Условие задачи

Для линейной системы с отрицательной обратной связью заданы передаточные функции звеньев для схемы №2

$$W_1(s) = \frac{40}{5s+1}, \qquad W_2(s) = \frac{0.5}{0.16s^2 + 0.8s + 1}.$$

Решение

1. Разомкнутый контур

Разомкнутая (петлевая) передаточная функция — произведение $W_1(s)$ и $W_2(s)$:

$$W_p(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{40}{5s+1}\,\frac{0.5}{0.16s^2+0.8s+1} = \frac{20}{(5s+1)\big(0.16s^2+0.8s+1\big)}.$$

Перемножая знаменатели и упорядочивая степени s,

$$(5s+1)\big(0.16s^2+0.8s+1\big) = 0.8s^3 + 4.16s^2 + 5.8s + 1.$$

Делим числитель и знаменатель на 0.8 для нормализации старшего коэффициента:

$$W_p(s) = \boxed{\frac{25}{s^3 + 5.2s^2 + 7.25s + 1.25}}.$$

2. Замкнутый контур

Для структуры с отрицательной обратной связью

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_p(s)}.$$

Подставим $W_1(s)$ и найденный $W_p(s)$:

$$\Phi(s) = \frac{\dfrac{40}{5s+1}}{1 + \dfrac{25}{s^3+5.2s^2+7.25s+1.25}} = \frac{40\big(s^3+5.2s^2+7.25s+1.25\big)}{(5s+1)\big(s^3+5.2s^2+7.25s+26.25\big)}.$$

Раскрывая скобки и группируя коэффициенты, получаем

$$\Phi(s) = \frac{32s^3 + 166.4s^2 + 232s + 40}{4s^4 + 21.6s^3 + 33.16s^2 + 110.8s + 21}.$$

Нормируем (делим обе части на 4), чтобы коэффициент при s^4 в знаменателе был равен 1:

$$\boxed{\Phi(s) = \frac{8s^3 + 41.6s^2 + 58s + 10}{s^4 + 5.4s^3 + 8.29s^2 + 27.7s + 5.25}}.$$

Полученные выражения пригодны для дальнейшего анализа устойчивости, синтеза регуляторов или построения частотных характеристик.

Анализ устойчивости по критерию Гурвица

Характеристический многочлен замкнутой системы (знаменатель найденной передаточной функции)

$$D(s) = s^4 + 5.4\,s^3 + 8.29\,s^2 + 27.7\,s + 5.25.$$

Матрица Гурвица. Для полинома четвёртого порядка $D(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$ с коэффициентами

$$a_0 = 1,\ a_1 = 5.4,\ a_2 = 8.29,\ a_3 = 27.7,\ a_4 = 5.25,$$

матрица Гурвица имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.4 & 27.7 & 0 & 0 \\ 1 & 8.29 & 5.25 & 0 \\ 0 & 5.4 & 27.7 & 0 \\ 0 & 1 & 8.29 & 5.25 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры. Критерий Гурвица требует, чтобы все главные угловые миноры $\Delta_k = \det H_k$ (первые $k \times k$ подматрицы) были положительны.

$$\Delta_1 = \det\big(5.4\big) = 5.4 > 0,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 5.4 & 27.7 \\ 1 & 8.29 \end{pmatrix} = 17.066 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 5.4 & 27.7 & 0 \\ 1 & 8.29 & 5.25 \\ 0 & 5.4 & 27.7 \end{pmatrix} = 319.6382 > 0,$$

$$\Delta_4 = \det H = 1678.10055 > 0.$$

Вывод. Все главные миноры положительны, следовательно, полином $D(s)$ удовлетворяет критерию Гурвица, а значит,

$$\boxed{\text{замкнутая система асимптотически устойчива.}}$$

Анализ устойчивости по критерию Михайлова

Характеристический многочлен замкнутой системы

$$D(s) = s^4 + 5.4\,s^3 + 8.29\,s^2 + 27.7\,s + 5.25$$

рассматриваем на мнимой оси: $s = j\omega$ ($\omega \ge 0$).

