
Р. Изерман

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Перевод с английского

кандидатов техн. наук С. П. ЗАБРОДИНА,
А. И. ТИТКОВА, А. В. ШАЛАШОВА

под редакцией чл.-корр. АН СССР
И. М. МАКАРОВА

Изерман Р.

И 36 Цифровые системы управления: Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 541 с., ил.

В труде специалиста из ФРГ рассмотрены современные методы расчета и проектирования цифровых систем управления с детерминированными и случайными возмущениями. Значительное внимание уделено теории многосвязных и адаптивных систем управления.

Для специалистов в области автоматического управления и вычислительной техники, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

И $\frac{1502000000-108}{041(01)-84}$ 4-84, ч. 1

ББК 32.965.9
6Ф6.5

Редакция литературы по новой технике

Интенсивное развитие современных средств вычислительной техники привело к широкому распространению цифровых систем управления, которые в настоящее время используются в различных отраслях промышленности. Внедрению цифровых систем управления в значительной степени способствовало создание микропроцессоров и построенных на их основе микро-ЭВМ. Методы проектирования подобных систем существенно отличаются от классических методов, применяемых при анализе и расчете систем непрерывного типа. Во-первых, это связано с тем, что основой математического аппарата проектирования цифровых систем являются разностные схемы, которые заменяют дифференциальные уравнения, описывающие непрерывные системы. Соответственно методы, связанные с использованием обычного преобразования Лапласа, заменяются различными формами z -преобразования. Во-вторых, алгоритмы, применяемые при расчете цифровых систем, в частности построение дискретных моделей, зачастую могут быть реализованы только с помощью ЭВМ.

Предлагаемая вниманию читателя книга известного ученого Р. Изермана посвящена методам проектирования цифровых систем управления, обладающих высокими показателями качества. Основное внимание автор уделяет методам синтеза систем во временной области с использованием метода пространства состояний. Преимущество данного подхода заключается в том, что алгоритмы синтеза могут быть наиболее просто реализованы на ЭВМ.

Книга состоит из тридцати глав, объединенных в семь разделов, и приложения. В первом разделе приводятся основные понятия и определения теории цифровых систем, а также способы их описания с помощью z - и w -преобразований, получивших широкое практическое применение. Здесь автор исследует методы преобразования непрерывных сигналов в цифровую форму и их воспроизведение с помощью экстраполяторов различных типов. Анализируются ошибки, связанные с квантованием сигналов по времени и по уровню. На основе этих представлений строятся модели цифровых систем в пространстве состояний. В конце раздела излагаются основные положения теории устойчивости. Приводимые алгебраические и частотные критерии устойчивости удобны для выполнения расчетов на ЭВМ.

Второй раздел посвящен синтезу цифровых систем управления при детерминированных воздействиях. Описываются основные типы непрерывных регуляторов и способы их реализации на управляющих ЭВМ с помощью схем непосредственного, последовательного и параллельного программирования. При этом осуществляется оптимизация параметров полученных цифровых регуляторов. Особый интерес для проектировщиков представляет методика построения цифровых регуляторов, обеспечивающих сокращение нулей и полюсов в неизменяемой части системы. Это упрощает процесс проектирования систем высоких порядков, описываемых сложными передаточными функциями. Определенный интерес также представляют методы расчета регуляторов, в которых для получения заданных показателей качества используется информация по всем переменным состояниям или лишь по части состояний, когда остальные воспроизводятся с помощью наблюдателей различных типов. Достаточно подробно в разделе освещены вопросы синтеза регуляторов, обеспечивающих конечное время установления переходных процессов в системе управления. Большое значение имеют описываемые автором способы оценки чувствительности системы к изменению собственных параметров объекта управления, которые необходимы при выборе рабочих алгоритмов управляющей ЭВМ.

В третьем разделе рассматриваются стохастические цифровые системы управ-

ления. Предлагаемый автором подход к построению систем со случайными воздействиями базируется на математическом аппарате дискретных марковских процессов. Подробно исследуются методы расчета цифровых регуляторов по квадратичному критерию качества для объектов с различными передаточными функциями, в том числе и с запаздыванием. Значительное внимание автор уделяет способам решения задач оптимизации, приводящим к матричным уравнениям Риккати. В конце раздела рассматривается проблема оценивания состояний объекта, которые формируются с помощью фильтра Калмана. Можно отметить, что все методы, излагаемые в этом разделе, имеют конкретное практическое значение.

В четвертом разделе изложены методы синтеза многоконтурных систем управления. Для повышения качества их работы вводятся дополнительные регуляторы в цепи прямой и обратной связи. Такие системы являются работоспособными лишь при наличии измерений внутренних координат объекта или действующих извне возмущений. Для выбора параметров подобных регуляторов используются методы синтеза, описанные в предыдущих разделах, что представляет определенный интерес для проектировщиков. Автор сравнивает различные схемы построения регуляторов, приведенных в данном разделе.

Пятый раздел содержит синтез многомерных систем управления с учетом взаимных связей между отдельными частями системы. Учитывая сложность проектирования систем подобного рода, автор рекомендует применять методы декомпозиции, не приводящей к нарушению качества функционирования системы. Для этих целей предлагается вводить дополнительный цифровой регулятор, что является наиболее простым способом развязывания каналов многомерных систем. Не оставлено без внимания и представление многомерных систем в виде матричных полиномиальных уравнений, которые справедливы при одинаковом числе входов и выходов. Рассматриваются также методы синтеза алгоритмов управления таких систем, позволяющие получать высокие показатели качества управления.

Много внимания в книге автор уделяет адаптивным системам. Им полностью посвящен шестой раздел. Как и обычно, данный раздел начинается с изложения теории оценивания параметров в условиях нормальной эксплуатации системы. Для этого рекомендуется применять следующие методы: наименьших квадратов, вспомогательных переменных и максимума правдоподобия. Автор показывает, что ввиду малой скорости сходимости и низкой точности получаемых оценок применять метод стохастической аппроксимации в адаптивных системах нецелесообразно. Следует отметить, что все указанные методы исследованы при наличии шумов. Особенностью этого раздела является значительное число примеров построения адаптивных систем управления с замкнутыми и разомкнутыми контурами самонастройки.

Седьмой раздел посвящен техническим средствам, используемым в цифровых системах управления: аналого-цифровым и цифро-аналоговым преобразователям, датчикам, цифровым фильтрам для подавления шумов, исполнительным устройствам. Здесь также обсуждаются принципы автоматизации проектирования цифровых систем и состав пакетов прикладных программ. В заключение раздела приведены конкретные примеры проектирования систем цифрового управления технологическими объектами различных классов.

К большим достоинствам книги можно отнести последовательность изложения материала — от основных теоретических положений до конкретной реализации методов проектирования сложных цифровых систем. Теоретические результаты подкрепляются данными математического моделирования. Используя материалы этой книги, можно вести не только расчетно-теоретическую проработку цифровых систем управления, но и осуществлять их практическую реализацию.

Книга рассчитана на научных сотрудников и инженеров, занимающихся проектированием, доводкой и испытаниями цифровых систем управления. Ее также можно рекомендовать аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в области автоматического управления и вычислительной техники. Перевод книги выполнен канд. техн. наук С. П. Забродиным (главы 1, 4—11, 16—21), канд. техн. наук А. И. Титковым (главы 25, 28—30) и канд. техн. наук А. В. Шалашовым (Введение, главы 2, 3, 12—15, 22—24, 26, 27).

Стремительное совершенствование технологии производства интегральных полупроводниковых компонентов, обеспечившее возможность создания высокоэкономичных цифровых устройств обработки и хранения информации, а также появление эффективных средств программирования оказывают все более существенное влияние не только на развитие техники измерений и управления, но и на подход к автоматизации вообще. Первые попытки применения цифровых устройств для автоматизации производственных процессов относятся к началу 60-х гг., когда были разработаны первые управляющие вычислительные машины. В 70-х гг. ЭВМ, непосредственно связанная с объектом в составе замкнутого или разомкнутого контура управления, стала обычным элементом оборудования автоматизированных систем. В последнее десятилетие ежегодный прирост числа ЭВМ, используемых в подобных системах, составлял от 20 до 30%. При этом обнаружилась тенденция к снижению стоимости аппаратуры и увеличению относительных затрат на прикладное программное обеспечение.

Для начального этапа внедрения цифровых систем управления в сфере автоматизации производственных процессов было характерно стремление к максимальной централизации задач, решаемых на одной и лишь в отдельных случаях на нескольких управляющих ЭВМ. Однако такой подход далеко не всегда позволял реализовать все преимущества цифровой обработки сигналов и получить ощутимый экономический эффект от использования цифровой техники. Последнее в значительной степени объясняется тем, что для обеспечения надежного функционирования систем при отказах центральной ЭВМ в параллель к ней приходилось ставить вспомогательные цифровые или аналоговые вычислители.

Положение изменилось после того, как в 1971 г. был начат серийный выпуск микропроцессоров. На базе этих новых элементов, а также модулей ввода/вывода и полупроводниковых запоминающих устройств на больших интегральных схемах были созданы управляющие микро-ЭВМ, обладающие высокими экономическими характеристиками. От более мощных универсальных машин такие ЭВМ отличаются простота адаптации их аппаратного и программного обеспечения к решению специальных, достаточно узких прикладных задач. В то же время следует отметить, что пока микропроцессоры, как правило, уступают большим ЭВМ в разрядности и быстродействии. Они имеют менее обширные системы команд и оснащаются несложными операционными системами. Постоянное расширение сферы применения микропроцессоров обуславливает быстрый рост их выпуска и, соответственно, снижение стоимости производства.

На основе управляющих микро-ЭВМ в настоящее время строятся децентрализованные автоматизированные системы. Задачи, которые до сих пор возлагались на одну центральную ЭВМ, теперь распределяются по нескольким специализированным микровычислителям. Последние обмениваются информацией через общие шины или закольцованные линии связи, которые в свою очередь подключаются к более мощным управляющим ЭВМ. Таким образом могут формироваться разнообразные многоуровневые системы, структуры которых выбираются исходя из особенностей объектов управления. Децентрализация позволяет снизить требования к быстродействию отдельных вычислителей, рассредоточить и упростить прикладное программное обеспечение, повысить стойкость к отказам и тем самым устранить основные недостатки, свойственные системам с центральными ЭВМ. Кроме того, децентрализованные системы можно вводить в эксплуатацию по частям; в них могут использоваться общие резервные блоки (отсюда — еще более высокая надежность), они обеспечивают некоторую экономию в соединительных линиях и т. д.

Итак, можно констатировать, что текущий этап развития методов цифровой обработки сигналов характеризуется переходом к децентрализованным системам.

Однако сфера применения микро-ЭВМ не ограничивается только децентрализованными автоматизированными системами. Они все более широко используются в качестве автономных вычислителей в различных измерительных и управляющих устройствах. Начиная с 1975 г. в промышленность стали поступать цифровые регуляторы и программируемые системы управления. Один цифровой регулятор, как правило, может выполнять функции нескольких аналоговых. Обычно на его входе ставится аналого-цифровой преобразователь, поскольку пока в основном применяются датчики, усилители и линии связи аналогового типа. Для того чтобы регулятор мог приводить в действие исполнительные устройства с аналоговым входом, он снабжается выходным цифро-аналоговым преобразователем. Вероятно, в будущем будет освоен выпуск оцифрованных датчиков и исполнительных устройств. Это позволит не только обойтись без аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей, но и устранить ряд источников помех, а также даст возможность осуществлять предварительную обработку сигналов в цифровых измерительных устройствах (например, с целью выбора наилучшего диапазона измерений, компенсации нелинейностей, автоматического выявления неисправностей и т. д.). Что же касается исполнительных устройств с цифровым входом, то уже сейчас выпускаются, например, шаговые электроприводы.

Цифровые регуляторы не только заменяют по несколько аналоговых, но они могут реализовать также дополнительные функции, выполнявшиеся ранее другими устройствами, или совершенно новые функции. Упомянутые дополнительные функции включают, в частности, программируемую проверку номинальных режимов, автоматический переход к обработке различных управляемых и регулируемых переменных, подстройку параметров регулятора, осуществляемую по разомкнутому циклу в соответствии с текущим режимом работы системы, контроль предельных значений сигналов и т. п. Можно привести и примеры новых функций — это обмен информацией с другими регуляторами, взаимное резервирование, автоматическая диагностика и поиск неисправностей, выбор требуемых управляющих алгоритмов, и в первую очередь реализация адаптивных законов управления. На основе цифровых регуляторов могут быть построены системы управления любых типов, включая системы с последовательным управлением, многомерные системы с перекрестными связями, системы с прямыми связями. При этом программное обеспечение подобных систем можно без труда корректировать как в предпусковой период, так и в процессе их эксплуатации. Немаловажно и то, что цифровые регуляторы позволяют изменять их параметры в весьма широких диапазонах и способны работать с практически любыми тактами квантования. Таким образом, все вышесказанное позволяет утверждать, что цифровая измерительная и управляющая техника со временем получит самое широкое распространение и в значительной степени вытеснит традиционную аналоговую технику.

Отметим некоторые особенности систем с управляющими ЭВМ обычного типа или с микро-ЭВМ, отличающие их от аналоговых систем:

— законы управления с прямыми или обратными связями реализуются в форме алгоритмов, запрограммированных с помощью аппаратных или программных средств;

— обрабатываются квантованные (дискретные во времени) сигналы;

— сигналы могут принимать только определенные дискретные значения вследствие квантования по амплитуде в аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователях и в центральном процессоре.

