\bar{j}_{пад}|} = 1$$

$$\text{Коэффициент прохождения } D = \frac{|\bar{j}_{прош}|}{|\bar{j}_{пад}|} = 0$$

б) Низкий порог

Аналогично:

$$\begin{cases} \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E)\psi_1 = \psi_1'' + k_1^2\psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = \psi_2'' + k_2^2\psi_2 = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \exp[ik_1x] + B_1 \exp[-ik_1x] \\ \psi_2 = A_2 \exp[ik_2x] + B_2 \exp[-ik_2x] \end{cases}$$

Применим граничные условия, условия регулярности, условия нормированности:

- 1) A_1 положим 1 ; во второй области нет отраженной волны $\Rightarrow B_2 = 0$;
- 2) непрерывность: $\psi_1(0) = \psi_2(0), \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow$

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}; A_2 = B_1 + 1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Получили:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \exp[ik_1x] + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \exp[-ik_1x], & x < 0 \\ \psi_2 &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \exp[ik_2x], & x > 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты отражения и прохождения:

$$\bar{j} = i\hbar/2m (\Psi grad\bar{\Psi} - \bar{\Psi} grad\Psi)$$

Определим $|\bar{j}_{пад}|, |\bar{j}_{отр}|, |\bar{j}_{прош}|$

$$|\bar{j}_{пад}| = \frac{\hbar k_1}{m}; |\bar{j}_{отр}| = \frac{\hbar k_1}{m} \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2; |\bar{j}_{прош}| = \frac{\hbar k_2}{m} \left| \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right|^2$$

Отсюда:

$$\text{Коэффициент отражения } R = \frac{|\bar{j}_{отр}|}{|\bar{j}_{пад}|} = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{U}{E}}} \right)^2 \neq 0$$

В квантовой физике есть вероятность отражения частицы от низкого потенциального барьера! При этом вероятность отражения не зависит от направления движения частицы.

$$\text{Коэффициент прохождения } D = \frac{|\bar{j}_{прош}|}{|\bar{j}_{пад}|} = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4\sqrt{1 - \frac{U}{E}}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{U}{E}}\right)^2}$$

Энергетический спектр частицы непрерывен вне зависимости от высоты порога!

Билет №24

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 24

по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.
2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений.
3. Рассчитайте активность одного грамма ${}^{226}_{88}\text{Ra}$, если период полураспада этого изотопа $T_{1/2} = 1620$ лет.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Рассчитайте активность одного грамма ${}^{226}/88\text{Ra}$...

2. Рассчитать активность 1 гр ${}^{226}\text{Ra}$, если $T_{1/2} = 1620$ лет ($M = 226 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$)

$$A = N_0 \lambda e^{-\lambda t} \text{ - формула активности}$$
$$N_0 = \nu N_a = \frac{m}{M} N_a ; \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} ;$$
$$A(0) = N_0 \lambda = \frac{m}{M} N_a \frac{\ln 2}{T_{1/2}} ;$$

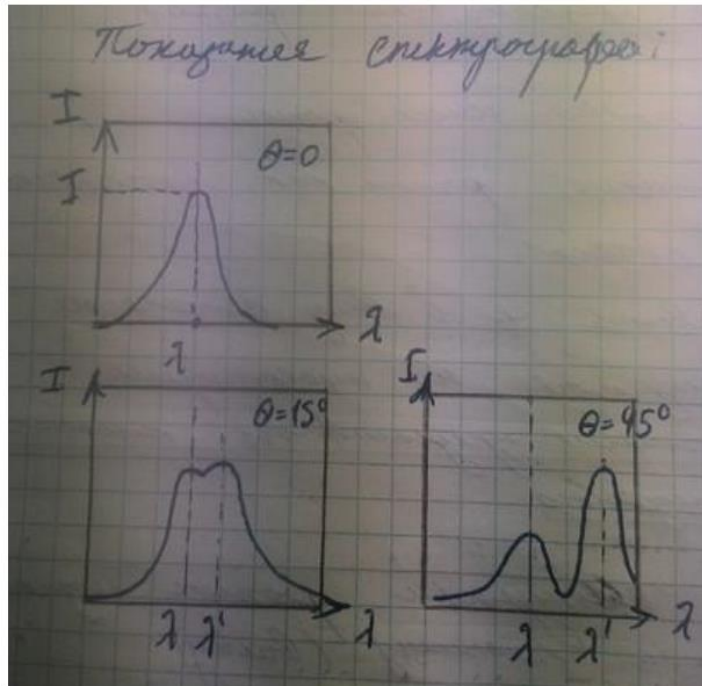
4. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.

Эффект Комптона объясняется упругим рассеиванием фотонов на свободных электронах вещества.

Часть импульса фотон передает электрону, от чего уменьшается энергия фотона и увеличивается его длина волны.

Определим зависимость

$\lambda' - \lambda = f(\theta)$, записав уравнения законов сохранения энергии и импульса для системы из электрона и фотона, а также релятивистского инварианта для электрона (k – волновой вектор электрона, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)



$$\begin{cases} \hbar\omega + mc^2 = E_{\text{эл}} + \hbar\omega' \\ \hbar\vec{k}_\phi = \hbar\vec{k}'_\phi + \vec{P}_e \\ E_{\text{эл}}^2 - P_e^2 c^2 = m^2 c^4 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos\theta) = \lambda_c (1 - \cos\theta)$

$\lambda_c = 2,43 * 10^{-12} \text{ м}$ - длина волны Комптона для электрона.

Мы не наблюдаем комптоновского рассеяния на ядрах, поскольку из-за их большой массы величина комптоновской длины волны для ядер слишком мала. Эффект комптоновского рассеивания на электронах мы наблюдаем только в рентгеновском излучении, потому что длина рентгеновского излучения сопоставима с длиной волны Комптона.

. ! Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений. (проверить)

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

↑
Обобщенная
координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — x, y, z) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi dt$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dt .

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

↑
Элемент объема

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

↑ Собственная функция оператора H

↑ Собственное значение

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ , имеющей квантово-механический оператор λ , в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 , то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2 , либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2 .

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = \underline{\underline{-}} \Psi(q_1, \underline{q_3}, \underline{q_2}, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Операторы квантовой механики.

1. Операторы координаты определяются действием на функции

$$\hat{x}(\Psi) = x \cdot \Psi, \quad \hat{y}(\Psi) = y \cdot \Psi, \quad \hat{z}(\Psi) = z \cdot \Psi.$$

Все три оператора перестановочны между собой. Например,

коммутатор $[\hat{x}, \hat{y}](\Psi) = \hat{x}(\hat{y}(\Psi)) - \hat{y}(\hat{x}(\Psi)) = x \cdot y \cdot \Psi - y \cdot x \cdot \Psi = 0$, т.е. $[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{0}$.

Следовательно, координаты могут быть одновременно измерены с любой точностью.

Оператор координаты является самосопряженным. Проверим это, например, для \hat{x} :

$$\begin{aligned} (\hat{x}(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_V \Psi_2^* \cdot \hat{x}(\Psi_1) \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x \cdot \Psi_1 \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = \\ &= \int_V (x \Psi_2)^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = (\Psi_1, \hat{x}(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные числа этого оператора – это значения координат. Очевидно, что эти значения - действительные числа. Оператор координаты обладает непрерывным спектром, поэтому среднее значение, например, координаты x определяется равенством

$$\langle x \rangle = \int_V \Psi^* \hat{x}(\Psi) dV = \int_V \Psi^* x \Psi dV = \int_V x |\Psi|^2 dV.$$

Оператор радиус-вектора определяется как векторная функция

$$\vec{R}(\Psi) = \vec{e}_x \hat{x}(\Psi) + \vec{e}_y \hat{y}(\Psi) + \vec{e}_z \hat{z}(\Psi) = x \cdot \Psi \cdot \vec{e}_x + y \cdot \Psi \cdot \vec{e}_y + z \cdot \Psi \cdot \vec{e}_z$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

2. Оператор проекции импульса на ось декартовой системы координат

$$\hat{p}_x(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \hat{p}_y(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \hat{p}_z(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Проверим, что этот оператор самосопряженный для одномерного случая. Т.к. частица находится в ограниченной области, то на границе области волновая функция частицы обязательно обращается в ноль. Если область задана интервалом $a < x < b$, то $\Psi(a) = 0$ и $\Psi(b) = 0$

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_a^b \Psi_2^* \cdot \hat{p}_x(\Psi_1) \cdot dx = \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \frac{\hbar}{i} \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \left\{ \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx - \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx \right\} = \int_a^b \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \right) \cdot \Psi_1 \cdot dx = \int_a^b \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^* \cdot \Psi_1 \cdot dx = (\Psi_1, \hat{p}_x(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные значения оператора проекции импульса – это значения проекции импульса. Найдем, например, собственные функции оператора проекции импульса на ось X. Для этого надо разрешить операторное уравнение $\hat{p}_x(\Psi) = p_x \cdot \Psi$. С учётом определения оператора получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \cdot \Psi,$$

которое решаем методом разделения переменных $\frac{d\Psi}{\Psi} = i \frac{p_x}{\hbar} \cdot dx$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{p_x}{\hbar} x}$, где C не зависит от x .