Разделим на вещественную и мнимую части.

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= (j\omega)^4 + 5.4\,(j\omega)^3 + 8.29\,(j\omega)^2 + 27.7\,(j\omega) + 5.25 \\ &= \big(\omega^4 - 8.29\,\omega^2 + 5.25\big) + j\big(-5.4\,\omega^3 + 27.7\,\omega\big) \\ &= P(\omega) + j\,Q(\omega), \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(\omega) = \omega^4 - 8.29\,\omega^2 + 5.25, \\ &Q(\omega) = \omega\big(-5.4\,\omega^2 + 27.7\big). \end{aligned}}$$

Нули $P(\omega)$ и $Q(\omega)$.

$$Q(\omega) = 0 \implies \omega = 0,\ \omega^2 = \tfrac{27.7}{5.4} \approx 5.130 \implies \omega_Q = 2.266;$$

$$P(\omega) = 0 \implies \omega_{1,2}^2 = \frac{8.29 \pm \sqrt{8.29^2 - 4 \cdot 5.25}}{2} = \{0.6905,\ 7.5995\},$$
$$\omega_{P1} = 0.831,\ \omega_{P2} = 2.756.$$

Знаки P и Q между узловыми точками.

Интервал по ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
(0, 0.831)	$+$	$+$
(0.831, 2.266)	$-$	$+$
(2.266, 2.756)	$-$	$-$
(2.756, ∞)	$+$	$-$