Благодаря гибкости средств программного обеспечения при построении управляющих алгоритмов возможности проектировщика не ограничиваются только выбором между стандартными звеньями П-, И- или Д-типов, как в случае аналоговых систем. Он может применять и более сложные алгоритмы, основанные на современных методах теории дискретных систем, использующих различные математические модели объектов управления. К настоящему времени опубликован целый ряд работ, посвященных теоретическому анализу и синтезу линейных дискретных систем, описываемых скалярными и векторными разностными уравнениями.

ми или с использованием аппарата z-преобразования. Однако до сих пор не издано книги, в которой содержался бы всесторонний обзор и сравнение существующих методов цифрового управления, представленных в форме, которая позволяла бы непосредственно воспользоваться ими при разработке управляющих алгоритмов для объектов различных классов. Наряду с другими проблемами проектировщика интересуют такие вопросы, как выбор способа описания объекта управления и степень адекватности его математической модели, вычислительная трудоемкость методов проектирования, свойства получаемых алгоритмов, в том числе соотношение между качеством процессов и затратами на управление, вариации характеристик алгоритмов при переходе от объекта к объекту и при наличии разного рода возмущений, чувствительность к изменениям динамики объектов. Большой интерес представляет также сравнительное исследование цифровых и непрерывных систем с целью анализа эффектов, вносимых квантованием сигналов во времени и по уровню.

Настоящая книга адресована инженерам, работающим в промышленности и в исследовательских организациях, а также студентам технических специальностей, которые освоили методы проектирования непрерывных линейных систем управления и хотели бы ознакомиться с основами теории цифровых систем и вопросами их практической реализации. Конечно, желательно, чтобы читатель располагал определенными сведениями в линейных дискретных системах, однако он может почерпнуть их из гл. 3, которая содержит краткое введение в теорию цифровой обработки сигналов и где приводятся базовые математические соотношения, необходимые в инженерной практике. Этот математический аппарат послужил основой для создания и дальнейшего развития эффективных методов проектирования дискретных систем управления.

Значительная часть книги посвящена описанию управляющих алгоритмов с параметрической оптимизацией, с компенсацией нулей и полюсов и конечным временем установления переходных процессов, синтез которых осуществляется в рамках классических методов, а также алгоритмов управления по состоянию и алгоритмов с минимальной дисперсией, полученных с помощью современных методов, основанных на представлении систем в пространстве состояний и использующих параметрические стохастические модели сигналов и объектов управления. С целью демонстрации свойств различных алгоритмов в цепях прямых и обратных связей замкнутых контуров управления проводилось их математическое моделирование на универсальных ЭВМ. Кроме того, многие алгоритмы были реализованы на управляющих ЭВМ, оснащенных пакетами прикладных программ. Работоспособность этих алгоритмов оценивалась по результатам практических экспериментов, в которых к управляющим ЭВМ подключались аналоговые модели, а также тестовые и реальные технологические объекты.

Большое место в книге уделено алгоритмам параметрической идентификации, методам построения самооптимизирующихся цифровых адаптивных систем управления и вопросам их практического применения. Рассмотрены также некоторые проблемы реализации цифровых систем, в том числе фильтрации помех и учета характеристик исполнительных устройств. Читатель может сделать вывод, что в большинстве случаев синтез дискретных систем не отличается особой сложностью, если в распоряжении проектировщика имеются математические модели объектов управления, причем для построения моделей и расчета управляющих алгоритмов целесообразно использовать те же цифровые вычислители. Следует отметить, что разностные уравнения, описывающие функционирование дискретных систем, значительно проще с точки зрения их анализа и программной реализации, нежели дифференциальные уравнения, применяемые для описания непрерывных систем.

Книга построена таким образом, что при первоначальном ее чтении некоторые главы могут быть пропущены. Это потребовало введения многочисленных ссылок на материал, содержащийся в предшествующих и последующих главах, а также некоторых повторений.

Многие из представленных в книге методов, теоретических выкладок и экспериментальных результатов были получены в ходе научно-исследовательских работ

по проекту «Prozesslenkung mit DV-Anlagen»¹⁾, финансируемому федеральным министерством исследований и технологии ФРГ, а также опытных проектов, субсидировавшихся фондом общих поисковых исследований ФРГ.

Автор хотел бы высказать признательность своим коллегам, в течение нескольких лет принимавшим деятельное участие в проведении указанных работ, за их помощь в подготовке примеров, создании пакетов прикладных программ, математическом и полунатурном моделировании, практических экспериментах с объектами управления различных типов и, наконец, в сверке текста книги.

Первое издание книги вышло в 1977 г. на немецком языке под названием «Digitale Regelsysteme»²⁾. Настоящая книга представляет собой английский перевод первого издания, дополненного рядом материалов. Для того чтобы читатель мог подробнее ознакомиться с математическими основами теории линейных дискретных систем, была расширена гл. 3. Обзор многосвязных систем управления дополнен разд. 18.1.5, гл. 20 (матричные полиномы), а также разд. с 21.2 по 21.4 (управление состоянием). В то же время содержимое гл. 21 и 22 было перенесено в гл. 27 и 15 соответственно. В результате номера всех глав, начиная с 22-й, стали на единицу меньше, чем в первом издании. Был добавлен разд. 23.8, в котором излагаются некоторые новейшие рекуррентные методы параметрической идентификации. Существенно расширена и переработана с учетом последних достижений в области адаптивного управления гл. 25. Кроме того, заново написана гл. 30, содержащая примеры практической реализации цифровых систем.

Я хотел бы выразить свою признательность сотрудникам издательства «Шпрингер-Ферлаг», оказавшим большую помощь в подготовке английского перевода книги. Наконец, я хотел бы особо поблагодарить г-жу Дж. Контаг, превосходно отпечатывающую текст всей книги.

Дармштадт, сентябрь 1980 г.

Рольф Изерман

¹⁾ Применение цифровой техники для управления объектами (перев. с нем.).

²⁾ Цифровые системы управления (перев. с нем.).

Введение

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УПРАВЛЕНИЯ

В обобщенной структуре управления технологическими объектами можно выделить несколько уровней (рис. 1.1).

На первом уровне осуществляется непосредственное управление объектом по реально измеряемым координатам y с помощью регуляторов с прямой или обратной связью. Сигнал задающей переменной при этом либо является постоянным, либо формируется на

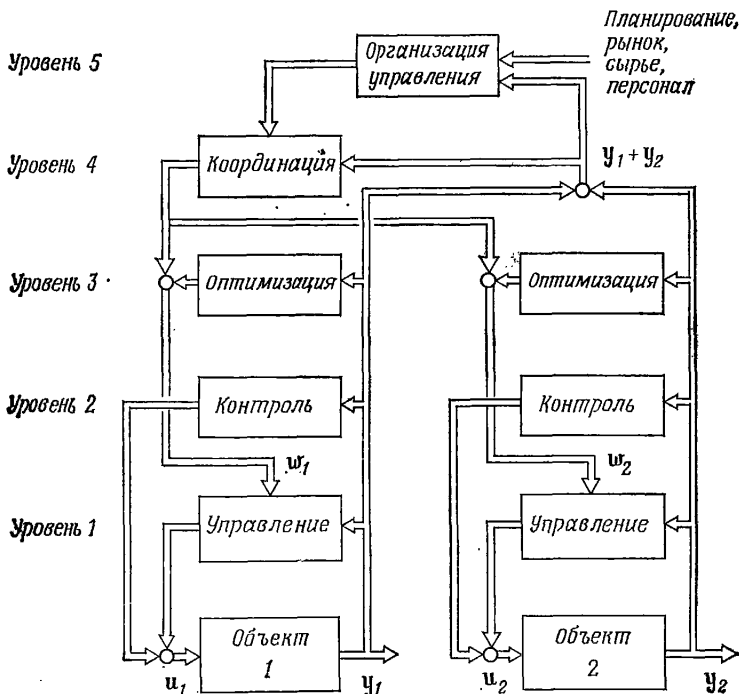


Рис. 1.1. Многоуровневая структура управления.

одном из более высоких уровней управления. Если управление ведется по более чем одной регулируемой переменной, оно называется многомерным. Автоматическое управление началом и окончанием цикла работы объекта управления также относится к первому уровню.

Второй уровень объединяет операции контроля за объектом управления. Здесь осуществляется наблюдение за определенными

характеристиками объекта, например фиксируется превышение контролируемыми переменными заданных предельно допустимых значений. При контроле можно ограничиться оценкой текущего поведения переменных объекта или же учитывать их предсказываемые (будущие) значения. Информация, полученная на этом уровне управления, используется для предупреждения обслуживающего объект персонала о возможности возникновения аварийной ситуации. Автоматически предпринимаемые при этом действия для устранения возмущений или остановки процесса называют аварийным управлением.

К *третьему уровню* можно отнести выполнение процедур оптимизации, в результате которых максимизируется эффективность или выход объекта управления либо минимизируется потребление или стоимость. Часто наиболее важной оказывается оптимизация установившегося состояния процесса, которая называется статической оптимизацией. При выполнении оптимизации в ходе нормальной эксплуатации объекта показатель качества вычисляется на основании измеряемых значений регулируемых переменных объекта y , а поиск экстремума производится целенаправленным изменением входных сигналов, т. е. значений задающих переменных w в соответствии с используемым методом оптимизации.

Если несколько объектов работают совместно, то управление их взаимодействием или координация осуществляется на *четвертом уровне*. Например, для группы термических или гидромеханических объектов координация состоит в распределении нагрузки, а для комплекса процессов производства стального проката — во взаимном согласовании работы доменных печей, выплавки стали и прокатных станов.

Самый верхний, в нашем случае *пятый, уровень* предназначен для организации управления. Вся система объектов (заводы, сети связанных предприятий, большие производственные комплексы) организуется с учетом планируемых рынков сбыта, необходимого объема сырья и персонала для их обслуживания.

На каждом из рассмотренных уровней можно использовать методы управления с прямой и обратной связью. Если на всех уровнях данной структуры используется управление с обратной связью, то кроме контуров непосредственного управления объектами можно говорить о контурах контроля, оптимизации и координации, т. е. о *многоуровневой структуре контуров управления*.

Раньше многие задачи управления объектами выполнялись вручную, что до сих пор имеет место на некоторых предприятиях. Развитие автоматизации производства прежде всего начиналось с нижних уровней управления. Приблизительно до 1960 г. автоматическое управление технологическими объектами осуществлялось с помощью аналоговых электрических, пневматических или гидравлических регуляторов. Последовательностное управление реализовывалось с помощью электрических или пневматических элемен-

тов с использованием двоичных сигналов. Для контроля применялось аналоговое или цифровое оборудование. Оптимизация и координация работы объектов либо выполнялись вручную, либо вообще отсутствовали. Применение цифровых ЭВМ позволяет частично автоматизировать управление на высших уровнях.

Применение управляющих вычислителей

Появление цифровых управляющих вычислителей постепенно привело к изменению как структуры, так и функций автоматизированного управления.

Внедрение средств автоматизации проходило поэтапно. В 1959 г. впервые для управления объектами в режиме нормальной эксплуатации были использованы первые специализированные вычислители, предназначенные в основном для регистрации и обработки данных, а также для целей контроля. Непосредственное управление объектом выполнялось с помощью аналоговых средств, что объяснялось малой надежностью выпускавшихся тогда управляющих вычислителей. Затем цифровые управляющие вычислители стали использоваться для формирования задающих переменных для аналоговых регуляторов (программное управление), например с целью оптимизации объекта. С 1962 г. управляющие вычислители применяются для непосредственного цифрового регулирования процессов в замкнутых контурах управления объектами химического производства и на электростанциях [1.1] — [1.6].

В результате создания более мощных управляющих вычислителей и необходимого математического обеспечения их применение для управления объектами существенно расширилось. В настоящее время вычислители являются неотъемлемой частью автоматизированных систем управления [1.5], [1.6]. Более подробно об этом сказано в работах [1.7] — [1.14]. До последнего времени управляющие вычислители использовались преимущественно для непосредственного управления, контроля и координации, а также для регистрации и обработки данных [1.7] — [1.11] и очень редко — для целей оптимизации в процессе функционирования объектов. Характерным результатом 15-летнего применения управляющих вычислителей явилась *централизация* управления, т. е. выполнение всех необходимых функций на одном вычислителе. При этом часто приходилось использовать дублирующий аналоговый или цифровой вычислитель для повышения надежности.

Применение микро-ЭВМ

Дешевые микропроцессоры появились в 1971 г. В связи с этим открылась возможность создания микро-ЭВМ, состоящих из микропроцессоров, полупроводниковой памяти и устройств ввода/вывода, и решения задач управления объектами на нескольких вычислите-

лях. Это привело к разработке систем *децентрализованного* управления. В 1975 г. начали выпускаться микро-ЭВМ, которые были специально предназначены для контроля и управления объектами с 8—16 регулируемыми переменными. Они стали использоваться вместо аналоговых устройств и мини-ЭВМ на нижних уровнях рассмотренной выше структуры управления технологическими объектами. В настоящее время сфера их использования расширяется, и микро-ЭВМ оказывают и будут оказывать существенное влияние на развитие теории и техники измерений и управления.

Цифровые системы управления

Обычное аналоговое или цифровое программное управление предназначено для выполнения небольшого числа основных функций. Применение же цифровых вычислителей для целей управления позволяет существенно расширить круг решаемых задач, поскольку они являются программируемыми и могут выполнять сложные расчеты. Поэтому для цифрового управления объектами можно разработать много новых методов, которые на нижних уровнях могут быть использованы в виде запрограммированных алгоритмов, а на верхних уровнях — в виде программ для реализации проблемно-ориентированных вычислительных методов. Поскольку на всех уровнях формируется обобщенное управление с обратной или прямой связью, следует проектировать и использовать применительно к конкретному объекту многоуровневые алгоритмы управления.