В квантовой механике вводят оператор *полной энергии* \hat{E} , такой, что изменение волновой функции во времени (или как говорят *эволюция*) полностью определяется этим оператором:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{E}(\Psi).$$

Собственные значения оператора полной энергии – это значения энергии системы:

$\hat{E}(\Psi) = E \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций для оператора полной энергии.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi, \quad \frac{d\Psi}{\Psi} = -i \frac{E}{\hbar} \cdot dt, \quad \Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

где ψ - функция, не зависящая от времени.

Если энергия системы не меняется (стационарное состояние), то волновая функция имеет вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.$$

3. Оператор момента импульса.

В классической физике вектор момента импульса относительно некоторой точки определяется

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yp_z - zp_y) + \vec{e}_y (zp_x - xp_z) + \vec{e}_z (xp_y - yp_x),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

Тогда вектор-оператор момента импульса должен принять вид

$$\hat{L} = \vec{R} \times \hat{p} = \vec{e}_x (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) + \vec{e}_y (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) + \vec{e}_z (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x).$$

Операторы проекций моментов импульса на оси

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x.$$

Собственные значения оператора проекции импульса на ось – это величины проекции момента импульса $\hat{L}_z(\Psi) = L_z \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций, отвечающих этим собственным значениям: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = L_z \cdot \Psi$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \varphi}$ (где C – функция, не зависящая от φ). Учитывая, что при повороте вокруг оси z на угол $2\pi m$ (m – целое число) вид функции не меняется, получаем равенство $\frac{L_z}{\hbar} = m$, т.е. проекция момента импульса на ось z может принимать значения, кратные приведенной постоянной Планка \hbar : $L_z = m \cdot \hbar$. В этом смысле постоянную Планка иногда называют *квантом действия*.

4. Оператор потенциальной энергии

В классической механике потенциальная энергия зависит от взаимного положения тел.

Выражение для потенциальной энергии квазиупругой силы (вдоль оси X) $U = \frac{kx^2}{2}$ в операторном виде будет выглядеть так же $\hat{U}(\Psi) = \frac{k\hat{x}^2}{2}(\Psi) = \frac{k}{2} \hat{x}(\hat{x}(\Psi)) = \frac{k}{2} x \cdot x \cdot \Psi = \frac{kx^2}{2} \cdot \Psi$.

Выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{R}$ перейдет в оператор такого же вида $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi)$, где оператор $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right)$ является обратным к оператору $\hat{R}(\Psi) = R \cdot \Psi$. Очевидно, что $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi) = \frac{1}{R} \cdot \Psi$, поэтому $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \Psi$

5. Оператор кинетической энергии.

В классической механике кинетическая энергия тела определяется выражением

$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Поэтому оператор кинетической энергии имеет вид

$$\hat{E}_K(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) = \frac{1}{2m} \hat{p}(\hat{p}(\Psi)) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar}{i} \bar{\nabla} \left(\frac{\hbar}{i} \bar{\nabla}(\Psi) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi.$$

Найдём собственные значения оператора кинетической энергии для одномерного случая

$\hat{E}_K(\Psi) = E_K \cdot \Psi$ или $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E_K \cdot \Psi$. Получаем уравнение, с которым уже встречались в задаче об одномерной яме с непроницаемыми стенками

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_K \cdot \Psi = 0.$$

Откуда $\Psi = C \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_K}}{\hbar} x + \alpha\right)$.

6. Оператор Гамильтона.

В классической механике механическая энергия тела, записанная как функция импульса и координат, называется *функцией Гамильтона* $H = E_K + U = \frac{p^2}{2m} + U$.

В квантовой механике соответствующий оператор называется оператором Гамильтона (или *гамильтонианом*)

$$\hat{H}(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) + \hat{U}(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi.$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической величине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

А) **Линейными**

В) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \Psi_1 \hat{F} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{F} \Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Собственные значения, собственные функции операторов:

$$\hat{F}\Psi = a\Psi$$

Спектр собственных значений называется дискретным, если его собственные значения можно пронумеровать, если нельзя – непрерывным. Если одному собственному значению принадлежит несколько собственных функций, собственное значение называется вырожденным.

Собственные функции ортонормированы $\int_V \Psi_n \overline{\Psi_m} dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

Среднее значение

$$\langle f \rangle = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \overline{\Psi} \hat{F} \Psi dV$$

Основные операторы физических величин:

- 1) оператор координат $\hat{x} = x$, непрерывный спектр собственных значений
- 2) радиус-вектор $\hat{r} = i\hat{x} + j\hat{y} + k\hat{z}$, непрерывный спектр собственных значений
- 3) оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar \text{grad}$, непрерывный спектр собственных значений
- 4) квадрат импульса $\hat{p}^2 = (\hat{p})^2 = -\hbar^2 \Delta$, непрерывный спектр собственных значений
- 5) момент импульса $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$, момент импульса неопределен – нет собственных значений!
- 6) Проекция момента импульса на ось $\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ дискретный спектр собственных значений
- 7) Квадрат момента импульса – дискретный спектр собственных значений (угловой момент)

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \phi}$$
$$\Delta_{\theta, \phi} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

8) Кинетическая энергия $\hat{E}_k = \hat{p}^2 / 2m = -\hbar^2 / 2m \Delta$

9) Потенциальная энергия $\hat{U} = U$

10) Гамильтониан – оператор полной энергии

$$\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m + \hat{U} = -\hbar^2 / 2m \Delta + U$$

Билет №25

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 25

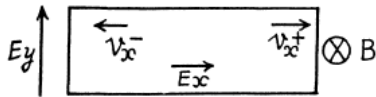
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Статистика Бозе-Эйнштейна. Функция распределения Бозе-Эйнштейна. Свойства идеального газа бозе-частиц.
2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Вычисление средних значений физических величин.
3. В некотором полупроводнике, у которого подвижность электронов проводимости в $\eta=2,0$ раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдается. Найти отношение концентраций дырок и электронов проводимости в этом полупроводнике.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

В некотором полупроводнике у которого подвижность электронов проводимости в $n=2.0$ раза больше подвижности дырок...



Когда образец содержит неравное число носителей обоих типов, чьи подвижности различны, в магнитном поле невозможно статическое равновесие (т.е. поперечное движение либо электронов либо дырок). Поперечный электрический поле действует по-разному на электроны и дырки. Если E_y как показано, чистая сила Лоренца на единичный заряд (эффективное поперечное электрическое поле)

$$E_y - v_x^- B$$

и на дырках

$$E_y + v_x^+ B$$

(мы предполагаем $B = B_z$). Затем происходит поперечный дрейф электронов и дырок, а чистый поперечный ток должен равняться нулю в равновесии.

$$u_0^- N_e e (E_y - u_0^- E_x B) + N_h e u_0^+ (E_y + u_0^+ E_x B) = 0$$

$$\text{или } E_y = \frac{N_e u_0^{-2} - N_h u_0^{+2}}{N_e u_0^- + N_h u_0^+} E_x B$$

С другой стороны

$$j_x = (N_e u_0^- + N_h u_0^+) e E_x$$

Таким образом, коэффициент Холла

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{1}{e} \frac{N_e u_0^{-2} - N_h u_0^{+2}}{e(N_e u_0^- + N_h u_0^+)}$$

Мы видим, что $R_H = 0$ когда

$$\frac{N_e}{N_h} = \left(\frac{u_0^+}{u_0^-} \right)^2 = \frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{4}$$

25. Статистика Бозе-Эйнштейна. Функция распределения Бозе-Эйнштейна. Свойства идеального газа бозе-частиц.

Если $\hat{P}_{ij}\psi = \psi$, то состояние называется **симметричным**. Частицы, описываемыми такими волновыми функциями, называются Бозе-частицами, или **Бозонами** – они подчиняются **статистике Бозе-Эйнштейна**:

$$f(\varepsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\varepsilon_i - \mu / kT} - 1}$$

Химический потенциал для бозонов всегда отрицательный или равен нулю.

Бозонами являются: фотоны, пи-мезоны, фононы (квант колебательного движения в кристаллах), **электроны в куперовских парах**. Все Бозоны обладают нулевым, или целочисленным спином.

При $f(\varepsilon_i) \ll 1$ (малом число заполнения уровня, или случай *разреженного газа бозонов*):

$$\frac{1}{e^{\varepsilon_i - \mu / kT} - 1} \ll 1 \rightarrow f(\varepsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\varepsilon_i - \mu / kT} - 1} \approx e^{-\varepsilon_i + \mu / kT} = A e^{-\varepsilon_i / kT}$$

Статистика Б-Э переходит в классическое распределение Максвелла-Больцмана.