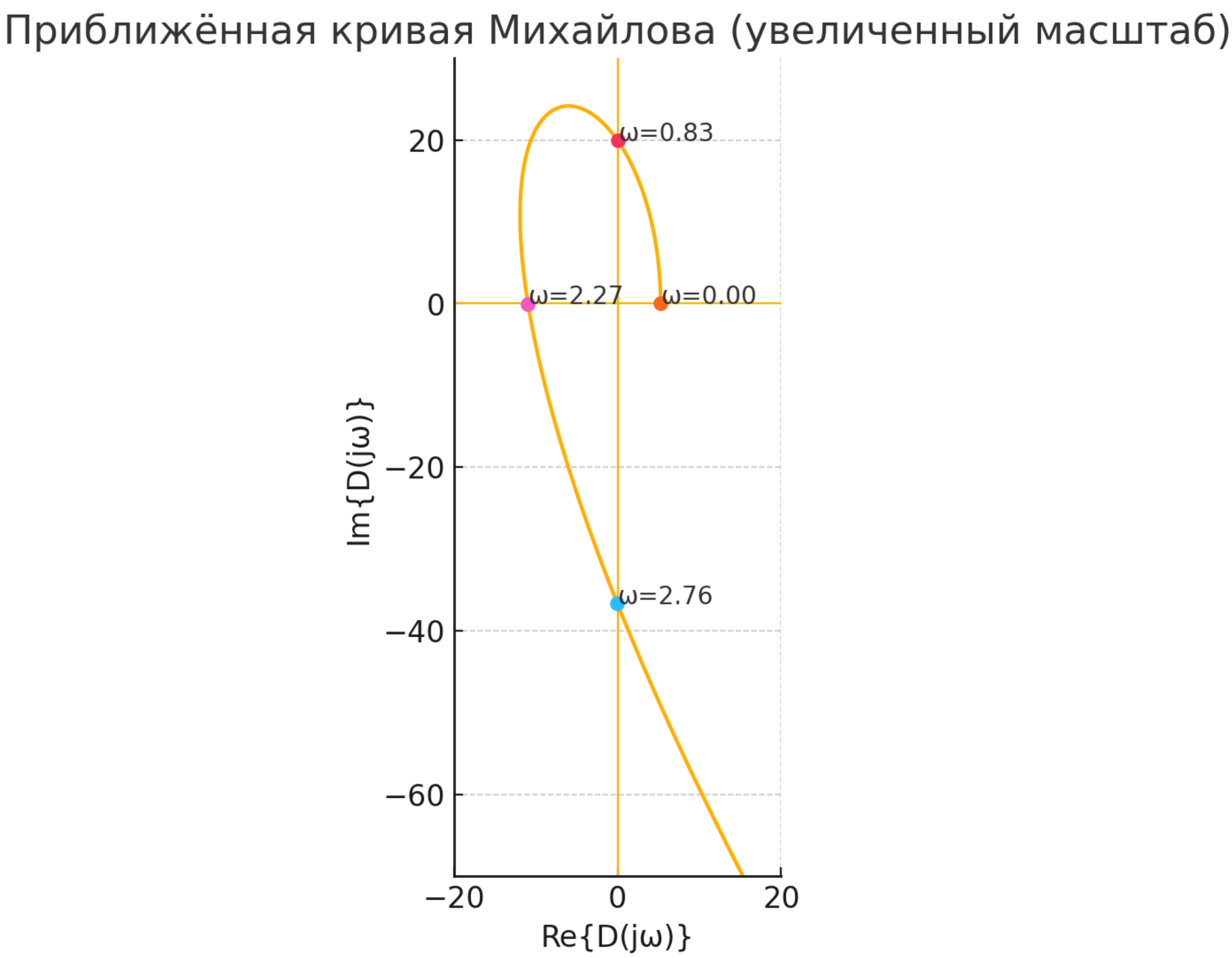

Рис. 1: Кривая Михайлова для характеристического многочлена $D(s) = s^4 + 5.4s^3 + 8.29s^2 + 27.7s + 5.25$.

Траектория $D(j\omega)$ (кривая Михайлова). При $\omega = 0$: $D(j0) = 5.25$ — точка на положительной действительной оси (аргумент 0^+).

1. ω растёт до $\omega_{P1} = 0.831$ P меняет знак $+ \to -$ (пересечение мнимой оси вниз), аргумент убывает на $\frac{\pi}{2}$.
2. До $\omega_Q = 2.266$ $Q > 0$, затем Q меняет знак $+ \to -$ (пересечение действительной оси), ещё $-\frac{\pi}{2}$.
3. В точке $\omega_{P2} = 2.756$ P меняет знак $- \to +$ (ещё одно пересечение мнимой оси вниз), ещё $-\frac{\pi}{2}$.
4. При $\omega \to \infty$: $P \to +\infty$, $Q \to -\infty$, вектор приближается к положительной действительной оси снизу (аргумент 0^-). Последняя потеря аргумента ещё на $-\frac{\pi}{2}$.

Суммарное изменение аргумента:

$$\Delta \arg D(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega\to\infty} = -4 \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi,$$

что и должно быть для полинома четвёртого порядка с положительным старшим коэффициентом.

Вывод. Кривая Михайлова проходит через все четыре квадранта, совершая полный поворот на -2π по часовой стрелке, следовательно

$$\boxed{\text{система удовлетворяет критерию Михайлова и устойчива.}}$$

Анализ устойчивости по критерию Найквиста–Михайлова

Разомкнутая функция. Для Найквист-анализа используем разомкнутую передаточную функцию

$$W_p(s) = \frac{25}{s^3 + 5.2s^2 + 7.25s + 1.25}.$$

Подстановка $s = j\omega$.

$$\begin{aligned} W_p(j\omega) &= \frac{25}{(j\omega)^3 + 5.2\,(j\omega)^2 + 7.25\,(j\omega) + 1.25} \\ &= \frac{25}{\bigl(1.25 - 5.2\omega^2\bigr) + j\bigl(\omega^3 + 7.25\,\omega\bigr)}. \end{aligned}$$

Разделим на действительную и мнимую части

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re} W_p(j\omega) &= \frac{25\bigl(1.25 - 5.2\omega^2\bigr)}{\bigl(1.25 - 5.2\omega^2\bigr)^2 + \bigl(\omega^3 + 7.25\omega\bigr)^2}, \\ \operatorname{Im} W_p(j\omega) &= -\frac{25\bigl(\omega^3 + 7.25\omega\bigr)}{\bigl(1.25 - 5.2\omega^2\bigr)^2 + \bigl(\omega^3 + 7.25\omega\bigr)^2}. \end{aligned}}$$

Ключевые точки траектории.