В этой книге рассмотрены вопросы цифрового управления на нижнем уровне общей структуры управления технологическими объектами. Однако многие из рассмотренных ниже методов синтеза алгоритмов управления можно также применить при проектировании цифровых систем контроля, оптимизации и координации.

Содержание книги

В книге описаны методы синтеза цифровых систем управления, ориентированных на использование управляющих вычислителей и микро-ЭВМ. Книга включает семь частей.

Часть 1. Объекты и управляющие вычислители.

В гл. 2 рассмотрены обобщенная структура *цифровых систем управления* и основные этапы их проектирования. Краткое введение в теорию линейных дискретных систем содержится в гл. 3. В ней же рассмотрены основные типы технологических объектов и способы построения их математических моделей для дискретных сигналов.

Остальные части книги содержат следующий материал:

Часть 2. Системы управления с детерминированными возмущениями.

Часть 3. Системы управления со случайными возмущениями.

Часть 4. Связные системы управления.

Часть 5. Многомерные системы управления.

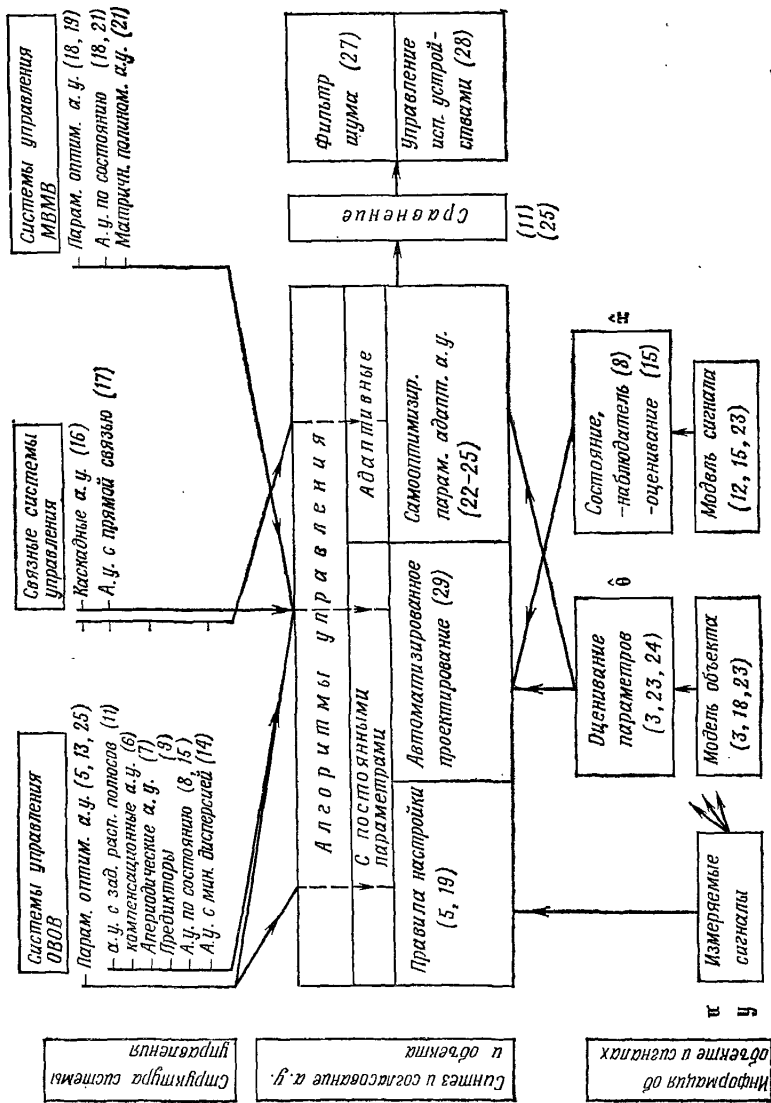


Рис. 1.2. Обзор рассмотренных в книге структур систем управления, используемой ими информации об объекте и сигналах и способов согласования систем объектов.

() — номер главы; а. у. — алгоритм управления (см. гл. 2); ОВОВ — один вход / один выход; МВМВ — много входов / много выходов.

Часть 6. Адаптивные системы управления.

Часть 7. Цифровое управление с управляющими вычислителями и микро-ЭВМ.

Основное содержание глав книги отражено в схеме на рис. 1.2 с помощью ключевых слов. Предлагаемый подход к проектированию цифровых систем управления следует из этой схемы и гл. 2.

Модели объектов и сигналов представлены в книге главным образом *параметрически*, т. е. описываются скалярными или векторными разностными уравнениями, поскольку современные методы синтеза основаны именно на таком представлении. Описания объектов даются в компактном виде с малым числом параметров, а методы синтеза во временной области не требуют больших объемов вычислений и обеспечивают получение структурно оптимизируемых регуляторов. Модели объектов получены в результате применения методов оценивания параметров и могут быть непосредственно использованы для наблюдения или оценивания состояний. Непараметрические модели, такие, как переходные функции или частотные характеристики, представляемые в виде таблиц, указанными преимуществами не обладают. Их использование ограничивает возможности синтеза, в частности, это касается автоматизированного проектирования и адаптивных алгоритмов управления.

Обзор алгоритмов управления для детерминированных и стохастических воздействий содержится в гл. 4, в частности на рис. 4.3 и в разд. 12.1.

В гл. 5 рассмотрены вопросы синтеза *параметрически оптимизируемых алгоритмов управления*, основанного на использовании обычных непрерывных алгоритмов управления П-, ПИ- и ПИД-типа. Здесь же описаны основные дискретные регуляторы низкого порядка. Правила выбора параметров регуляторов собраны из имеющейся литературы. Они дополнены соображениями, основанными на результатах моделирования. Показаны возможности автоматизации проектирования таких регуляторов.

Регуляторы с конечным временем установления переходных процессов — *апериодические регуляторы* — описаны в гл. 7. Метод их синтеза характеризуется весьма малыми вычислительными затратами. Модифицированные апериодические регуляторы повышенного порядка особенно пригодны в адаптивных системах управления.

Гл. 8 посвящена *регуляторам состояния и наблюдателям*. Кроме всего остального здесь излагается метод синтеза регуляторов для внешних постоянно действующих воздействий и рассматриваются другие модификации регуляторов состояния. Их синтез основан на минимизации квадратичного критерия качества или на задании желаемого расположения полюсов.

Вопросы управления объектами с большим запаздыванием, включая использование регуляторов-предикторов, изложены в гл. 9.

Поскольку при проектировании систем управления почти всегда следует учитывать изменения параметров объекта, в гл. 10 исследуется чувствительность различных алгоритмов управления и даются рекомендации для ее уменьшения. В гл. 11 проведено подробное *сравнение* наиболее важных алгоритмов управления для детерминированных сигналов. Оцениваются расположение полюсов и нулей замкнутых систем, качество процессов и затраты на управление. Исследование свойств алгоритмов завершается приведением рекомендаций по их использованию. После краткого описания математических моделей дискретных *стохастических сигналов* (гл. 12) в гл. 13 рассмотрены среди прочего вопросы выбора оптимальных параметров *параметрически оптимизируемых алгоритмов управления* при наличии стохастических возмущающих сигналов. *Регуляторы с минимальной дисперсией*, синтезируемые на основе параметрических моделей объектов и сигналов, выводятся и анализируются в гл. 14. Для применения в адаптивных системах управления предложены модифицированные регуляторы с минимальной дисперсией. В гл. 15 описаны регуляторы состояния для стохастических воздействий и приведены иллюстративные понятия оценки состояний. На нескольких примерах показана методика синтеза *связных систем: каскадных систем управления* (гл. 16) и *систем управления с прямой связью* (гл. 17). Различные методы синтеза алгоритмов управления с прямой связью, например основанные на параметрической оптимизации или принципе минимальной дисперсии, дополняют описанные ранее методы синтеза алгоритмов управления с обратной связью.

Для синтеза многомерных систем управления (гл. 18) существенное значение имеет форма представления структуры *многомерного объекта*. При этом используются передаточные функции и представление в пространстве состояний. При рассмотрении *многомерных параметрически оптимизируемых алгоритмов управления* в гл. 19 вводятся понятия главного регулятора и регулятора связи (который может использоваться как для усиления перекрестных связей, так и для развязки систем), исследуются области устойчивости и взаимное влияние главных регуляторов, а также приведены правила настройки параметров двумерных систем управления. Матричное полиномиальное представление может быть использовано при синтезе *многомерных аperiodических регуляторов и регуляторов с минимальной дисперсией* (гл. 20). Методы проектирования многомерных систем управления с *регуляторами состояния*, изложенные в гл. 21, основаны на использовании заданного расположения полюсов, решении матричного уравнения Риккати и проведении развязки контуров. Здесь также рассмотрены многомерные регуляторы состояния с минимальной дисперсией.

Другой важной частью содержания книги является изложение теории *адаптивных алгоритмов управления*, чему посвящены главы 22—25. После краткого обзора этого вопроса в гл. 22 приведены

описание и сравнительные оценки различных методов *текущей идентификации* динамических объектов и стохастических сигналов, использующих алгоритмы *рекуррентного оценивания параметров* (гл. 23). Оценивание параметров в *замкнутом контуре* управления при наличии и отсутствии внешнего возмущения обсуждается в гл. 24. Наконец, в гл. 25 рассмотрены системы управления с *подстройкой параметров*, в которых используются различные сочетания методов синтеза регуляторов и оценивания параметров. Для этой цели больше всего подходят алгоритмы управления, характеризующиеся малыми вычислительными затратами на синтез и удовлетворяющие требованиям к идентификации в замкнутом контуре, т. е. регуляторы с конечным временем установления (апериодические) и регуляторы с минимальной дисперсией. Были запрограммированы и проверены различные алгоритмы управления с подстройкой параметров, после чего было проведено их сравнение по результатам моделирования работы систем с реальным объектом и аналоговой моделью объекта. В некоторых примерах были отмечены быстрая сходимость и хорошее качество управления этих цифровых алгоритмов с подстройкой параметров. Принцип параметрической адаптации был также использован для адаптивного управления с прямой связью и многомерного управления. Нелинейности, обусловленные *квантованием по уровню* или ошибками округления, и порождаемые ими эффекты, например статические ошибки и предельные циклы при цифровом управлении с обратной связью или зоны нечувствительности в цифровых системах с обратной связью и фильтрах, исследуются в гл. 26. Гл. 27 связана с аналоговой и цифровой *фильтрацией сигналов возмущения*. В ней рассмотрены вопросы реализации цифровых фильтров высоких и низких частот и рекуррентного сглаживания. Различные способы управления *исполнительными устройствами* с помощью прямой и обратной связи описаны в гл. 28. В гл. 29 кратко изложена методика *автоматизированного проектирования алгоритмов управления*.

Последняя глава содержит *практические примеры* применения методов идентификации и автоматизированного проектирования цифровых алгоритмов управления теплообменником и барабанной сушилкой. Кроме того, в ней на примере модели парогенератора проведено сравнение двух подходов к построению систем управления — использования идентификации в сочетании с автоматизированным синтезом и построения адаптивной системы с подстройкой параметров.

Объекты управления и управляющие ЭВМ

глава 2

Принципы управления с помощью ЭВМ

Квантование информации

Данные, обрабатываемые управляющими ЭВМ, предварительно квантуются по времени и преобразуются в цифровую форму. Следовательно, они представляют собой дискретные сигналы, квантованные как по времени, так и по амплитуде, что иллюстрируется рис. 2.1.

В отличие от непрерывных сигналы, поступающие в ЭВМ, принимают дискретные значения в дискретные моменты времени. Таким образом формируется последовательность амплитудно-модулированных импульсов, высота каждого из которых пропорциональна величине непрерывного сигнала. В аналого-цифровом преобразова-

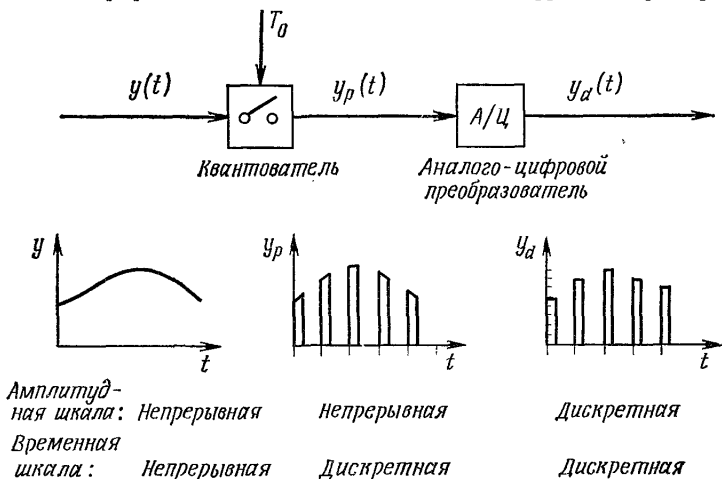


Рис. 2.1. Модулированный по амплитуде, дискретный во времени и по уровню сигнал, получающийся в результате квантования и аналого-цифрового преобразования непрерывного сигнала.

теле значение амплитуды импульса подвергается либо округлению, либо усечению в зависимости от типа устройства.