Газ, свойства которого в силу принципа тождественности отличаются от свойств классического идеального газа, называется вырожденным газом. Если речь идет о газе из бозонов, то такой газ называется *бозе-газом*.

Газ становится вырожденным при температуре меньше критической (температуры вырождения, которая зависит от плотности газа и пропорциональна:

$$T_0 \sim \frac{n^{\frac{2}{3}}}{mk}$$

Для бозе-газа температурой вырождения называется температура, при которой происходит образование Бозе-конденсата:

$$T_0 = \left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi mk}, \quad \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,6124 \dots$$

Условием идеальности квантового газа является условие невзаимодействия между собой частиц, из которого он состоит.

Для вырожденного Бозе-газа давление **ниже** теоретического давления идеального газа при тех же условиях, вследствие конденсации Бозе — Эйнштейна. При вырождении газа бозонов из частиц с отличной от нуля массой (такими бозонами могут быть атомы и молекулы) некоторая доля частиц системы должна переходить в состояние с нулевым импульсом; это явление называется Бозе — Эйнштейновской конденсацией. Чем ближе температура к абсолютному нулю, тем больше частиц должно оказаться в этом состоянии. Однако, системы таких частиц при понижении температуры до очень низких значений переходят в твёрдое или жидкое (для гелия) состояния, к которым неприменимо приближение идеального газа.

Для газа из бозонов нулевой массы, к которым относятся фотоны, температура вырождения равна бесконечности; поэтому фотонный газ всегда вырожденный, и классическая статистика к нему не применима. Фотонный газ является единственным вырожденным идеальным бозе-газом стабильных частиц. Однако Бозе-Эйнштейновской конденсации в нём не происходит, так как не существует фотонов с нулевым импульсом (фотоны всегда движутся со скоростью света). *(В термодинамике равновесное тепловое излучение рассматривают как фотонный газ, заполняющий полость объёмом V , давлением P и температурой T , совпадающей с температурой окружающей среды).*

15. ! Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений. (проверить)

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

↑
Обобщенная
координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — x, y, z) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi dt$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dt .

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

↑
Элемент объема

Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния

↑ Собственная функция оператора H
↑ Собственное значение

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L оператора уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ , имеющей квантово-механический оператор λ , в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 , то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2 , либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2 .

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = \underline{\underline{-}} \Psi(q_1, \underline{q_3}, \underline{q_2}, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Операторы квантовой механики.

1. Операторы координаты определяются действием на функции

$$\hat{x}(\Psi) = x \cdot \Psi, \quad \hat{y}(\Psi) = y \cdot \Psi, \quad \hat{z}(\Psi) = z \cdot \Psi.$$

Все три оператора перестановочны между собой. Например, коммутатор $[\hat{x}, \hat{y}](\Psi) = \hat{x}(\hat{y}(\Psi)) - \hat{y}(\hat{x}(\Psi)) = x \cdot y \cdot \Psi - y \cdot x \cdot \Psi = 0$, т.е. $[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{0}$.

Следовательно, координаты могут быть одновременно измерены с любой точностью. Оператор координаты является самосопряженным. Проверим это, например, для \hat{x} :

$$\begin{aligned} (\hat{x}(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_V \Psi_2^* \cdot \hat{x}(\Psi_1) \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x \cdot \Psi_1 \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = \\ &= \int_V (x\Psi_2)^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = (\Psi_1, \hat{x}(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные числа этого оператора – это значения координат. Очевидно, что эти значения - действительные числа. Оператор координаты обладает непрерывным спектром, поэтому среднее значение, например, координаты x определяется равенством

$$\langle x \rangle = \int_V \Psi^* \hat{x}(\Psi) dV = \int_V \Psi^* x \Psi dV = \int_V x |\Psi|^2 dV.$$

Оператор радиус-вектора определяется как векторная функция

$$\vec{R}(\Psi) = \vec{e}_x \hat{x}(\Psi) + \vec{e}_y \hat{y}(\Psi) + \vec{e}_z \hat{z}(\Psi) = x \cdot \Psi \cdot \vec{e}_x + y \cdot \Psi \cdot \vec{e}_y + z \cdot \Psi \cdot \vec{e}_z$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

2. Оператор проекции импульса на ось декартовой системы координат

$$\hat{p}_x(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \hat{p}_y(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \hat{p}_z(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Проверим, что этот оператор самосопряженный для одномерного случая. Т.к. частица находится в ограниченной области, то на границе области волновая функция частицы обязательно обращается в ноль. Если область задана интервалом $a < x < b$, то $\Psi(a) = 0$ и $\Psi(b) = 0$

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_a^b \Psi_2^* \cdot \hat{p}_x(\Psi_1) \cdot dx = \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \frac{\hbar}{i} \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \left\{ \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx - \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx \right\} = \int_a^b \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \right) \cdot \Psi_1 \cdot dx = \int_a^b \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^* \cdot \Psi_1 \cdot dx = (\Psi_1, \hat{p}_x(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные значения оператора проекции импульса – это значения проекции импульса. Найдем, например, собственные функции оператора проекции импульса на ось X. Для этого надо разрешить операторное уравнение $\hat{p}_x(\Psi) = p_x \cdot \Psi$. С учётом определения оператора получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \cdot \Psi,$$

которое решаем методом разделения переменных $\frac{d\Psi}{\Psi} = i \frac{p_x}{\hbar} \cdot dx$, откуда $\Psi = C \cdot e^{\frac{ip_x \cdot x}{\hbar}}$, где C не зависит от x .

В квантовой механике вводят оператор *полной энергии* \hat{E} , такой, что изменение волновой функции во времени (или как говорят *эволюция*) полностью определяется этим оператором:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{E}(\Psi).$$

Собственные значения оператора полной энергии – это значения энергии системы:

$\hat{E}(\Psi) = E \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций для оператора полной энергии.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi, \quad \frac{d\Psi}{\Psi} = -i \frac{E}{\hbar} \cdot dt, \quad \Psi = \psi \cdot e^{-\frac{iE}{\hbar} t},$$

где ψ - функция, не зависящая от времени.

Если энергия системы не меняется (стационарное состояние), то волновая функция имеет вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-\frac{iE}{\hbar} t}.$$

3. Оператор момента импульса.

В классической физике вектор момента импульса относительно некоторой точки определяется

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yp_z - zp_y) + \vec{e}_y (zp_x - xp_z) + \vec{e}_z (xp_y - yp_x),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

Тогда вектор-оператор момента импульса должен принять вид

$$\hat{L} = \vec{R} \times \hat{p} = \vec{e}_x (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) + \vec{e}_y (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) + \vec{e}_z (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x).$$

Операторы проекций моментов импульса на оси

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x.$$

Собственные значения оператора проекции импульса на ось – это величины проекции момента импульса $\hat{L}_z(\Psi) = L_z \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций, отвечающих этим собственным значениям: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = L_z \cdot \Psi$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \varphi}$ (где C – функция, не зависящая от φ). Учитывая, что при повороте вокруг оси z на угол $2\pi m$ (m – целое число) вид функции не меняется, получаем равенство $\frac{L_z}{\hbar} = m$, т.е. проекция момента импульса на ось z может принимать значения, кратные приведенной постоянной Планка \hbar : $L_z = m \cdot \hbar$. В этом смысле постоянную Планка иногда называют *квантом действия*.

4. Оператор потенциальной энергии

В классической механике потенциальная энергия зависит от взаимного положения тел.

Выражение для потенциальной энергии квазиупругой силы (вдоль оси X) $U = \frac{kx^2}{2}$ в операторном виде будет выглядеть так же $\hat{U}(\Psi) = \frac{k\hat{x}^2}{2}(\Psi) = \frac{k}{2} \hat{x}(\hat{x}(\Psi)) = \frac{k}{2} x \cdot x \cdot \Psi = \frac{kx^2}{2} \cdot \Psi$.

Выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{R}$ перейдет в оператор такого же вида $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi)$, где оператор $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right)$ является обратным к оператору $\hat{R}(\Psi) = R \cdot \Psi$. Очевидно, что $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi) = \frac{1}{R} \cdot \Psi$, поэтому $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \Psi$

5. Оператор кинетической энергии.

В классической механике кинетическая энергия тела определяется выражением

$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Поэтому оператор кинетической энергии имеет вид

$$\hat{E}_k(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) = \frac{1}{2m} \hat{p}(\hat{p}(\Psi)) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar}{i} \bar{\nabla} \left(\frac{\hbar}{i} \bar{\nabla}(\Psi) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi.$$

Найдём собственные значения оператора кинетической энергии для одномерного случая

$\hat{E}_k(\Psi) = E_k \cdot \Psi$ или $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E_k \cdot \Psi$. Получаем уравнение, с которым уже встречались в задаче об одномерной яме с непроницаемыми стенками $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_k \cdot \Psi = 0$.

Откуда $\Psi = C \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_k}}{\hbar} x + \alpha\right)$.

6. Оператор Гамильтона.