ω (рад/с)	$W_p(j\omega) = \mathrm{Re} + j\ \mathrm{Im}$	Замечание
0	$20 + 0j$	старт на $+\mathrm{Re}$
1.06	$-1.81 - 2.56j$	минимум Re (левее -1)
2.70	$-0.68 + 0j$	точка близка к пересечению действительной оси
$\omega \to \infty$	$0^- + 0^- j$	асимптота к началу координат

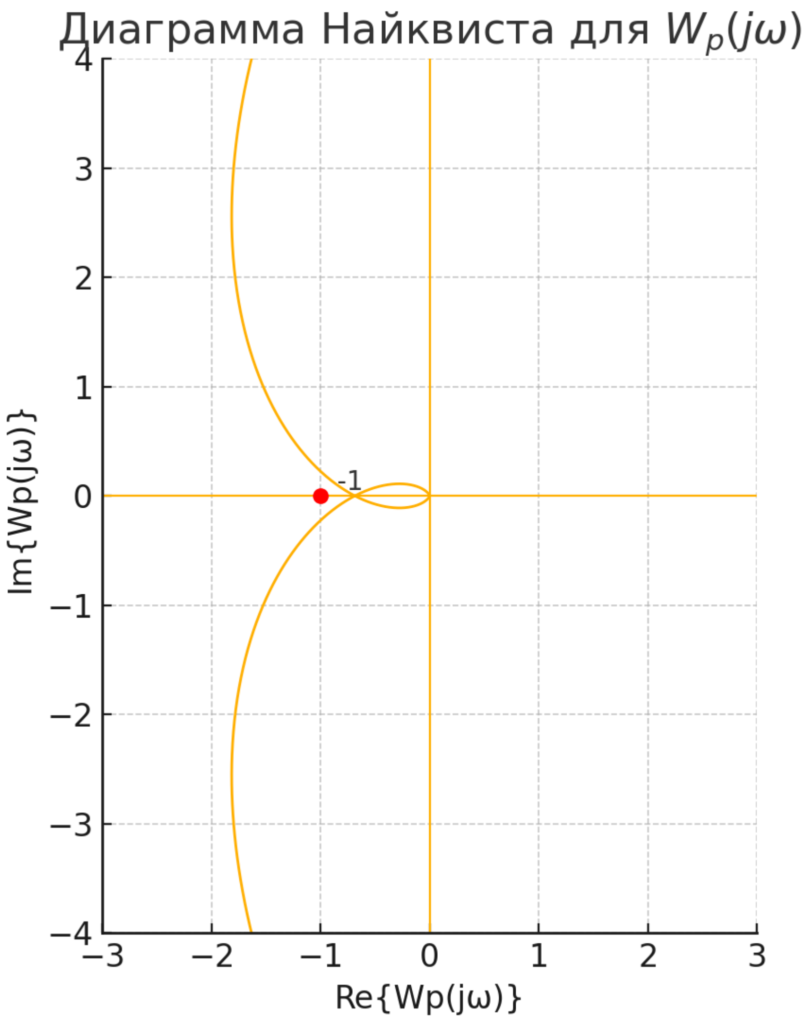

Рис. 2: Участок диаграммы Найквиста для $W_p(j\omega)$ (красная точка — $-1+0j$).

Кривая Найквиста для $W_p(j\omega)$ проходит *правее* критической точки и не охватывает её, поэтому система считается устойчивой.

$$\boxed{\text{Система удовлетворяет критерию Найквиста–Михайлова и устойчива.}}$$

Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам (ЛЧХ)

Передаточная функция разомкнутого контура (результат предыдущих вычислений)

$$W_p(s) = \frac{25}{s^3 + 5.2s^2 + 7.25s + 1.25}.$$