Квантование по времени обычно представляет собой периодический процесс, характеризующийся тактом дискретности T_0 . Эта операция выполняется мультиплексором, конструктивно объединенным с устройством автоматического масштабирования и аналого-цифровым преобразователем. Оцифрованные входные данные поступают далее в центральный процессор. Здесь они обрабатываются по запрограммированным алгоритмам, в результате чего формируются

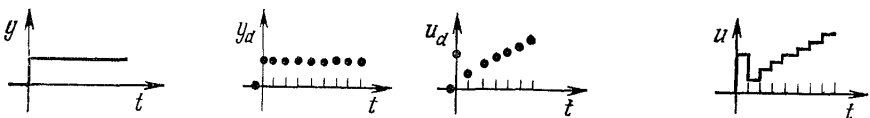
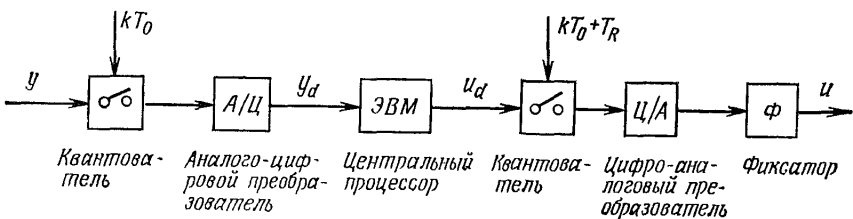


Рис. 2.2. Управляющая ЭВМ как средство обработки оцифрованных данных. $k=0, 1, 2, 3, \dots$

выходные данные. Если исполнительное устройство имеет аналоговый вход, эти данные поступают в цифро-аналоговый преобразователь, на выходе которого имеется фиксатор (эстраполятор нулевого порядка). Упрощенная блок-схема описанной системы изображена на рис. 2.2.

Замыкание ключей, стоящих на входе и выходе системы, происходит не одновременно, а с интервалом T_R . Эта задержка равна времени, затрачиваемому на преобразование аналоговой информации в цифровую форму и последующую ее обработку в центральном процессоре. Поскольку интервал T_R , как правило, значительно меньше постоянных времени исполнительных устройств, датчиков и объектов управления, им часто пренебрегают, полагая, что входные и выходные квантователи действуют синхронно. Кроме того, при использовании ЭВМ, работающих со словами длиной 16 разрядов или более, и аналого-цифровых преобразователей, имеющих не менее 10 двоичных разрядов, эффекты квантования по уровню практически незаметны. Поэтому в первом приближении можно считать, что амплитуды дискретных сигналов изменяются непрерывно.

С учетом указанных упрощений структура замкнутого контура управления с ЭВМ в качестве средства обработки дискретной информации приобретает вид, показанный на рис. 2.3. В этой системе

квантователи, действуя синхронно, вырабатывают сигналы, дискретные только во времени. Управляемая переменная u вычисляется по запрограммированному алгоритму, входными величинами для которого служат регулируемая переменная y и задающая переменная w . Дискретные контуры, подобные описанному, характерны не

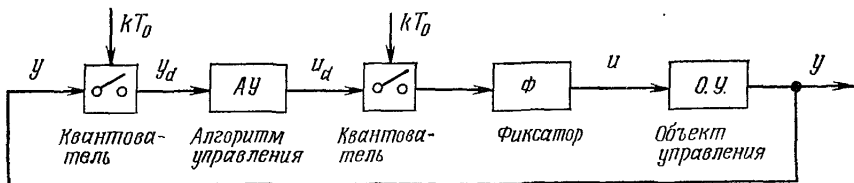


Рис. 2.3. Замкнутый контур управления с ЭВМ, используемой для обработки дискретных данных.

только для систем управления динамическими объектами, построенных на базе ЭВМ. Проблемы обработки дискретных данных возникают и в других приложениях, например:

— при решении задач, в которых измеряемые переменные доступны лишь в определенные моменты времени (в частности, таковы данные, поступающие с вращающихся антенн радиолокаторов, получаемые при измерении расстояний с помощью радиодальномеров; в газовой хроматографии, при отборе проб вещества с целью его последующего лабораторного анализа; используемые в социально-экономических, биологических, метеорологических исследованиях и т. п.);

— при мультиплексировании дорогостоящего оборудования связи (кабельных линий, каналов).

Проектирование цифровых систем управления

При разработке электронных, пневматических или гидравлических аналоговых регуляторов проектировщик по техническим или экономическим соображениям вынужден пользоваться достаточно узким набором элементов, действующих как интеграторы (И), дифференциаторы (Д) или пропорциональные усилители (П). В силу этого при синтезе систем управления аналогового типа приходится сталкиваться с весьма серьезными ограничениями. Иначе обстоит дело с алгоритмами для управляющих ЭВМ. Гибкость программных средств существенно расширяет возможность реализации сложных алгоритмов. Это создает предпосылки для практического применения новейших методов современной теории управления, но одновременно ставит перед проектировщиком вопрос: какой управляющий алгоритм наиболее эффективен при решении конкретной прикладной задачи? Естественно, ответ на этот вопрос возможен лишь в том случае, когда имеется достаточно полное описание объекта в форме его математической модели и известны показатели, по ко-

торым можно сравнивать алгоритмы различных типов. Такими показателями служат качество управления, обеспечиваемое алгоритмом, сложность его реализации, чувствительность к изменению параметров и воздействию помех, требуемая производительность ЭВМ, а также некоторые свойства объекта управления (его линейность или нелинейность, расположение полюсов и нулей, наличие задержек, структура связей в многосвязном объекте).

По теории дискретных систем опубликовано значительное число работ. Кроме того, во многих книгах по технической кибернетике имеются главы, посвященные решению задач цифрового управления. В первых монографиях по теории дискретных систем изложение основывалось на разностных уравнениях ([2.1], [2.2]). За ними последовали книги, в которых использовался аппарат z-преобразования ([2.3] — [2.13], [2.15], [2.20]), и, наконец, был разработан метод пространства состояний ([2.14], [2.17] — [2.19], [2.21]). К перечисленным работам можно добавить многочисленные труды конференций. Что же касается книг прикладной направленности, то в них в основном рассматриваются алгоритмы, полученные путем дискретизации аналоговых регуляторов с пропорциональными, интегральными и дифференцирующими связями.

В рамках методики проектирования цифровых систем управления, описываемой в этой книге (см. также обзорную схему на рис. 1.2), должны быть решены следующие проблемы:

1. Получение информации об объекте управления и о сигналах.

Отправной точкой процесса проектирования системы управления является информация об объекте управления и о сигналах, участвующих в его описании. Она может быть представлена в различных формах, например:

— в виде доступных непосредственному измерению входов, выходов, переменных состояния;

— в форме моделей объектов управления и моделей сигналов;

— в форме оценок сигналов и состояний объектов управления.

Для построения моделей объектов управления и сигналов могут применяться методы идентификации и оценивания параметров. Модели объектов, кроме того, могут быть получены и с помощью теоретических выкладок. Недоступные измерению переменные состояния можно восстанавливать, используя методы теории наблюдателей или оценки состояния.

2. Выбор структуры системы управления.

Описав математическую модель объекта управления и задав соответствующий набор регулируемых и управляемых переменных, проектировщик должен определить тип системы управления. Существуют, в частности, следующие типы систем:

— системы управления с одним входом и одним выходом;

— системы управления с перекрестными связями;

— системы управления со многими входами и многими выходами.

3. Разработка алгоритмов для управления в прямой цепи и цепях обратных связей (синтез и настройка).

Завершающим этапом проектирования является синтез алгоритмов управления в цепях прямой и обратных связей, а также их настройка (или подстройка) с учетом конкретных условий функционирования системы. Последнее можно выполнять различными способами:

- проводя подстройку параметров вручную, руководствуясь несложными правилами;
- с помощью автоматизированного расчета на ЭВМ;
- используя самооптимизирующиеся адаптивные алгоритмы управления.

Как правило, применяя различные методы синтеза, можно получить несколько алгоритмов управления, отличающихся по своим харак-

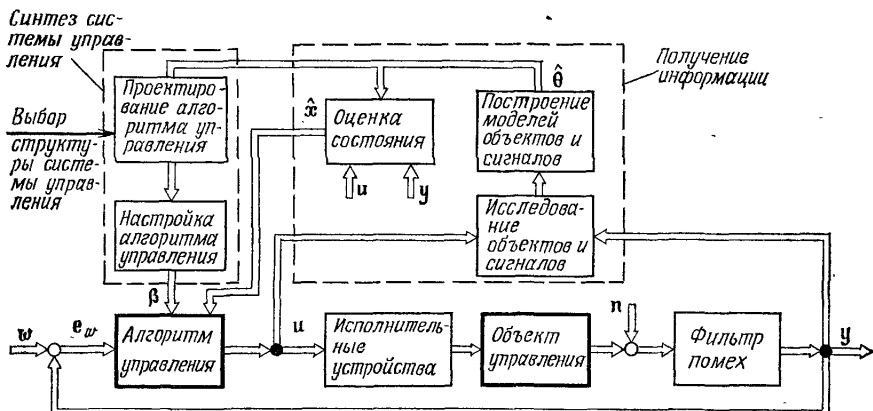


Рис. 2.4. Общая схема проектирования цифровых систем управления.

теристикам. Среди них необходимо выбрать наилучший, исходя из совокупности различных показателей.

4. Фильтрация шумов.

Высокочастотные шумы, вносящие помехи в измерения управляемых переменных, но сами недоступные измерению, должны подавляться с помощью аналоговых и цифровых фильтров.

5. Корректирующие алгоритмы в прямых цепях и цепях обратных связей исполнительных устройств.

В цепях прямых и обратных связей исполнительных устройств в зависимости от их конструкции могут применяться различные алгоритмы коррекции. При разработке алгоритмов управления объектом следует учитывать динамические свойства корректирующих алгоритмов.

Работоспособность всех алгоритмов управления и фильтрации должна анализироваться с учетом эффектов квантования по уровню. На рис. 2.4 представлена общая схема процесса проектирования цифровых систем управления. Если для параметрической оптимизации простых алгоритмов управления применяются несложные процедуры подстройки параметров, то можно ограничиться простейшими моделями объектов. При проведении однократного расчета алгоритмов на ЭВМ необходимы точные модели объектов управления и сигналов, для формирования которых наиболее целесообразно использовать методы идентификации и оценивания параметров. Если же процесс получения информации и расчета алгоритма управления носит непрерывный характер и может протекать в реальном времени, возможно построение самооптимизирующейся адаптивной системы управления.

Дискретные системы управления

Эта глава представляет собой краткое введение в математическую теорию линейных дискретных систем (т. е. систем обработки дискретной информации). В ней приводятся лишь наиболее важные соотношения, лежащие в основе методов проектирования цифровых систем управления. С целью более глубокого изучения теории дискретных систем читателю следует ознакомиться с такими широко известными работами как, например, [2.3], [2.4], [2.10] — [2.14], [2.17], [2.18].

3.1. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

3.1.1. Дискретные по времени функции и разностные уравнения

Дискретность (и, следовательно, разрывность) сигналов обусловлена их квантованием по уровню и (или) по времени. В противоположность непрерывным сигналам, которые описываются непрерывными функциями времени, дискретные сигналы могут принимать лишь дискретные значения в дискретные моменты времени. В дальнейшем будут рассматриваться сигналы, дискретные только во временной области. Они представляют собой последовательности импульсов, появляющихся в определенные моменты времени. Обычно дискретный сигнал получается в результате периодического прерывания непрерывного сигнала с постоянным тактом. Существуют разные способы модуляции отдельных импульсов, входящих в последовательность. Они отличаются допустимыми значениями амплитуд, шириной импульсов и модулирующей частотой. В цифровых системах управления обычно применяется лишь амплитудная модуляция импульсов, причем в основном тот ее вариант, при котором высота импульса пропорциональна текущему значению непрерывного сигнала, ширина постоянна, а интервалы между импульсами одинаковы и равны такту квантования (см. рис. 3.1.1). Поскольку к дискретным сигналам этого типа применима теорема суперпозиции, они описываются линейными соотношениями, аналогичными по форме уравнениям линейных динамических систем. Рис. 3.1.1 иллюстрирует принцип получения последовательности импульсов, основанный на пропускании непрерывного сигнала $x(t)$ через ключ, который периодически, с тактом квантования T_0 , замыкается на время h . Если длительность импульса h существенно меньше такта квантования T_0 , а за ключом стоит линейное звено с постоянными времени $T_1 \gg h$, то последовательность импульсов $x_p(t)$ можно

приближенно рассматривать как дискретный сигнал $x_T(kT_0)$, показанный на рис. 3.1.2. В этом случае ключ действует как идеальный квантователь, и величины $x_T(kT_0)$ равны мгновенным значениям амплитуд.

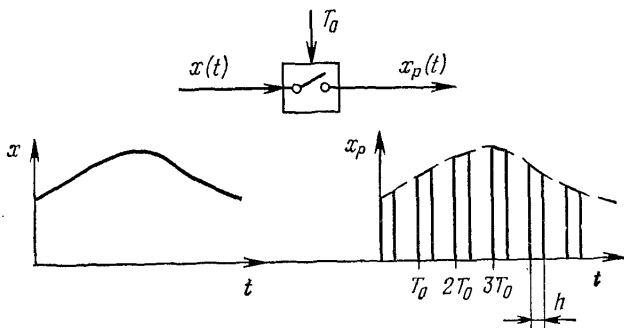


Рис. 3.1.1. Формирование амплитудно-модулированного дискретного сигнала путем пропуска непрерывного сигнала через ключ с периодом замыкания T_0 и продолжительностью замыкания h .

Модулированная по амплитуде дискретная функция $x_T(t)$, получаемая путем квантования по времени непрерывного сигнала $x(t)$ с постоянным тактом T_0 , математически описывается выражением

$$\left. \begin{aligned} x_T(t) &= x(kT_0) \text{ при } t = kT_0, \\ x_T(t) &= 0 \text{ при } kT_0 < t < (k+1)T_0; \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1-1)$$

Формирование дискретных по времени функций различных типов иллюстрируется приведенными ниже примерами.