В классической механике механическая энергия тела, записанная как функция импульса и координат, называется *функцией Гамильтона* $H = E_k + U = \frac{p^2}{2m} + U$.

В квантовой механике соответствующий оператор называется оператором Гамильтона (или *гамильтонианом*)

$$\hat{H}(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) + \hat{U}(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi.$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической величине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

А) **Линейными**

В) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \overline{\Psi_1} \hat{F} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{F} \Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Собственные значения, собственные функции операторов:

$$\hat{F} \Psi = a \Psi$$

Спектр собственных значений называется дискретным, если его собственные значения можно пронумеровать, если нельзя – непрерывным. Если одному собственному значению принадлежит несколько собственных функций, собственное значение называется вырожденным.

Собственные функции ортонормированы $\int_V \Psi_n \overline{\Psi_m} dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

Среднее значение

$$\langle f \rangle = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \overline{\Psi} \hat{F} \Psi dV$$

Основные операторы физических величин:

- 1) оператор координат $\hat{x} = x$, непрерывный спектр собственных значений
- 2) радиус-вектор $\hat{r} = \bar{i}\hat{x} + \bar{j}\hat{y} + \bar{k}\hat{z}$, непрерывный спектр собственных значений
- 3) оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar \text{grad}$, непрерывный спектр собственных значений
- 4) квадрат импульса $\hat{p}^2 = (\hat{p})^2 = -\hbar\Delta$, непрерывный спектр собственных значений
- 5) момент импульса $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$, момент импульса неопределен – нет собственных значений!
- 6) Проекция момента импульса на ось $\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ дискретный спектр собственных значений
- 7) Квадрат момента импульса – дискретный спектр собственных значений (угловой момент)

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \phi}$$
$$\Delta_{\theta, \phi} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

8) Кинетическая энергия $\hat{E}_k = \hat{p}^2 / 2m = -\hbar^2 / 2m \Delta$

9) Потенциальная энергия $\hat{U} = U$

10) Гамильтониан – оператор полной энергии

$$\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m + \hat{U} = -\hbar^2 / 2m \Delta + U$$

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 26
 по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.
2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений.
3. Рассчитайте активность одного грамма ${}^{226}_{88}\text{Ra}$, если период полураспада этого изотопа $T_{1/2} = 1620$ лет.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
 (число, месяц, год)

Рассчитайте активность одного грамма Ra...

2. Рассчитать активность 1 гр. ${}^{226}\text{Ra}$, если $T_{1/2} = 1620$ лет ($M = 226 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$)

$$A = N_0 \lambda e^{-\lambda t} \text{ - формула активности}$$

$$N_0 = \nu N_a = \frac{m}{M} N_a ; \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} ;$$

$$A(0) = N_0 \lambda = \frac{m}{M} N_a \frac{\ln 2}{T_{1/2}} ;$$

15. ! Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений. (проверить)

Постулат I

Любое состояние системы полностью описывается некоторой функцией $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ от координат всех образующих частиц и времени, называемой функцией состояния системы или ее волновой функцией.

$$\Psi = (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

↑
Обобщенная
координата

Обобщенная координата является совокупностью пространственных координат (в декартовой системе координат — x, y, z) и проекции спина частицы.

Волновая функция должна быть однозначна, конечна и непрерывна на всем пространстве.

Сама волновая функция не имеет физического смысла. $\Psi^*\Psi dt$ — имеет физический смысл: плотность вероятности нахождения системы в элементе объема dt .

Условие нормировки:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau = 1$$

↑
Элемент объема

— Условие отражает тот факт, что вероятность найти систему во всем пространстве равна единице

Постулат II

Каждой динамической переменной (координата, импульс, энергия и т.д.) ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор. Все функциональные отношения между величинами классической механики в квантовой механике заменяются отношениями между операторами.

Постулат III

Функция состояния должна удовлетворять решению:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad \text{— Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния}$$

↑ Собственная функция оператора H
↑ Собственное значение

Постулат IV

Единственно возможными значениями, которые могут быть получены при измерении динамической переменной L, могут являться собственные значения L операторного уравнения

$$\hat{L}\Psi_i = L\Psi_i$$

Постулат V

Среднее значение физической величины λ , имеющей квантово-механический оператор λ , в состоянии Ψ определяется соотношением

$$\bar{\lambda} \equiv \langle \lambda \rangle = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \underbrace{\langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle}_{\text{Обозначение введено П. Дираком}}$$

$$E = \int \Psi^* \lambda \Psi d\tau \equiv \langle \Psi | \lambda | \Psi \rangle$$

Постулат VI

Если система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 , то она может находиться и в состоянии

$$\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

$$C_i = \int \Psi^* \Psi_i d\tau$$

Этот постулат известен под названием принципа суперпозиции. Из постулата V следует, что функция Ψ описывает такое состояние, при котором система находится в состоянии Ψ_1 с вероятностью, равной C_1^2 , либо в состоянии Ψ_2 с вероятностью C_2^2 .

Постулат VII

Волновая функция системы частиц с полуцелым спином (в частности, электронов) должна быть антисимметрична относительно перестановки координат любых двух частиц:

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = \underline{\underline{-}} \Psi(q_1, \underline{q_3}, \underline{q_2}, \dots, q_n, t)$$

Антисимметрия волновой функции электронов была постулирована В. Паули (1925).

Операторы квантовой механики.

1. Операторы координаты определяются действием на функции

$$\hat{x}(\Psi) = x \cdot \Psi, \quad \hat{y}(\Psi) = y \cdot \Psi, \quad \hat{z}(\Psi) = z \cdot \Psi.$$

Все три оператора перестановочны между собой. Например,

коммутатор $[\hat{x}, \hat{y}](\Psi) = \hat{x}(\hat{y}(\Psi)) - \hat{y}(\hat{x}(\Psi)) = x \cdot y \cdot \Psi - y \cdot x \cdot \Psi = 0$, т.е. $[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{0}$.

Следовательно, координаты могут быть одновременно измерены с любой точностью.

Оператор координаты является самосопряженным. Проверим это, например, для \hat{x} :

$$\begin{aligned} (\hat{x}(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_V \Psi_2^* \cdot \hat{x}(\Psi_1) \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x \cdot \Psi_1 \cdot dV = \int_V \Psi_2^* \cdot x^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = \\ &= \int_V (x\Psi_2)^* \cdot \Psi_1 \cdot dV = (\Psi_1, \hat{x}(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные числа этого оператора – это значения координат. Очевидно, что эти значения - действительные числа. Оператор координаты обладает непрерывным спектром, поэтому среднее значение, например, координаты x определяется равенством

$$\langle x \rangle = \int_V \Psi^* \hat{x}(\Psi) dV = \int_V \Psi^* x \Psi dV = \int_V x |\Psi|^2 dV.$$

Оператор радиус-вектора определяется как векторная функция

$$\vec{R}(\Psi) = \vec{e}_x \hat{x}(\Psi) + \vec{e}_y \hat{y}(\Psi) + \vec{e}_z \hat{z}(\Psi) = x \cdot \Psi \cdot \vec{e}_x + y \cdot \Psi \cdot \vec{e}_y + z \cdot \Psi \cdot \vec{e}_z$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

2. Оператор проекции импульса на ось декартовой системы координат

$$\hat{p}_x(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \hat{p}_y(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \hat{p}_z(\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Проверим, что этот оператор самосопряженный для одномерного случая. Т.к. частица находится в ограниченной области, то на границе области волновая функция частицы обязательно обращается в ноль. Если область задана интервалом $a < x < b$, то $\Psi(a) = 0$ и $\Psi(b) = 0$

$$\begin{aligned} (\hat{p}_x(\Psi_1), \Psi_2) &= \int_a^b \Psi_2^* \cdot \hat{p}_x(\Psi_1) \cdot dx = \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \frac{\hbar}{i} \int_a^b \Psi_2^* \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \left\{ \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx - \int_a^b \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \cdot \Psi_1 \cdot dx \right\} = \int_a^b \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} \right) \cdot \Psi_1 \cdot dx = \int_a^b \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^* \cdot \Psi_1 \cdot dx = (\Psi_1, \hat{p}_x(\Psi_2)) \end{aligned}$$

Собственные значения оператора проекции импульса – это значения проекции импульса. Найдем, например, собственные функции оператора проекции импульса на ось X. Для этого надо разрешить операторное уравнение $\hat{p}_x(\Psi) = p_x \cdot \Psi$. С учётом определения оператора получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \cdot \Psi,$$

которое решаем методом разделения переменных $\frac{d\Psi}{\Psi} = i \frac{p_x}{\hbar} \cdot dx$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{p_x}{\hbar} x}$, где C не зависит от x .

В квантовой механике вводят оператор *полной энергии* \hat{E} , такой, что изменение волновой функции во времени (или как говорят *эволюция*) полностью определяется этим оператором:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{E}(\Psi).$$

Собственные значения оператора полной энергии – это значения энергии системы:

$\hat{E}(\Psi) = E \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций для оператора полной энергии.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi, \quad \frac{d\Psi}{\Psi} = -i \frac{E}{\hbar} \cdot dt, \quad \Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

где ψ - функция, не зависящая от времени.

Если энергия системы не меняется (стационарное состояние), то волновая функция имеет вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.$$

3. Оператор момента импульса.

В классической физике вектор момента импульса относительно некоторой точки определяется

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yp_z - zp_y) + \vec{e}_y (zp_x - xp_z) + \vec{e}_z (xp_y - yp_x),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

Тогда вектор-оператор момента импульса должен принять вид

$$\hat{L} = \vec{R} \times \hat{p} = \vec{e}_x (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) + \vec{e}_y (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) + \vec{e}_z (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x).$$

Операторы проекций моментов импульса на оси

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x.$$

Собственные значения оператора проекции импульса на ось – это величины проекции момента импульса $\hat{L}_z(\Psi) = L_z \cdot \Psi$. Найдем вид собственных функций, отвечающих этим собственным значениям: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = L_z \cdot \Psi$, откуда $\Psi = C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \varphi}$ (где C – функция, не зависящая от φ). Учитывая, что при повороте вокруг оси z на угол $2\pi m$ (m – целое число) вид функции не меняется, получаем равенство $\frac{L_z}{\hbar} = m$, т.е. проекция момента импульса на ось z может принимать значения, кратные приведенной постоянной Планка \hbar : $L_z = m \cdot \hbar$. В этом смысле постоянную Планка иногда называют *квантом действия*.

4. Оператор потенциальной энергии

В классической механике потенциальная энергия зависит от взаимного положения тел.

Выражение для потенциальной энергии квазиупругой силы (вдоль оси X) $U = \frac{kx^2}{2}$ в операторном виде будет выглядеть так же $\hat{U}(\Psi) = \frac{k\hat{x}^2}{2}(\Psi) = \frac{k}{2} \hat{x}(\hat{x}(\Psi)) = \frac{k}{2} x \cdot x \cdot \Psi = \frac{kx^2}{2} \cdot \Psi$.

Выражение для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{R}$ перейдет в оператор такого же вида $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi)$, где оператор $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right)$ является обратным к оператору $\hat{R}(\Psi) = R \cdot \Psi$. Очевидно, что $\left(\frac{\hat{1}}{R} \right) (\Psi) = \frac{1}{R} \cdot \Psi$, поэтому $\hat{U}(\Psi) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \Psi$

5. Оператор кинетической энергии.

В классической механике кинетическая энергия тела определяется выражением

$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Поэтому оператор кинетической энергии имеет вид

$$\hat{E}_K(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) = \frac{1}{2m} \hat{p}(\hat{p}(\Psi)) = \frac{1}{2m} \frac{\hbar}{i} \bar{\nabla} \left(\frac{\hbar}{i} \bar{\nabla}(\Psi) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi.$$

Найдём собственные значения оператора кинетической энергии для одномерного случая

$\hat{E}_K(\Psi) = E_K \cdot \Psi$ или $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E_K \cdot \Psi$. Получаем уравнение, с которым уже встречались в задаче об одномерной яме с непроницаемыми стенками $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_K \cdot \Psi = 0$.

Откуда $\Psi = C \sin\left(\frac{\sqrt{2mE_K}}{\hbar} x + \alpha\right)$.

6. Оператор Гамильтона.

В классической механике механическая энергия тела, записанная как функция импульса

и координат, называется *функцией Гамильтона* $H = E_K + U = \frac{p^2}{2m} + U$.

В квантовой механике соответствующий оператор называется оператором Гамильтона (или *гамильтонианом*)

$$\hat{H}(\Psi) = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\Psi) + \hat{U}(\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi.$$

Оператор – математическое правило, преобразующее одну функцию в другую.

Второй постулат квантовой механики гласит, что каждой физической величине соответствует оператор этой физической величины, соотношения между операторами имеют ту же структуру, что и отношения между соответствующими физическими величинами в классической механике.

Квантомеханические операторы должны быть:

А) **Линейными**

В) **самосопряженными (эрмитовыми)**

$$\int \Psi_1 \hat{F} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 \overline{\hat{F} \Psi_1} dV$$

(собственные значения эрмитовых операторов могут быть только действительными числами)

Собственные значения, собственные функции операторов:

$$\hat{F}\Psi = a\Psi$$

Спектр собственных значений называется дискретным, если его собственные значения можно пронумеровать, если нельзя – непрерывным. Если одному собственному значению принадлежит несколько собственных функций, собственное значение называется вырожденным.

Собственные функции ортонормированы $\int_V \Psi_n \overline{\Psi_m} dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

Среднее значение

$$\langle f \rangle = \sum P_n f_n = \sum |C_n|^2 f_n = \int_V \overline{\Psi} \hat{F} \Psi dV$$

Основные операторы физических величин:

- 1) оператор координат $\hat{x} = x$, непрерывный спектр собственных значений
- 2) радиус-вектор $\hat{r} = \bar{i}\hat{x} + \bar{j}\hat{y} + \bar{k}\hat{z}$, непрерывный спектр собственных значений
- 3) оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar\text{grad}$, непрерывный спектр собственных значений
- 4) квадрат импульса $\widehat{p^2} = (\hat{p})^2 = -\hbar\Delta$, непрерывный спектр собственных значений
- 5) момент импульса $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$, момент импульса неопределен – нет собственных значений!
- 6) Проекция момента импульса на ось $\widehat{L_z} = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ дискретный спектр собственных значений
- 7) Квадрат момента импульса – дискретный спектр собственных значений (угловой момент)

$$\widehat{L^2} = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$$
$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

- 8) Кинетическая энергия $\widehat{E_k} = \widehat{p^2}/2m = -\hbar/2m \Delta$
- 9) Потенциальная энергия $\widehat{U} = U$
- 10) Гамильтониан – оператор полной энергии

$$\widehat{H} = \widehat{p^2}/2m + \widehat{U} = -\hbar/2m \Delta + U$$

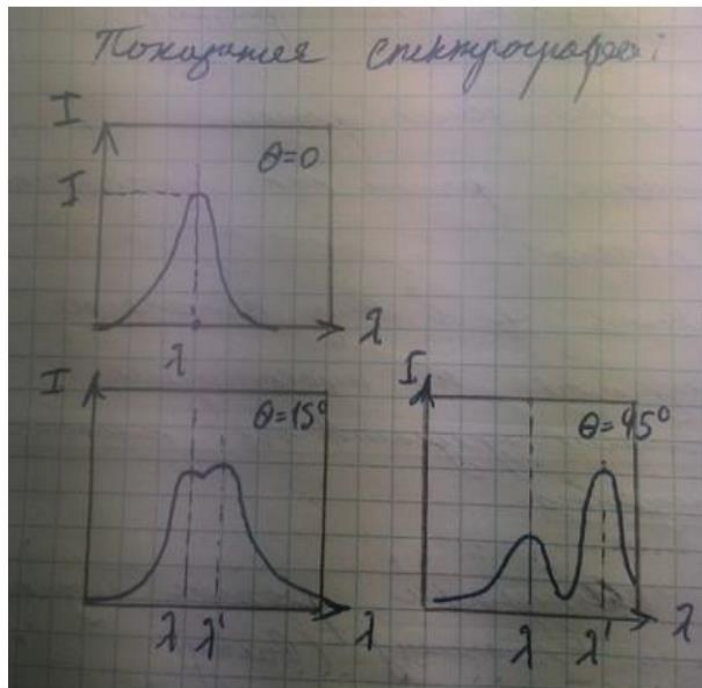
4. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.

Эффект Комптона объясняется упругим рассеиванием фотонов на свободных электронах вещества.

Часть импульса фотон передает электрону, от чего уменьшается энергия фотона и увеличивается его длина волны.

Определим зависимость

$\lambda' - \lambda = f(\theta)$, записав уравнения законов сохранения энергии и импульса для системы из электрона и фотона, а также релятивистского инварианта для электрона (k – волновой вектор электрона, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)



$$\begin{cases} \hbar\omega + mc^2 = E_{\text{эл}} + \hbar\omega' \\ \hbar\vec{k}_\phi = \hbar\vec{k}'_\phi + \vec{P}_e \\ E_{\text{эл}}^2 - P_e^2 c^2 = m^2 c^4 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos\theta) = \lambda_c (1 - \cos\theta)$

$\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ - длина волны Комптона для электрона.

Мы не наблюдаем комптоновского рассеяния на ядрах, поскольку из-за их большой массы величина комптоновской длины волны для ядер слишком мала. Эффект комптоновского рассеивания на электронах мы наблюдаем только в рентгеновском излучении, потому что длина рентгеновского излучения сопоставима с длиной волны Комптона.