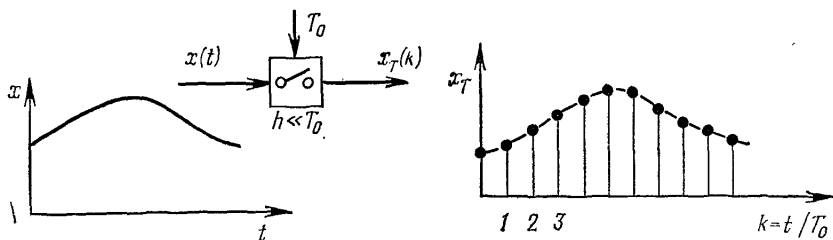


Рис. 3.1.2. Дискретный сигнал $x_T(k)$, получаемый на выходе квантователя ($h \ll T_0$).

Пример 3.1.1.

а) В результате квантования непрерывная функция времени

$$x(t) = e^{-\alpha t}$$

преобразуется в дискретную по времени функцию ($t = kT_0$)

$$x(kT_0) = e^{-\alpha kT_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, эти функции связаны явным соотношением

$$x_T(t) = x(kT_0).$$

б) Операция интегрирования

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^t w(t) dt$$

выполняется численно путем аппроксимации $w(t)$ ступенчатой функцией. При этом интеграл заменяется суммой

$$x(kT_0) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^{k-1} T_0 w(vT_0).$$

Поскольку $x(kT_0)$ зависит от второй дискретной функции, т. е.

$$x_T(t) = x(kT_0) = f[w(vT_0), kT_0],$$

результат записывается в неявной форме.

В следующем примере показывается, как неявную функцию можно представить в виде разностного уравнения.

Пример 3.1.2. Из выражения, полученного в примере 3.1.1, б, следует, что

$$x((k+1)T_0) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^k T_0 w(vT_0).$$

После вычитания имеем

$$x((k+1)T_0) - x(kT_0) = \frac{T_0}{T} w(kT_0)$$

или

$$x(k+1) + a_1 x(k) = b_1 w(k).$$

Уменьшив k на 1, приходим к окончательному соотношению

$$x(k) + a_1 x(k-1) = b_1 w(k-1),$$

где $a_1 = -1$; $b_1 = T_0/T$.

Это — линейное разностное уравнение первого порядка.

Для получения разностного уравнения достаточно любую дискретную функцию, зависящую от другой дискретной функции, представить в рекуррентной форме. Линейное разностное уравнение порядка m имеет вид

$$\begin{aligned} x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m) = \\ = b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m). \end{aligned} \quad (3.1-2)$$

Здесь аргумент kT_0 заменен индексом k . Величину выходного сигнала при любом k можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} x(k) = -a_1 x(k-1) - \dots - a_m x(k-m) + \\ + b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m), \end{aligned} \quad (3.1-3)$$

если известны текущее значение входа $w(k)$ и m предшествующих значений $w(k-1), \dots, w(k-m)$, а также соответствующие значения выхода $x(k-1), \dots, x(k-m)$.

Другой способ построения разностных уравнений состоит в дискретизации дифференциальных уравнений. При этом дифференциальное уравнение первого порядка аппроксимируется разностным уравнением первого порядка, дифференциальное уравнение второго порядка — разностным уравнением второго порядка и т. д. При замене дифференциалов левыми разностями справедливы следующие соотношения:

Непрерывная функция

первая производная

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

вторая производная

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t - \Delta t)}{dt}}{\Delta t}$$

⋮
⋮

Дискретная функция

разность первого порядка

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$$

разность второго порядка

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(k) &= \Delta x(k) - \Delta x(k-1) = \\ &= x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) \end{aligned}$$

⋮
⋮

В следующем примере показано, как осуществляется дискретизация дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 3.1.3. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$T \frac{dx(t)}{dt} = w(t).$$

Заменяя дифференциал левой разностью, полученной при такте квантования T_0 , имеем выражение

$$x(k) - x(k-1) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Если для дискретизации применяется правая разность

$$\Delta x'(k) = x(k+1) - x(k),$$

то получается то же уравнение, что и в примере 3.1.2:

$$x(k+1) - x(k) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Описанные способы аппроксимации дают удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда такт квантования T_0 мал по сравнению с постоянной времени T .

Выражение (3.1-2) является наиболее распространенной формой записи разностных уравнений. Если использовать разности высших порядков вплоть до m -го, разностное уравнение можно представить

в виде, аналогичном дифференциальному уравнению:

$$\alpha_m \Delta^m x(k) + \alpha_{m-1} \Delta^{m-1} x(k) + \dots + \alpha_1 \Delta x(k) + x(k) = \\ = \beta_m \Delta^m w(k) + \beta_{m-1} \Delta^{m-1} w(k) + \dots + \beta_1 \Delta w(k) + \beta_0 w(k). \quad (3.1-4)$$

Впоследствии будет описан еще один метод получения разностных уравнений, справедливый и при больших значениях такта квантования T_0 .

3.1.2. Решетчатые функции

Эффективный математический метод описания дискретных функций основывается на замене последовательности импульсов $x_p(t)$ решетчатой функцией, состоящей из идеальных импульсов. Идеальный импульс определяется как

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad (3.1-5)$$

а его площадь равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \text{ с.} \quad (3.1-6)$$

Если продолжительность замыкания ключа значительно меньше такта квантования, т. е. $h \ll T_0$, импульсы последовательности $x_p(t)$, имеющие площадь $x(t)h$, можно приближенно заменить идеальными импульсами $\delta(t)$ той же площади:

$$x_p(t) \approx x_\delta(t) = \frac{x(t)h}{1 \text{ с}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0). \quad (3.1-7)$$

Решетчатая функция $x_\delta(t)$ физически нереализуема: она служит лишь удобной формой представления последовательности реальных

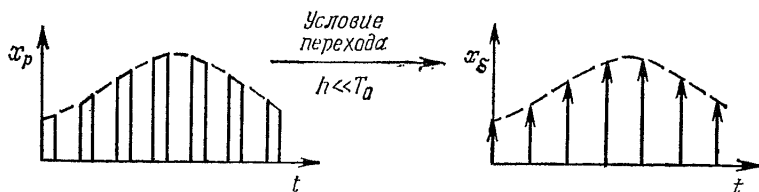


Рис. 3.1.3. Приближение последовательности реальных импульсов последовательностью идеальных импульсов.

импульсов $x_p(t)$. Введение идеального квантователя, формирующего δ -импульсы, позволяет значительно упростить математический аппарат, используемый для описания процессов прохождения дискретных сигналов через линейные динамические звенья. Этот приближенный переход иллюстрируется рис. 3.1.3. Предполагается,

что площади реальных и соответствующих им идеальных импульсов одинаковы.

Учитывая, что последовательность идеальных импульсов определена лишь в моменты времени $t = kT_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, уравнение (3.1-7) можно переписать в виде

$$x_\delta(t) = \frac{h}{T_0} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0). \quad (3.1-8)$$

При анализе динамических систем с одинаковыми, синхронно работающими ключами на входе и выходе, продолжительность замыкания h не учитывается. Фактически эта величина не влияет на конечный результат, если за ключом стоит экстраполятор. Поэтому ее можно выбрать произвольно, например положить для простоты $h = 1$ с. В этом случае последовательность идеальных импульсов описывается выражением

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0). \quad (3.1-9)$$

В уравнении (3.1-9), полученном после нормализации (3.1-8), выходные сигналы квантователя (см. рис. 3.1.2) умножаются на идеальные импульсы $\delta(t - kT_0)$.

Напомним, что вывод этого уравнения опирался на следующие допущения:

а) $h \ll T_0$;

б) выход квантователя подается на линейную реализуемую систему $G(s) = Z(s)/N(s)$.

3.2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

3.2.1. Преобразование Лапласа

Применение к единичному идеальному импульсу преобразования Лапласа

$$x(s) = L \{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad (3.2-1)$$

где $s = \sigma + i\omega$ — комплексная переменная, дает

$$L \{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \quad (3.2-2)$$

а применение того же преобразования к импульсу, сдвинутому на kT_0 , дает

$$L \{\delta(t - kT_0)\} = e^{-kT_0 s}. \quad (3.2-3)$$

С учетом этих соотношений уравнение (3.1-9) приобретает вид

$$L \{x^*(t)\} = x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) e^{-kT_0 s}. \quad (3.2-4)$$

Отсюда следует, что преобразование Лапласа дискретной функции времени является периодической функцией с частотой повторения

$$\omega_0 = 2\pi/T_0, \quad (3.2-5)$$

поскольку

$$x^*(s + i\nu\omega_0) = x^*(s), \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2-6)$$

Для того чтобы получить последнее условие, достаточно в уравнении (3.2-4) заменить s на $s + i\nu\omega_0$.

Подставим $s = \sigma + i\omega$ в выражение (3.2-6):

$$x^*(\sigma + i(\omega + \nu\omega_0)) = x^*(\sigma + i\omega), \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2-7)$$

Очевидно, функция $x^*(s)$ повторяется с периодом $\nu\omega_0$. Следовательно, если $x^*(\delta + i\omega)$ известна при всех значениях переменной σ на интервале $-\omega_0/2 \leq \omega \leq \omega_0/2$, т. е. в пределах основной полосы плоскости s , она определена на всей плоскости. Функции $x^*(s)$ имеют одни и те же значения в конгруэнтных точках, принадлежащих различным дополнительным полосам, соответствующим более высоким частотам.

3.2.2. Теорема прерывания

Если непрерывный сигнал $x(t)$ квантуется с малым тактом $T_0 = \Delta t$, то его преобразование Лапласа, определенное соотношением (3.2-1), можно приближенно заменить бесконечной суммой

$$x(s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-k\Delta t s} \Delta t. \quad (3.2-8)$$

Сравнивая выражение (3.2-8) с уравнением (3.2-4), можем написать

$$T_0 x^*(s) \approx x(s) \quad \text{или} \quad T_0 x^*(\sigma + i\omega) \approx x(\sigma + i\omega), \quad (3.2-9)$$

если такт T_0 достаточно мал.

Если непрерывный сигнал $x(t)$ имеет ограниченную полосу частот, его преобразование Фурье (рис. 3.2.1, а) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} x(i\omega) &\neq 0 \quad \text{при} \quad -\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max}; \\ x(i\omega) &= 0 \quad \text{при} \quad \omega < -\omega_{\max} \quad \text{и} \quad \omega > \omega_{\max}. \end{aligned}$$

Предположим, что такой сигнал подвергается квантованию с малым тактом T_0 , после чего аппроксимируется последовательностью $x^*(t)$. Если величина T_0 достаточно мала, преобразование

Фурье, как показано на рис. 3.2.1, б, распадается на «основной спектр»

$$T_0 x^*(i\omega) \approx x(i\omega), \quad -\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max},$$

и совокупность повторяющихся с периодом ω_0 «дополнительных спектров»

$$T_0 x^*(i\omega + \nu\omega_0) \approx x(i\omega), \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, в спектре квантованного сигнала по сравнению со спектром непрерывного появляются дополнительные высокочастотные составляющие.

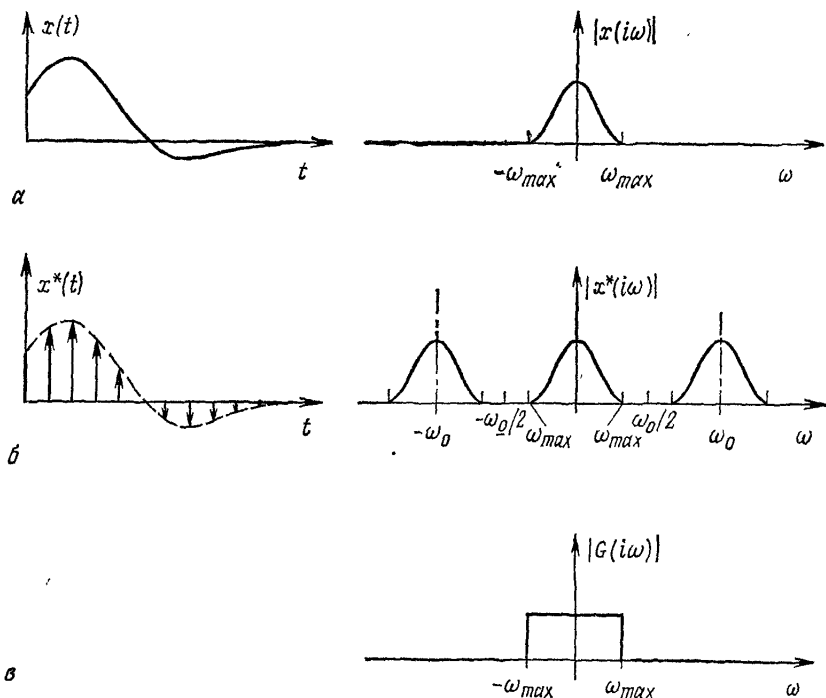


Рис. 3.2.1.

а — преобразование Фурье для непрерывного сигнала; б — преобразование Фурье для импульсного сигнала; в — амплитудная частотная характеристика идеального полосового фильтра.

Допустим, исходный непрерывный сигнал восстанавливается с помощью идеального полосового фильтра, имеющего следующую характеристику (рис. 3.2.1, в):

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| &= 1, & -\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max}; \\ |G(i\omega)| &= 0, & \omega < -\omega_{\max} \text{ и } \omega > \omega_{\max}. \end{aligned}$$

Подобная операция может быть выполнена без ошибки только при условии $\omega_0/2 \geq \omega_{\max}$. Если же частота квантования недостаточно велика, т. е. $\omega_0/2 < \omega_{\max}$, на основной накладываются дополнительные спектры и точное выделение исходного спектра становится невозможным. Следовательно, в этом случае нельзя восстановить без ошибки непрерывный сигнал, даже если он обладает ограниченной полосой частот.

Для того чтобы непрерывный сигнал со спектром, ограниченным максимальной частотой ω_{\max} , можно было точно восстановить по последовательности его дискретных значений, необходимо; чтобы частота квантования ω_0 удовлетворяла условию

$$\omega_0 \geq 2\omega_{\max}. \quad (3.2-10)$$

Следовательно, для такта квантования T_0 , согласно уравнению (3.2-5), должно выполняться условие

$$T_0 \leq \pi/\omega_{\max}. \quad (3.2-11)$$

Полученный результат составляет содержание теоремы прерывания, сформулированной Шенноном¹⁾.

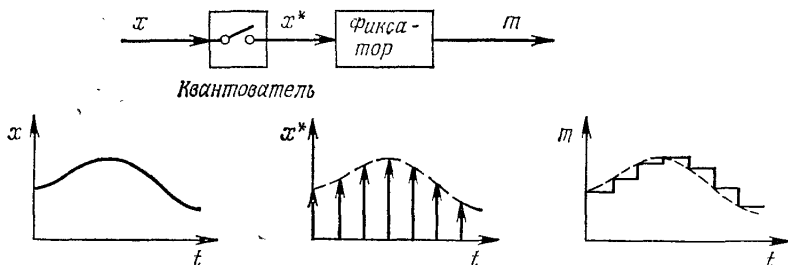


Рис. 3.2.2. Квантователь с экстраполятором нулевого порядка.

Заметим, что в системах управления или передачи информации на практике непрерывные сигналы с ограниченными спектрами не встречаются. Тем не менее в теории цифрового управления шенноновская частота

$$\omega_{Sh} = \omega_0/2 = \pi/T_0 \quad (3.2-12)$$

играет роль своего рода эталонной константы. Она определяет полосу пропускания дискретной системы.

3.2.3. Фиксирующий элемент

Если в дискретной системе после квантователя стоит фиксатор (экстраполятор нулевого порядка), который на период, равный такту квантования, фиксирует мгновенное значение дискретного сигнала $x(kT_0)$, на его выходе формируется ступенчатый сигнал (рис. 3.2.2).

¹⁾ Данную теорему в отечественной литературе называют теоремой Котельникова.— Прим. перев.

Передаточную функцию экстраполятора нулевого порядка можно получить следующим образом. Предположим, на вход его поступает последовательность импульсов

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0),$$

для которой преобразование Лапласа имеет вид

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) e^{-kT_0 s}.$$

Выходом экстраполятора является ступенчатый сигнал

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) [1(t - kT_0) - 1(t - (k+1)T_0)].$$

Для него преобразование Лапласа определяется выражением

$$m(s) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) e^{-kT_0 s}}_{x^*(s)} \cdot \frac{1}{s} [1 - e^{-T_0 s}].$$

Отсюда получаем передаточную функцию экстраполятора нулевого порядка

$$H(s) = \frac{m(s)}{x^*(s)} = \frac{1}{s} [1 - e^{-T_0 s}]. \quad (3.2-13)$$

На низких частотах он ведёт себя подобно фильтру с передаточной функцией аperiodического звена:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{i\omega} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{T_0 i\omega}{1!} + \frac{(T_0 i\omega)^2}{2!} + \dots} \right) = \frac{T_0}{1 + T_0 i\omega}. \quad (3.2-14)$$

3.3. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

3.3.1. Введение в метод z-преобразования

Определив новую переменную

$$z = e^{T_0 s} = e^{T_0(\sigma + i\omega)} = e^{T_0 \sigma} [\cos T_0 \omega + i \sin T_0 \omega], \quad (3.3-1)$$

подставим ее в уравнение (3.2-4). В результате получаем z-преобразование импульсного сигнала $x^*(t)$:

$$x(z) = \mathcal{Z}\{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (3.3-2)$$

Этот бесконечный ряд сходится, если все его члены $|x(kT_0)|$ ограничены и если справедливо условие $|z| > 1$. Поскольку величина z может выбираться произвольно, сходимость имеет место для широкого класса функций $x(kT_0)$. Следует иметь в виду, что метод z -преобразования основывается на тех же предположениях, что и преобразование Лапласа, причем особенно важно выполнение условия $x(kT_0) = 0$ при $k < 0$.

Ниже приводятся несколько примеров вычисления z -преобразований.

Пример 3.3.1

а) Дана ступенчатая функция: $x(kT_0) = 1$ (kT_0), $k = 0, 1, \dots$.

В соответствии с определением (3.3-2) z -преобразование для этой функции имеет вид

$$x(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Сумму полученной бесконечной геометрической прогрессии можно записать в явной форме:

$$x(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \text{ если } |z| > 1.$$

б) Дана экспоненциальная функция: $x(kT_0) = e^{-akT_0}$ (a — действительное число).

$$x(z) = 1 + (e^{aT_0z})^{-1} + (e^{aT_0z})^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - (e^{aT_0z})^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}} = \frac{z}{z + a_1},$$

если $|e^{aT_0z}| > 1$.

в) Дана синусоидальная функция: $x(kT_0) = \sin \omega_1 kT_0$. Записав эту функцию в виде

$$\sin \omega_1 kT_0 = \frac{1}{2i} [e^{i\omega_1 kT_0} - e^{-i\omega_1 kT_0}],$$

используем результат предыдущего примера при $a = i\omega_1$ (или $a = -i\omega_1$):

$$x(z) = \frac{1}{2i} \left[\frac{z}{z - e^{i\omega_1 T_0}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega_1 T_0}} \right] = \frac{z \sin \omega_1 T_0}{z^2 - 2z \cos \omega_1 T_0 + 1} \frac{b_1 z}{z^2 + a_1 z + 1}.$$

Приведенные примеры иллюстрируют методику получения z -преобразований для некоторых простейших функций. Аналогичным способом составляются таблицы, содержащие наиболее часто употребляемые функции. Небольшая таблица такого рода помещена в приложении к данной книге. В ней для нескольких непрерывных функций времени даны преобразования Лапласа и z -преобразования. Анализ этой таблицы позволяет заключить следующее:

а) Имеется непосредственная взаимосвязь между знаменателями выражений для $x(s)$ и $x(z)$, т. е.

$$\frac{\dots}{(s - s_1)^n} \leftrightarrow \frac{\dots}{(z - z_1)^n},$$

где $z_1 = e^{T_0 s_1}$.

б) Прямое соответствие между числителями $x(s)$ и $x(z)$ отсутствует. В частности, у $x(z)$ числитель может описываться полиномом, даже если числитель $x(s)$ — функция иного типа.

3.3.2. Теоремы z-преобразования

Ниже приведены некоторые важнейшие теоремы, используемые при вычислении z-преобразований. Вывод этих теорем читатель сможет найти в книгах, перечисленных в начале этой главы.

а) Линейность

$$\mathfrak{z} \{ax_1(kT_0) + bx_2(kT_0)\} = a\mathfrak{z} \{x_1(kT_0)\} + b\mathfrak{z} \{x_2(kT_0)\}.$$

б) Сдвиг по времени вправо

$$\mathfrak{z} \{x(kT_0 - dT_0)\} = z^{-d} x(z), \quad d \geq 0.$$

в) Сдвиг по времени влево

$$\mathfrak{z} \{x(kT_0 + dT_0)\} = z^d \left[x(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(qT_0) z^{-q} \right], \quad d \geq 0.$$

г) Изменение масштаба по переменной z

$$\mathfrak{z} \{x(k) e^{-akT_0}\} = x(ze^{aT_0}).$$

д) Начальное значение

$$x(+0) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z).$$

е) Конечное значение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} x(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) x(z).$$

3.3.3. Обратное z-преобразование

В отличие от преобразования Лапласа, для которого прямой и обратный переходы $x(t) \rightarrow x(s)$ и $x(s) \rightarrow x(t)$ выполняются однозначно, z-преобразование $x(t) \rightarrow x(z)$ и обратное z-преобразование $x(z) \rightarrow x(t)$ не обладают этим свойством. Объясняется это тем, что они не учитывают поведения функции $x(t)$ в промежутках между моментами срабатывания квантователя. В то же время преобразование $x(kT_0) \rightarrow x(z)$ и обратное преобразование $x(z) \rightarrow x(kT_0)$ взаимно однозначны.

На практике обратное z-преобразование вычисляют, записывая функцию $x(z)$ как сумму элементарных членов, содержащихся в таблицах z-преобразований, или просто поделив числитель $x(z)$ на ее знаменатель. В последнем случае получается ряд вида

$$x(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

Из уравнения (3.3-2) следует, что

$$x(0) = c_0; \quad x(1) = c_1; \quad x(2) = c_2 \text{ и т. д.}$$

3.4. ДИСКРЕТНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

3.4.1. Сумма свертки

Предположим, что квантователь стоит на входе линейной системы с передаточной функцией $G(s)$ или переходной функцией $g(t)$, как показано на рис. 3.4.1. Импульсный входной сигнал,

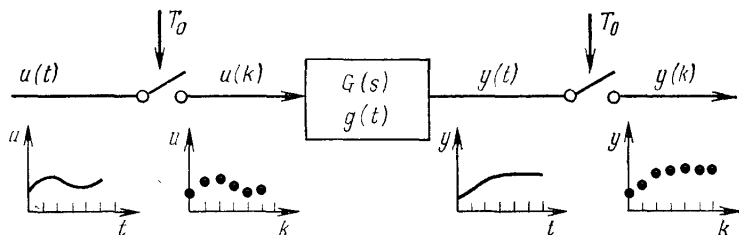


Рис. 3.4.1. Линейная система с импульсным входом и выходом.

поступающий в систему, описывается выражением

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) \delta(t - kT_0). \quad (3.4-1)$$

Учитывая, что переходная функция $g(t)$ определяет реакцию системы на единичный импульс $\delta(t)$, ее выходной сигнал выражается суммой свертки

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) g(t - kT_0). \quad (3.4-2)$$

Если квантование входного и выходного сигналов осуществляется синхронно, при $t = nT_0$ имеем

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) g((n-k)T_0) = \sum_{v=0}^{\infty} u((n-v)T_0) g(vT_0). \quad (3.4-3)$$

3.4.2. Дискретная передаточная функция

Для того чтобы получить преобразование Лапласа импульсного сигнала на выходе системы, воспользуемся уравнением (3.2-4).

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0) e^{-nT_0s} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) g(n-k)T_0 e^{-nT_0s}. \quad (3.4-4)$$

Подставим в эту формулу $q = n - k$:

$$\left. \begin{aligned} y^*(s) &= \sum_{q=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) g(qT_0) e^{-qT_0s} e^{-kT_0s} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0) e^{-qT_0s} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) e^{-kT_0s}, \\ y^*(s) &= G^*(s) u^*(s). \end{aligned} \right\} \quad (3.4-5)$$

Отсюда дискретную передаточную функцию можно определить как

$$G^*(s) = \frac{y^*(s)}{u^*(s)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0) e^{-qT_0 s}. \quad (3.4-6)$$

Переходя к переменной $z = e^{T_0 s}$, введем также дискретную передаточную функцию по переменной z :

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0) z^{-q} = \mathfrak{z} \{g(q)\}. \quad (3.4-7)$$

Вычисление z -передаточных функций иллюстрируется двумя примерами.

Пример 3.4.1. Аperiodическое звено без экстраполятора на входе.
Аperiodическое звено с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K'}{a + s},$$

где $a = 1/T$, $K' = K/T$, имеет импульсную переходную функцию

$$g(t) = K' e^{-at}.$$

Подставим в это выражение $t = kT_0$.

$$g(kT_0) = K' e^{-akT_0}.$$

Используя определение (3.4-7) и результат примера 3.3.1, б, получим дискретную передаточную функцию

$$G(z) = K' \sum_{q=0}^{\infty} (e^{-aT_0})^{-q} = \frac{K' z}{z - e^{-aT_0}} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}},$$

Вычислим параметры этой передаточной функции при $K = 1$, $T = 7,5$ с, $T_0 = 4$ с:

$$b_0 = K' = K/T = 0,1333; \quad a_1 = -e^{-aT_0} = -0,5866.$$

Описанное выше преобразование можно условно выразить как переход

$$G(z) = \mathfrak{z} \{ [L^{-1} \{G(s)\}]_{t=kT_0} \} = \mathfrak{z} \{G(s)\}. \quad (3.4-8)$$

Символ $\mathfrak{z} \{x(s)\}$ подразумевает, что функция $x(z)$, соответствующая $x(s)$, отыскивается непосредственно по таблице z -преобразований. Так, можем записать

$$G(z) = \mathfrak{z} \{G(s)\} = \mathfrak{z} \left\{ \frac{K'}{a + s} \right\} = \frac{K' z}{z - e^{-aT_0}}. \quad (3.4-9)$$

Если на входе непрерывной системы стоит экстраполятор нулевого порядка, как показано на рис. 3.4.2, дискретная передаточная

Функция импульсной системы меняется:

$$\begin{aligned} HG(z) &= \mathcal{Z} \{H(s) G(s)\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} G(s) \right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4-10)$$

Пример 3.4.2. Апериодическое звено с экстраполятором на входе.

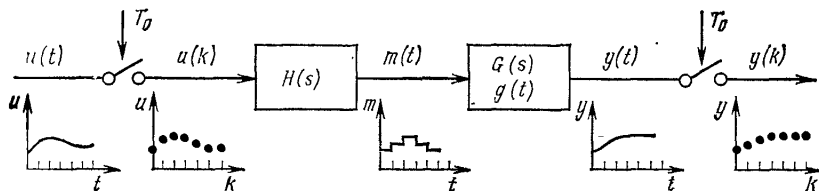


Рис. 3.4.2. Линейная система с экстраполятором нулевого порядка и импульсным входом и выходом.