Билет №27

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 27
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Статистика Ферми-Дирака. Функция распределения Ферми-Дирака. Вырожденный электронный газ. Энергия Ферми.
2. Условия возможности одновременного измерения разных физических величин в квантовой механике. Соотношение неопределенностей Гайзенберга.
3. Найдите кинетическую энергию электрона, при которой его длина волны де Бройля равна его комптоновской длине волны λ_K .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Найдите кинетическую энергию электрона при которой его длина волны де Бройля равна...

Решение:

Длина волны де Бройля

$$\lambda_{dB} = \frac{\frac{2\pi\hbar}{m_0 v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2\pi\hbar}{m_0 v} \sqrt{1-v^2/c^2}$$

и комптоновская длина волны равна

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}$$

Они равны, если $\beta = \sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta = \frac{v}{c}$

$$\text{или } \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Соответствующая кинетическая энергия

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = (\sqrt{2} - 1)m_0 c^2$$

Здесь m_0 - масса покоя частицы (электрона).

26. Статистика Ферми-Дирака. Функция распределения Ферми-Дирака. Вырожденный электронный газ. Энергия Ферми.

Если $\hat{P}_{ij}\psi = -\psi$, то состояние называется **антисимметричным**. Частицы, описываемыми такими волновыми функциями, называются Ферми-частицами, или **Фермионы** – они подчиняются **статистике Ферми-Дирака**: $f(\varepsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}$

Аналогично, для невырожденного ферми-газа, с малыми числами заполнения, статистика Ферми-Дирака предельно переходит в классическую статистику.

Фермионы – частицы-индивидуалисты: электроны, протоны, нейтроны, нейтрино, и все элементарные частицы и античастицы с полуцелым спином.

Для фермионов хим. потенциал может быть только положительным. В случае Фермионов, хим. потенциал называют энергией Ферми, или уровнем Ферми. Энергия Ферми является медленно изменяющейся функцией температуры. Статистика Ферми-Дирака принимает вид: $f(\varepsilon_i) = 1 * \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_F}{kT}} + 1}$

Энергию Ферми при $T=0$ можно вычислить как:

$$\varepsilon_F(0) = (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m}$$

Можно ввести понятие температуры Ферми:

$$T_F = \frac{\varepsilon_F(0)}{k} = (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2mk}$$

При $T=0$ распределение Ферми-Дирака имеет ступенчатый вид: все квантовые состояния с энергией меньше энергии Ферми оказываются занятыми, а с энергией больше энергии Ферми.

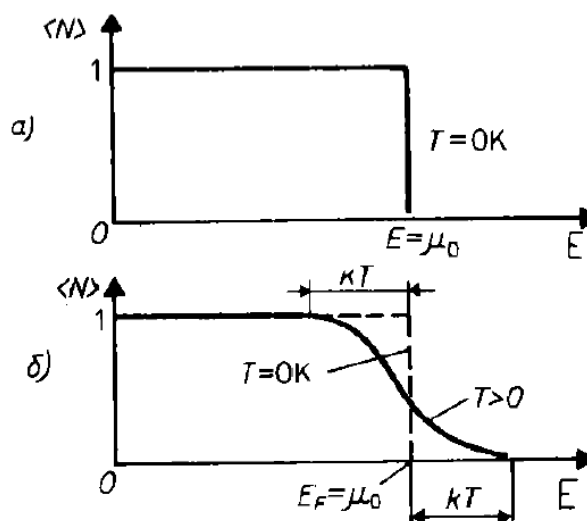
При увеличении температуры, резкий скачок в области энергии Ферми становится более плавным на величину порядка kT .

Уровень Ферми – энергетический уровень, соответствующий энергии Ферми.

Физический смысл уровня Ферми:

уровень Ферми – такой уровень, вероятность заполнения которого при любой температуре равно $\frac{1}{2}$.

Также физический смысл уровня Ферми: можно определить как максимальный заполненный энергетический уровень при нулевой температуре.



Можно ввести также следующие величины: импульс Ферми и скорость Ферми – максимальные импульс и скорость, которыми при нулевой температуре может обладать фермион.

$$P = \sqrt{2m\varepsilon_F} ; v = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}}$$

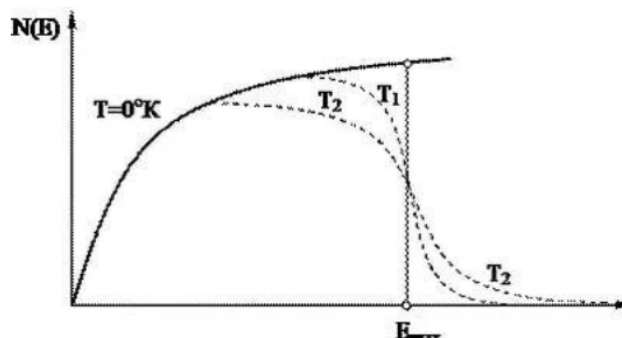
Вырожденный электронный газ. Температура вырождения.

Мы рассматриваем электроны проводимости в металле как *электронный газ*, опираясь на следующую модель: электроны проводимости свободно движутся в потенциальной яме внутри металла, не взаимодействуя с ним. При $T=0$ электроны расположены на самых низких доступных энергетических уровнях.

Энергетические состояния в металле квазинепрерывны, их плотность увеличивается с увеличением энергии.

Функция распределения электронов проводимости по энергиям имеет вид:

Площадь под графиком численно равна концентрации свободных электронов в металле.



При ненулевой температуре граница размывается, «скривляясь» в кривую шириной порядка kT – все состояния на расстоянии дальше kT от энергии Ферми, остаются заполненными, а около энергии Ферми появляется полоса частично заполненных энергетических уровней.

Ферми-газ называется вырожденным, если его свойства отличаются от свойств классического газа при тех же условиях. Для Ферми газа это заключается в том, что его давление постоянно при температурах ниже критической – температуры вырождения. Иначе – температуры Ферми:

$$\varepsilon_F(0) = (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$T_F = \frac{\varepsilon_F(0)}{k} = (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2mk}$$



Физический смысл температуры Ферми –

температура, при котором среднее расстояние между фермионами становится порядка длины волны де Бройля частицы.

Для электронов в металле (энергия Ферми при нуле порядка 5эВ) температура вырождения порядка 60000К – электронный газ в металле всегда вырожден. Для полупроводников характер поведения электронного газа зависит от концентраций электронов и дырок – для многих чистых беспримесных полупроводников, электронный газ становится невырожденным уже при температуре больше 300К. Невырожденный электронный газ подчиняется статистике Максвелла-Больцмана. Обычные газы из атомов или молекул вырождаются лишь при температурах около абсолютного нуля.

17. Условия возможности одновременного измерения разных физических величин в квантовой механике. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.

При измерении физической величины мы получаем **собственное значение** ее оператора.

Вероятность получить определенное значение при измерении равна $P_n = |C_n|^2$

Если две различные величины можно точно измерить одновременно, то $\hat{A}\hat{B}\Psi = ab\Psi$

Это выполняется только в том случае, когда операторы этих физических величин коммутируют.

Соотношение неопределенности Гейзенберга:

Объект микромира нельзя характеризовать одновременно точной координатой и точной величиной проекции импульса на ту же ось координат. Также это справедливо для неопределенности энергии микропроцесса в процессе длительности t .

Среднеквадратичная флуктуация: $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} = \Delta x$ - назовем это неопределенностью координаты, аналогично с импульсом. Тогда:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Стоит учесть, что $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$

Для любых некоммутируемых операторов:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = c$$

$$\Delta a \Delta b \geq \frac{|c|}{2}$$

Билет №28

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 28
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Уравнение Шредингера для атома водорода. Квантовые числа, их физический смысл.
2. Элементарные частицы, их основные характеристики. Симметрия и законы сохранения в мире элементарных частиц.
3. Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками во втором возбужденном состоянии. Определите вероятность обнаружения частицы в интервале $1/3 a$, равноудаленном от стенок ямы.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной a ...

$$\Psi(x) = \sqrt{2/a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$n=3$ т.к. второе возб. сост.

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{a/3}^{2a/3} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_{a/3}^{2a/3} \frac{1 - \cos \frac{6\pi x}{a}}{2} dx =$$

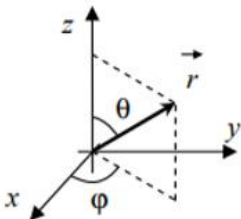
$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{6\pi} (\sin 4\pi - \sin 2\pi) \right) \right) = \frac{2}{a} \left(\frac{a}{6} - \frac{a}{12\pi} (\sin 4\pi - \sin 2\pi) \right) = \frac{1}{3}$$

18. Уравнение Шредингера для атома водорода. Квантовые числа, их физический смысл.

Стационарное уравнение Шредингера для атома водорода.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из неподвижного ядра с зарядом Ze (Z – целое число) и электрона. Такая система при $Z > 1$ описывает водородоподобный ион, а при $Z = 1$ – атом водорода. Считая энергию системы постоянной, запишем уравнение Шредингера для стационарного состояния

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \Psi = 0.$$



Запишем это уравнение в сферической системе координат, $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Так как оператор Лапласа в этой системе принимает вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

то получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \Psi = 0$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \Psi = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right]$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$\Delta_{\theta, \varphi}(\Psi) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}.$$

Для поиска собственных функций этого оператора необходимо решить уравнение

$$\Delta_{\theta, \varphi}(\Psi) = \lambda \Psi$$

Исследование этого уравнения показывает, что оно обладает непрерывным решением, если собственное имеет специальный вид число $\lambda = -l \cdot (l+1)$, где l - целое неотрицательное число $l = 0, 1, 2, \dots$.

Введём оператор квадрата момента импульса $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$.

В сферической системе координат этот оператор принимает вид

$$\hat{L}^2(\Psi) = -\hbar^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right\} \text{ или } \hat{L}^2(\Psi) = -\hbar^2 \cdot \Delta_{\theta, \varphi}(\Psi).$$

Поиск собственных значений этого оператора $\hat{L}^2(\Psi) = L^2 \cdot \Psi$ приводит к уже известному уравнению $\Delta_{\theta, \varphi}(\Psi) + \frac{L^2}{\hbar^2} \Psi = 0$, откуда следует равенство $\lambda = -\frac{L^2}{\hbar^2}$ или $\frac{L^2}{\hbar^2} = l \cdot (l+1)$ для неотрицательных целых чисел l . Поэтому величина момента импульса для электрона в атоме принимает значения

$$L = \hbar \sqrt{l \cdot (l+1)}.$$

Т.к. проекция вектора на ось Z не может быть больше длины вектора, то из соотношения $|L_z| \leq L$ и равенств $L_z = m\hbar$, $L = \hbar \sqrt{l \cdot (l+1)}$ получаем $|m\hbar| \leq \hbar \sqrt{l \cdot (l+1)}$ или $m^2 \leq l \cdot (l+1)$. С учётом того, что числа m и l - целые это соотношение эквивалентно тому, что значения m находятся в диапазоне $m = -l, \dots, 0, \dots, l$.

Исходное уравнение Шредингера $\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$, в сферической системе координат

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = -\frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}(\psi)$$

с учётом выражения для квадрата момента импульса $\hat{L}^2(\Psi) = -\hbar^2 \cdot \Delta_{\theta, \varphi}(\Psi)$ может быть записано в форме, учитывающей квадрат момента импульса

$$\hbar^2 r^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi \right) = \hat{L}^2(\psi).$$

Следовательно, решение этого уравнения должно зависеть от величины момента импульса.

Это уравнение имеет непрерывные решения при любых положительных значениях энергии $E > 0$. Этому случаю соответствуют решения описывающие электрон, пролетающий мимо ядра.

Для отрицательных значений энергии $E < 0$ непрерывные решения существуют при

$$E_n = -\frac{mZ^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. В этом случае электрон связан с ядром. При этом число l меняется в диапазоне $l = 0, 1, \dots, (n-1)$

Физический смысл квантовых чисел:

1. Главное квантовое число: $n = 1, 2, 3 \dots$ определяет полную энергию электрона в любом квантовом состоянии:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2}$$

2. Орбитальное квантовое число $l = 0, 1, 2 \dots, n - 1$ определяет величину момента импульса атома: $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, характеризует размер и форму электронного облака
3. Магнитное квантовое число $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \pm l$ определяет величину проекции момента импульса $L_z = \hbar m$, орбитального магнитного момента $p_z^m = \mu_B m$, соответственно, ориентацию электронного облака в пространстве
4. Магнитное спиновое квантовое число $m_s = \pm \frac{1}{2}$ - характеризует направление собственных механического и магнитного момента электронов

В атоме может быть только один электрон с данным набором квантовых чисел, согласно **принципу запрета Паули** (в системе тождественных фермионов несколько фермионов не могут находиться в одном и том же состоянии)

Число различных состояний в зависимости от энергетического уровня равно $2n^2$

38. Элементарные частицы, их основные характеристики. Симметрия и законы сохранения в мире элементарных частиц.

Системы можно систематизировать по характерным размерам. Рассмотрим нижние уровни этой системы:

- атомы – порядка ангстрема
- ядра – порядка 1..10 фемтометра
- адроны – их представителями являются нуклоны, размеры порядка 1 фемтометра
- кварки, из которых состоят адроны, лептоны, переносчики взаимодействий (фотон, мезон) – «истинно элементарные частицы»

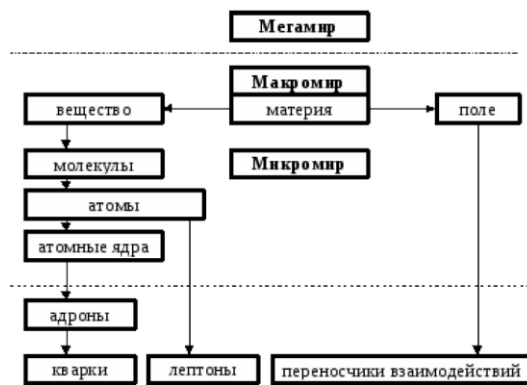


Рис 2. Структурные уровни строения материи в Микромире

По традиции элементарными частицами называются все субъядерные микрообъекты, хотя изначально так называли частицы, которые считали неделимыми. Также случилось и с названием атома (в переводе с греческого – «неделимый»)

На данный момент известно около 500 элементарных частиц.

У большинства элементарных частиц, обладающих массой, она сравнима с массой протона. Одна из самых легких частиц, электрон, в 1836 раз легче протона, одна из самых тяжелых частиц, Z^0 -бозон, в 100 раз больше.

Элементарные частицы отличаются: средним временем жизни, спином, электрическим зарядом, магнитным моментом, лептонным и барионным зарядом.

Практически каждой частице соответствует античастица, обозначаемая тильдой (протон p антипротон \bar{p}). Частица и античастица имеют одинаковую массу, спин и время жизни, но их остальные характеристики равны по модулю, и отличаются знаком.

Существуют частицы, у которых все заряды – электрический, лептонный и барионный, равны нулю – такие частицы тождественны своим античастицам, и называются истинно нейтральными, к примеру – фотон, пи-ноль мезон.

При столкновении частицы и античастицы они аннигилируют, выпуская два фотона гамма-излучения.

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 29
 по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Фотопроводимость полупроводников. Процессы генерации и рекомбинации носителей заряда.
2. Собственный механический и магнитный моменты электрона. Опыт Штерна и Герлаха.
3. Покажите, что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля электрона. Определите длину волны де Бройля электрона на круговой орбите с главным квантовым числом n .

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
 (число, месяц, год)

Покажите что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн...

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{e^2}{r^2}$$

$$mVr = n\hbar$$

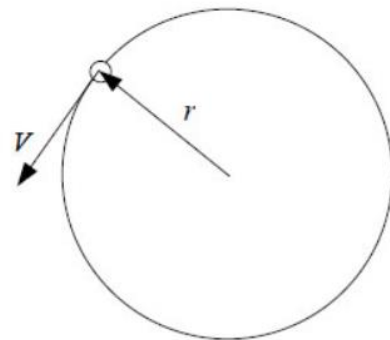
$$\rightarrow r(n) = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$V = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar n}$$

$$l(n) = 2\pi r(n) = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{2\pi\hbar}{mV} = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n}{me^2}$$

$$\frac{l}{\lambda_{\text{Б}}} = n$$



35. Фотопроводимость полупроводников. Процессы генерации и рекомбинации носителей заряда.

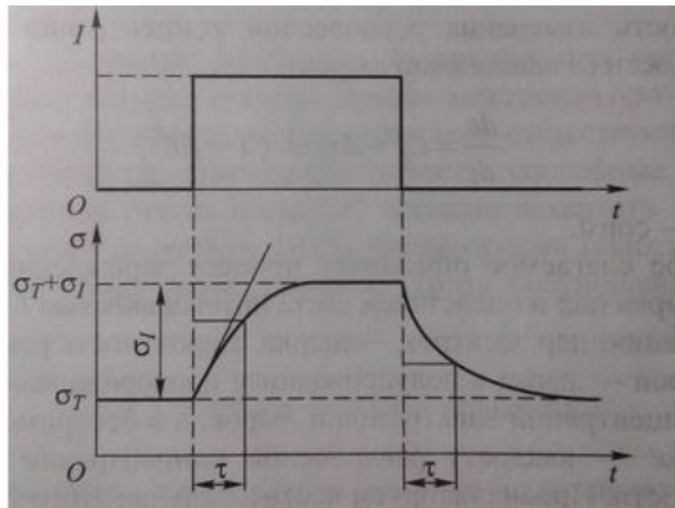
Фотопроводимостью называется явление увеличения проводимости полупроводника под влиянием падающего электромагнитного излучения.

Фотопроводимость полупроводников основана на явлении внутреннего фотоэффекта: электроны выбиваются фотонами внешнего электромагнитного излучения (с энергией больше ширины запрещенной зоны) из валентной зоны, в результате чего происходит генерация пар электрон-дырка.