Воспользуемся уравнением (3.4-10) и таблицей z-преобразований, помещенной в приложении:

$$\begin{aligned} HG(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{K'}{s(a+s)} \right\} = \frac{z-1}{z} \frac{(1 - e^{-aT_0})z}{(z-1)(z - e^{-aT_0})} \frac{K'}{a} = \\ &= \frac{(1 - e^{-aT_0})}{(z - e^{-aT_0})} \frac{K'}{a} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}. \end{aligned}$$

Подставив в полученное выражение те же значения параметров, что и в предыдущем примере, имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= -e^{-aT_0} = -0,5866, \\ b_1 &= (1 - e^{-aT_0}) \frac{K'}{a} = 0,4134. \end{aligned}$$

Сравнивая эти величины с полученными в примере 3.4.1, обратим внимание на то, что b_1 отличается от b_0 .

Примеры, в которых рассматриваются системы более высокого порядка, приводятся в разд. 3.7.2. Динамические свойства линейной стационарной системы с сосредоточенными параметрами полностью определяются его дифференциальным уравнением, имеющим вид

$$\begin{aligned} a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (3.4-11)$$

Применяя к этому уравнению преобразование Лапласа, получаем передаточную функцию по s:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_{m-1} s^{m-1} + a_m s^m} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (3.4-12)$$

Аналогичным образом, имея разностное уравнение

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m), \quad (3.4-13)$$

можно построить дискретную передаточную функцию, используя теорему о сдвиге вправо:

$$y(z) [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}] = u(z) [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}],$$

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (3.4-14)$$

3.4.3. Свойства дискретной передаточной функции

Статические системы

Если объект управления является статическим, коэффициент усиления импульсной системы можно определить, воспользовавшись теоремой о конечном значении

$$K = \frac{y(k \rightarrow \infty)}{u(k \rightarrow \infty)} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + a_1 + \dots + a_m}. \quad (3.4-15)$$

Системы с астатизмом

Если в объекте управления содержится «чистый» интеграл, импульсная передаточная функция системы имеет полюс при $z=1$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1' z^{-1} + \dots + a_m' z^{-(m-1)}}. \quad (3.4-16)$$

«Установившаяся» скорость изменения выходного сигнала такой системы при подаче на ее вход ступенчатого сигнала u_0 равна

$$\Delta y(k) = y(k) - y(k-1) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + a_1' + \dots + a_m'} u_0. \quad (3.4-17)$$

Если $b_0 \neq 0$, выход объекта претерпевает скачок при $k=0$. Однако для большинства реальных систем коэффициент b_0 равен нулю, поскольку при синхронной работе квантователей скачки невозможны хотя бы в силу инерционности исполнительных устройств и датчиков.

Системы с запаздываниями

Звену запаздывания, имеющему передаточную функцию

$$D(s) = e^{-T_1 s},$$

согласно теореме о сдвиге влево, соответствует импульсная передаточная функция

$$D(z) = z^{-d}, \quad (3.4-18)$$

если $T_1 = dT_0$, где $d=1, 2, 3, \dots$. Таким образом, при наличии запаздывания дискретная передаточная функция системы

имеет вид

$$DG(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = G(z) z^{-d}. \quad (3.4-19)$$

Реализуемость

Условия реализуемости формулируются по-разному, в зависимости от того, как записана дискретная передаточная функция — в виде функции переменной z или обратной ей переменной z^{-1} .

$$a) \quad G(z^{-1}) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}.$$

Данная передаточная функция и соответствующее ей разностное уравнение реализуемы, если бесконечный ряд

$$G(z^{-1}) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots,$$

полученный путем деления полинома числителя на полином знаменателя (ср. с уравнением (3.4-7)), не содержит членов со степенями z^1, z^2, \dots , поскольку реакция импульсной системы должна подчиняться принципу причинности. Отсюда имеем следующие условия реализуемости:

$$1) \quad \begin{array}{l} \text{если } b_0 \neq 0, \quad \text{то } a_0 \neq 0; \\ \text{если } b_i \neq 0, \quad \text{то } a_i \neq 0; \end{array}$$

$$\vdots$$

$$2) \quad \begin{array}{l} m \leq n \\ \geq \end{array}$$

$$б) \quad G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b'_0 + b'_1 z + \dots + b'_m z^m}{a'_0 + a'_1 z + \dots + a'_n z^n}.$$

$$(3.4-20)$$

Эта передаточная функция реализуема, если в соответствующем разностном уравнении

$$a'_0 u(k) + \dots + a'_n u(k+n) = b'_0 u(k) + \dots + b'_m u(k+m)$$

выходной сигнал $u(k+n)$ не зависит от более поздних значений выходного сигнала $u(k+m)$, что нарушало бы принцип причинности. Таким образом, для второй формы записи передаточной функции $G(z)$ условием реализуемости является выполнение неравенства

$$m \leq n. \quad (3.4-21)$$

При этом предполагается, что $a'_n \neq 0$.

Связь с импульсной переходной функцией

Импульсную переходную функцию можно определить по разностному уравнению (см. (3.4-13)), положив

$$\begin{array}{l} u(0) = 1, \\ u(k) = 0 \quad \text{для всех } k > 0. \end{array}$$

Согласно уравнению (3.4-1), это означает, что на вход системы подан единичный импульс.

Подставив указанные величины в разностное уравнение, записанное в форме

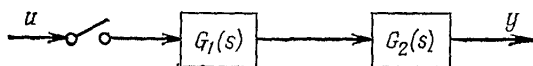
$$y(k) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n),$$

получим последовательность значений импульсной переходной функции:

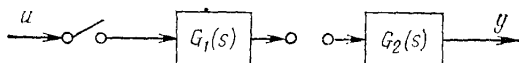
$$\left. \begin{aligned} g(0) &= b_0, \\ g(1) &= b_1 - a_1 g(0), \\ g(2) &= b_2 - a_1 g(1) - a_2 g(0), \\ &\vdots \\ g(k) &= b_k - a_1 g(k-1) - \dots - a_k g(0) \text{ при } k \leq m, \\ g(k) &= -a_1 g(k-1) - \dots - a_m g(k-m) \text{ при } k > m. \end{aligned} \right\} (3.4-22)$$

Последовательное соединение подсистем

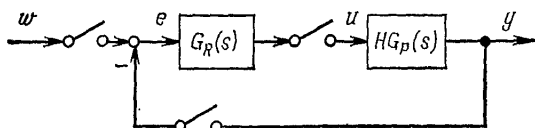
При вычислении дискретной передаточной функции для совокупности линейных подсистем, соединенных последовательно, сначала следует объединить подсистемы, между которыми нет квантовате-



$$a) y(z) = u(z) \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\} = u(z) \cdot G_1 G_2(z)$$



$$b) y(z) = u(z) \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \mathcal{Z}\{G_2(s)\} = u(z) \cdot G_1(z) \cdot G_2(z) \neq u(z) \cdot G_1 G_2(z)$$



$$в) y(z) = HG_p(z) \cdot G_R(z) \cdot [w(z) - y(z)]$$

Рис. 3.4.3. Вычисление дискретной передаточной функции для ряда последовательно соединенных подсистем.

лей, и получить их передаточные функции. Далее эти передаточные функции перемножаются. Указанное правило поясняется примерами, представленными на рис. 3.4.3. Заметим, что в результирующих выражениях каждому квантователю ¹⁾ соответствует один знак умножения.

¹ В последнем примере квантователи на входе системы и в цепи обратной связи объединяются. — Прим. перев.

3.5. ПОЛЮСА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

3.5.1. Расположение полюсов на плоскости z

Действительные полюса

В примере 3.4.1 было показано, что апериодическому звену с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K'}{a+s}, \quad (3.5-1)$$

на входе которого нет экстраполятора, соответствует дискретная передаточная функция

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{K'(z)}{z-z_1} = \frac{K'}{1-a_1z^{-1}} \quad (3.5-2)$$

с полюсом в точке

$$z_1 = a_1 = e^{-aT_0}. \quad (3.5-3)$$

Разностное уравнение, описывающее эту систему, имеет вид

$$y(k) - a_1y(k-1) = K'u(k). \quad (3.5-4)$$

Полагая, что сигнал на входе системы отсутствует, т. е. $u(k) = 0$, $k \geq 0$, и начальное значение выхода равно $y(0) \neq 0$, приходим к однородному разностному уравнению

$$y(k) - a_1y(k-1) = 0. \quad (3.5-5)$$

Отсюда можно получить следующую последовательность выходных сигналов:

$$\begin{aligned} y(1) &= a_1y(0), \\ y(2) &= a_1y(1) = a_1^2y(0), \\ &\vdots \\ y(k) &= a_1^ky(0). \end{aligned} \quad (3.5-6)$$

Переходный процесс в системе сходится к нулю, а сама система, следовательно, асимптотически устойчива только при условии $|a_1| < 1$. Вид переходных процессов для различных положений полюса a_1 на плоскости z иллюстрируется рис. 3.5.1. Заметим, что при отрицательных значениях a_1 наблюдаются колебания.

Полюса передаточных функций системы по s и по z связаны соотношением

$$z_1 = a_1 = e^{-aT_0}.$$

Отсюда следует, что полюсам на плоскости s , расположенным в области $-\infty < a < +\infty$, на плоскости z соответствуют полюса $\infty >$

$\text{Re } z_1 > 0$. Таким образом, на плоскости s отсутствует действительный полюс, соответствующий отрицательному значению z_1 .

Комплексно-сопряженные полюса

Система второго порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2DTs + 1} = \frac{K(a^2 + \omega_1^2)}{(s+a)^2 + \omega_1^2} = \frac{K(a^2 + \omega_1^2)}{(s-s_1)(s-s_2)},$$

где $a = D/T$, $\omega_1^2 = 1/T^2(1 - D^2)$, $s_{1,2} = -a \pm i\omega_1$, без экстраполятора нулевого порядка при входе обладает дискретной передаточной

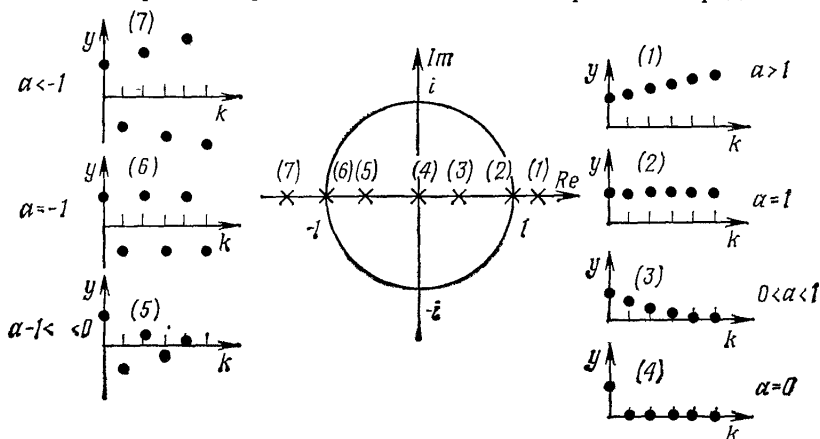


Рис. 3.5.1. Переходные процессы в системе с одним действительным полюсом, функцией

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\left(\alpha K \frac{a^2 + \omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_1 T_0 \right) z}{z^2 - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) z + \alpha^2} = \frac{b_1}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Здесь $\alpha = e^{-aT_0}$.

Полюса этой дискретной передаточной функции равны

$$z_{1,2} = \alpha [\cos \omega_1 T_0 \pm i \sin \omega_1 T_0] = \alpha e^{\pm i\omega_1 T_0}, \quad (3.5-7)$$

а соответствующее ей разностное уравнение имеет вид

$$y(k) - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) y(k-1) + \alpha^2 y(k-2) = 0.$$

Запишем решение этого уравнения при начальных условиях $y(0) = 0$ и $y(1) = \alpha \cos \omega_1 T_0$:

$$y(k) = \alpha^k \cos \omega_1 k T_0 \cdot y(0). \quad (3.5-8)$$

Графики изменения $y(k)$ для положительных значений α изображены на рис. 3.5.2. При отрицательных α переходные процессы носят колебательный характер. Следует, однако, иметь в виду, что на плоскости s соответствующие этим значениям полюса не существуют.

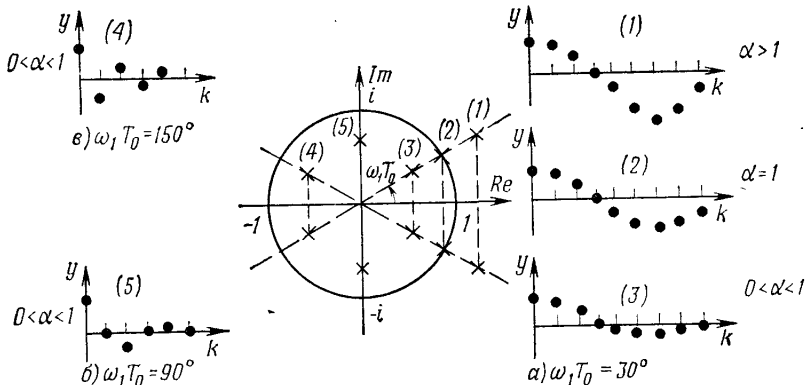


Рис. 3.5.2. Переходные процессы в системе с парой комплексно-сопряженных полюсов (граничная частота $\omega_{Sh}=\pi/T_0$).