Как и в случае внешнего фотоэффекта, существует красная граница фотопроводимости – наименьшая частота падающего света, при которой присутствует фотоэффект. Из этой частоты можно легко определить ширину запрещенной зоны как $E = \hbar\omega_k$

Обратным процессом к генерации пар является рекомбинация пар. С этим связано важное понятие – время жизни пары.

При освещении полупроводника, постепенно скорость генерации пар, первоначально превышающая скорость рекомбинации, сравнивается с ней, и устанавливается равновесная концентрация носителей, соответственно, и равновесная проводимость. После выключения



света, проводимость постепенно уменьшится до первоначального вида. Время, за которое добавочная проводимость за счет фотоэффекта уменьшится в e раз, называется средним временем жизни пары.

Функция изменения концентрации во времени имеет вид: $n = n_0 \exp(-t/\tau)$

19. Собственные механический и магнитный моменты электрона. Опыт Штерна и Герлаха.

Атом обладает механическим моментом L , у которого определена величина и проекция на ось, $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$; $L_z = \hbar m$

Так, как движущийся вокруг ядра электрон является заряженной частицей, его орбиту можно рассматривать как некоторый замкнутый контур с током, который можно охарактеризовать орбитальным магнитным моментом p^m

В классической теории $p^m = j\pi r^2 = (ev/2\pi r)(\pi r^2) = evr/2$

Механический и магнитный моменты связаны гиромагнитным соотношением:

$$\frac{p^m}{L} = \frac{e}{2m}$$

Отсюда:

$$p^m = L \frac{e}{2m} = \frac{\hbar e}{2m} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$\mu_B = 0,927 * 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ – магнетон Бора, единица измерения магнитных моментов атомов.

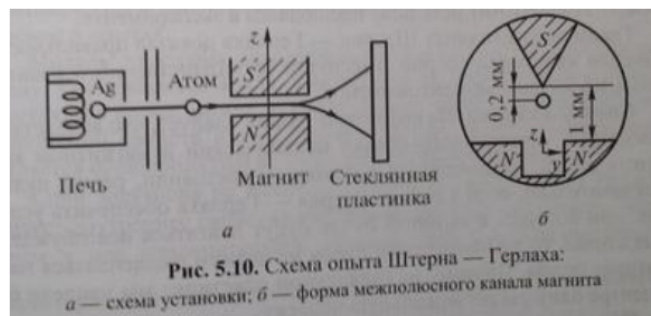
Величина проекции магнитного момента равна:

$$p_z^m = m\mu_B$$

Опыт Штерна и Герлаха.

Помимо квантования энергии в атоме присутствует пространственное квантование – дискретность проекции магнитного момента атома на выбранное направление. В опыте Штерна и Герлаха поток атомов пропускается сквозь полюса магнита с

сильным неоднородным магнитным полем, направленным вдоль оси z , которое за счет особой формы магнита сильно отклоняет пролетающие атомы в зависимости от их магнитного момента. С позиций классической механики магнитные моменты в атомах ориентированы хаотически, и на экране должно появляться сплошное пятно, но по результатам опыта мы наблюдаем серию узких полос, подтверждающих пространственное квантование магнитных моментов атомов.



Билет №30

Кафедра ФН-4 «ФИЗИКА»
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 30
по курсу «Физика» для всех специальностей, семестр 4

1. Стационарные состояния в квантовой механике, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.
2. Примесная проводимость полупроводников. Уровень Ферми примесного полупроводника n- типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника n- типа.
3. На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0 , чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами l ? Решите задачу для электронов в случае $l = 10^{-15}$ м, что соответствует характерному размеру атомных ядер.

Билет рассмотрен и утвержден на заседании кафедры ФН-4

21.05.2020г.
(число, месяц, год)

На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель...

Соотношение неопределенностей: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$. В нашем случае $\Delta x = l$, поэтому $l \Delta p_x \geq \hbar$.

Импульс частицы $p = \langle p \rangle + \Delta p$, где Δp – неопределенность импульса, $\langle p \rangle$ – среднее значение импульса.

Минимальное значение импульса равно его неопределенности: $l \Delta p_x = l \cdot p_{\min} \approx \hbar$.

$$\begin{aligned}(E_{\kappa} + mc^2)^2 &= m^2 c^4 + c^2 p^2 \\ E_{\kappa}^2 + 2mc^2 E_{\kappa} &= c^2 p^2 \\ p &= \frac{1}{c} \sqrt{E_{\kappa} (E_{\kappa} + 2m_0 c^2)} \\ p_{\min} &= \frac{1}{c} \sqrt{E_{\kappa_{\min}} (E_{\kappa_{\min}} + 2m_0 c^2)} \\ \frac{l}{c} \sqrt{E_{\kappa_{\min}} (E_{\kappa_{\min}} + 2m_0 c^2)} &= \frac{\hbar}{2} \\ E_{\kappa_{\min}}^2 + 2m_0 c^2 E_{\kappa_{\min}} - \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2 &= 0\end{aligned}$$

Решая это уравнение, получаем: $E_{\kappa_{\min}} = -m_0 c^2 \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2}$. Так как отрицательный

корень физического смысла не имеет, то: $E_{\kappa_{\min}} = -m_0 c^2 + c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\frac{\hbar}{2l}\right)^2}$.

9. Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Стационарные состояния.

Состояния частицы, для которых значение энергии определено однозначно, называются *стационарными состояниями*.

Замечание. Из принципа неопределённости для времени и энергии $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ следует, что если неопределённость энергии в каком-то состоянии стремится к нулю $\Delta E \rightarrow 0$, то время пребывания системы в этом состоянии должно быть бесконечно большим. В этом смысле состояние называется *стационарным*.

Как будет установлено далее (в теории операторов), волновая функции частицы в стационарном состоянии со значением энергии E принимает особый вид

$$\Psi = \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t},$$

где функция «пси малая» ψ зависит только от координат частицы, но не зависит от времени, поэтому её иногда называют *координатной частью волновой функции стационарного состояния*.

В стационарном состоянии плотность вероятности *не зависит от времени*. Действительно, плотность вероятности равна квадрату модуля волновой функции

$$|\Psi|^2 = \left| \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right|^2 = |\psi|^2 \cdot \left| e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right|^2 = |\psi|^2.$$

Следовательно, для стационарного состояния уравнение непрерывности для вероятности примет вид:

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = 0.$$

Соответственно, вектор плотности вероятности для стационарного состояния

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \cdot \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \cdot \operatorname{grad} \psi).$$

Уравнение Шрёдингера для стационарного состояния.

Необходимым условием стационарности состояния является независимость от времени функции U , т.е. в стационарном состоянии эта функция однозначно трактуется как потенциальная энергия. В этом случае, подставим во временное уравнение Шрёдингера $\Psi = \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \left(\psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right) + U \cdot \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \\ i\hbar \psi \left(-i\frac{E}{\hbar} \right) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \Delta \psi + U \cdot \psi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \end{aligned}$$

Т.к. $e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \neq 0$, то можно сократить $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$: $E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \cdot \psi$. После преобразований получаем уравнение

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \cdot \psi = 0$$

которое носит название *уравнение Шрёдингера для стационарного состояния*.

33. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводниках n-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника n-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника n-типа.

Примесная проводимость полупроводников.

Некоторые примеси даже в малых концентрациях очень сильно изменяют проводимость полупроводника. Такие примеси приводят либо к появлению:

- Избыточного количества свободных электронов – примеси, которые отдают электроны – **донорные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией свободных электронов, называются полупроводниками **n-типа**.
- Избыточного количества дырок – **примеси, забирающие свободные электроны – акцепторные примеси**. Полупроводники с повышенной концентрацией дырок называются полупроводниками **p-типа**.

Донорные полупроводники получают, путем добавления в полупроводник элементов, от которых легко отрывается электрон. К примеру, добавляя к 4 валентному кремнию 5-валентный мышьяк, мышьяк использует свои четыре валентных электрона для создания валентных связей с кристаллической решеткой кремния, а один электрон останется «лишним».

Энергия ионизации «лишнего» электрона крайне мала, и составляет порядка 0,01эВ. Он легко отрывается от своего атома и становится свободным электроном. Как и в случае беспримесного проводника, происходят процессы генерации пар электрон-дырка, но их вклад в общую проводимость значительно меньше при комнатной температуре.

Согласно зонной теории, это приведет к появлению дополнительных донорных уровней вблизи нижней границы зоны проводимости. Электрону для перехода в зону проводимости нужно значительно меньше энергии (энергия активации донорной примеси $E_{дон}$), чем для перехода их валентной зоны (эта энергия соответствует ширине запрещенной зоны).

С ростом температуры энергия Ферми, которая при низкой температуре находится посередине между донорным уровнем и зоной проводимости, из-за «истощения» донорных уровней, а также из-за активной генерации пар электрон-дырка возвращается в середину запрещенной зоны.