3.5.2. Условие асимптотической устойчивости

Линейная система именуется асимптотически устойчивой, если после конечного однократного воздействия она возвращается к своему положению равновесия. Проведенный выше анализ влияния расположения полюсов на переходные процессы показал, что данное условие соблюдается только в том случае, когда полюса находятся внутри единичного круга на плоскости z . Иными словами, корни характеристического уравнения

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m) = 0 \quad (3.5-9)$$

должны удовлетворять неравенству

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5-10)$$

3.5.3. Билинейное преобразование и критерии устойчивости

Билинейное преобразование

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (3.5-11)$$

переводит точки единичной окружности на плоскости z в точки, лежащие на мнимой оси плоскости w , а внутренность круга переходит в левую полуплоскость w . Поскольку плоскость w в теории дискретных систем служит аналогом плоскости s для непрерывных систем, в ней можно применять критерии устойчивости Рауса или Гурвица.

С этой целью произведем подстановку

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (3.5-12)$$

в знаменатель

$$A(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m \quad (3.5-13)$$

передаточной функции

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.5-14)$$

В результате имеем

$$\bar{A}(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^m + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{m-1} + \dots + a_m, \quad (3.5-15)$$

а после умножения на $(1-w)^m$ — полином

$$\bar{\bar{A}}(w) = (1+w)^m + a_1 (1+w)^{m-1} (1-w) + \dots + a_m (1-w)^m. \quad (3.5-16)$$

Применим критерий Гурвица к уравнению

$$\bar{\bar{A}}(w) = 0. \quad (3.5-17)$$

Согласно данному критерию, все коэффициенты характеристического уравнения должны отличаться от нуля и иметь одинаковый знак. При этом условии в системе не могут возникнуть монотонно расходящиеся процессы. Для того чтобы в системе отсутствовали расходящиеся колебательные процессы, необходимо, чтобы были положительны главные определители матрицы Гурвица (или должны выполняться условия критерия Рауса).

Пример 3.5.1. Передаточная функция системы второго порядка имеет знаменатель

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2.$$

После подстановки $z = \frac{1+w}{1-w}$ имеем

$$\bar{A}(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_2.$$

Полученное выражение запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}}(w) &= (1+w)^2 + a_1 (1+w)(1-w) + a_2 (1-w)^2 = \\ &= (1-a_1+a_2)w^2 + 2(1-a_2)w + (1+a_1+a_2). \end{aligned}$$

Для системы второго порядка все коэффициенты $\bar{\bar{A}}(w)$ строго положительны, если

$$\begin{aligned} A(-1) &= 1 - a_1 + a_2 > 0, \\ A(1) &= 1 + a_1 + a_2 > 0, \\ a_2 &< 1. \end{aligned}$$

Применение данного критерия к системам порядка выше второго вызывает существенные затруднения, поскольку для его проверки

необходимо вычислять определители матрицы Гурвица. Описание других критериев устойчивости читатель сможет найти в литературе из списка, приведенного в конце книги.

3.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Важнейшую роль в современной теории систем управления, особенно при проектировании многомерных систем, играет метод пространства состояний. Переход к описанию в пространстве состояний может осуществляться различными способами. Ниже демонстрируются два из них. Первый заключается в прямой подстановке новых переменных в разностное уравнение, основу второго составляет аналитическое решение дифференциального уравнения, описывающего линейную систему с экстраполятором нулевого порядка.

Запись разностного уравнения в векторной форме (метод прямого программирования)

После подстановки в разностное уравнение (3.4-13) индексов, изменяющихся от k до $k+n$, получим

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) &= \\ &= b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k). \end{aligned} \quad (3.6-1)$$

Соответствующая дискретная передаточная функция имеет вид

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (3.6-2)$$

Введем следующие переменные состояния:

$$y(k) = x_1(k) \quad (3.6-3)$$

$$\left. \begin{aligned} y(k+1) &= x_2(k) = x_1(k+1) \\ y(k+2) &= x_3(k) = x_2(k+1) \\ \cdot &\quad \quad \quad \cdot \\ \cdot &\quad \quad \quad \cdot \\ y(k+n-1) &= x_n(k) = x_{n-1}(k+1) \\ x(k+n) &= x_n(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (3.6-4)$$

Подставим выражения (3.6-4) в уравнение (3.6-1), положив $b_n = 1$, а $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} = 0$:

$$y(k+n) = x_n(k+1) = -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_n x_1(k) + 1u(k). \quad (3.6-5)$$

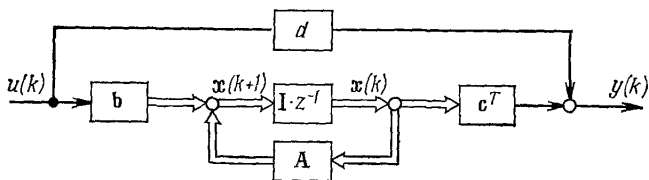


Рис. 3.6.2. Блок-схема системы, описываемой векторным разностным уравнением первого порядка.

векторного дифференциального уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ \text{дополнено уравнением выхода} \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.6-18)$$

Решение дифференциального уравнения (3.6-18) при начальном состоянии $\mathbf{x}(0)$ описывается выражением

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b}u(\tau) d\tau. \quad (3.6-19)$$

Матрица

$$\Phi(t) = e^{-\mathbf{A}t}, \quad (3.6-20)$$

которую называют переходной, определяется как ряд

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^v}{v!}. \quad (3.6-21)$$

Если входной и выходной сигналы подвергаются квантованию по времени, описание дискретной системы в пространстве состояний можно получить непосредственно из уравнений (3.6-18) и (3.6-19), полагая, что на выходе линейного объекта управления стоит экстраполятор нулевого порядка (см. рис. 3.4.2). Пусть входной сигнал остается постоянным на протяжении такта квантования, т. е.

$$u(t) = u(kT_0) \text{ при } kT_0 \leq t < (k+1)T_0.$$

В этом случае для начального состояния $\mathbf{x}(kT_0)$ уравнение состояния на интервале $kT_0 \leq t < (k+1)T_0$ приобретает вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - kT_0) \mathbf{x}(kT_0) + u(kT_0) \int_{kT_0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{b} d\tau. \quad (3.6-22)$$

Если интерес представляет только состояние в момент $t = (k+1)T_0$, то оно определяется как

$$\mathbf{x}((k+1)T_0) = \Phi(T_0) \mathbf{x}(kT_0) + u(kT_0) \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} \Phi((k+1)T_0 - \tau) \mathbf{b} d\tau.$$

Подставляя в это выражение новую переменную $q = (k+1) \times T_0 - \tau$, для которой $dq = -d\tau$, получим

$$x(k+1) = \Phi(T_0)x(k) + u(k) \int_0^{T_0} \Phi(q) b dq. \quad (3.6-23)$$

С целью сокращения записи введем следующие обозначения:

$$A = \Phi(T_0) = e^{AT_0}, \quad (3.6-24)$$

$$b = \int_0^{T_0} \Phi(q) b dq. \quad (3.6-25)$$

При этом векторное разностное уравнение принимает окончательный вид

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k). \quad (3.6-26)$$

Воспользовавшись соотношением (3.6-18), запишем также уравнение выхода

$$y(k) = c^T x(k) + du(k), \quad (3.6-27)$$

где $c^T = c^T$ и $d = d$.

Со способами вычисления выражений (3.6-24) и (3.6-25) можно ознакомиться в книге [2.19].

Канонические формы

Применяя линейные преобразования вида

$$x_t = Tx, \quad (3.6-28)$$

можно получать различные формы представления моделей линейных объектов управления в пространстве состояний. Запишем преобразованные уравнения состояния и выхода:

$$x_t(k+1) = A_t x_t(k) + b_t u(k), \quad (3.6-29)$$

$$y(k) = c_t^T x_t(k) + du(k), \quad (3.6-30)$$

где

$$A_t = TAT^{-1}, \quad b_t = Tb, \quad c_t^T = c^T T^{-1}. \quad (3.6-31)$$

Некоторые варианты описания в пространстве состояний, которым соответствуют A_t , b_t и c_t , обладающие определенной структурой, называют каноническими формами. Наиболее часто применяемые канонические формы представлены в табл. 3.6.1, а соответствующие им структурные схемы изображены на рис 3.6.3.

Объекты управления с запаздыванием

Предположим, что в пространстве состояний требуется построить модель объекта, вносящего задержку, равную $d = T_t/T_0 = 1, 2, \dots$. Указанная модель должна иметь динамическую часть с ограничен-

Таблица 3.6.1

Канонические формы описания в пространстве состояний

Название	A_t	b_t	c_t	Примечания
Диагональная каноническая форма	$\begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_m \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} b_{1, D} \\ b_{2, D} \\ \vdots \\ b_{m, D} \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} c_{1, D} \\ c_{2, D} \\ \vdots \\ c_{m, D} \end{bmatrix}$	Все собственные значения z_1, z_2, \dots, z_m различны. Каждое из них соответствует отдельной составляющей движения. Матрица A_t определяется из соотношения $T^{-1}A_t = AT^{-1}$. Векторы b_t или $c_t = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, если объект полностью управляем и наблюдаем
Вертикальная сопровождающая каноническая форма	$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_m \\ 1 & \dots & 0 & -a_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c^T b \\ c^T A b \\ \vdots \\ c^T A^{m-1} b \end{bmatrix}$	$c_t^T = [c_{1, s} \ c_{2, s} \ \dots \ c_{m, s}]$ $c_t^T = [g(1), g(2), \dots, g(m)]$
Каноническая форма управляемости (нормальная форма)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_m \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$	
Горизонтальная сопровождающая каноническая форма	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c^T b \\ c^T A b \\ \vdots \\ c^T A^{m-1} b \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	$b_t^T = [b_1 \ \text{в} \ b_2 \ \text{в} \ \dots \ b_m, \ \text{в}]$ $b_t^T = [g(1), g(2), \dots, g(m)]$
Каноническая форма наблюдаемости	$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_m \\ 1 & \dots & 0 & -a_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$	

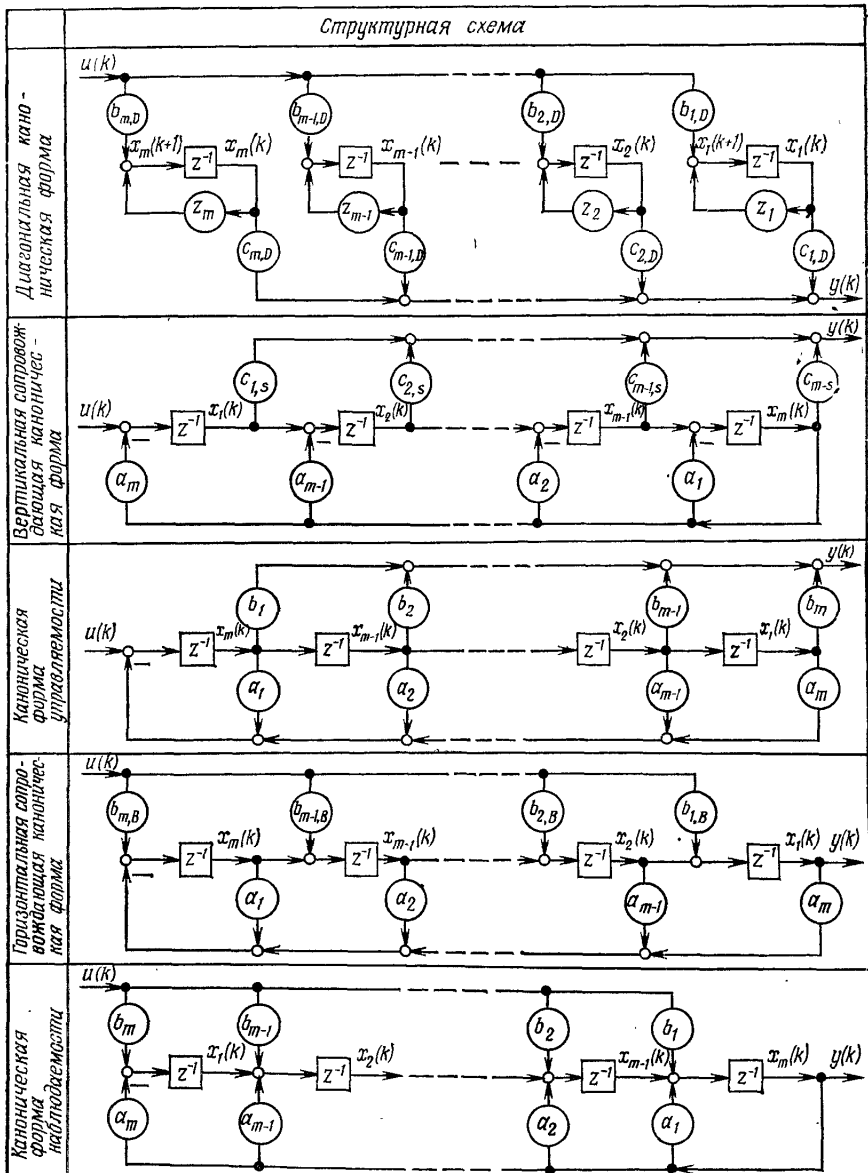


Рис. 3.6.3. Структурные схемы, соответствующие каноническим формам описания в пространстве состояний,

ными параметрами. При этом элементы задержки можно располагать на входе модели, на ее выходе или между переменными состояниями.

Модель с задержкой на входе имеет вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k-d), \quad (3.6-32)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k), \quad (3.6-33)$$

с задержкой на выходе —

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), \quad (3.6-34)$$

$$y(k+d) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k). \quad (3.6-35)$$

Запаздывание можно представить в виде совокупности d единичных задержек, помещаемых на входе или на выходе системы. При

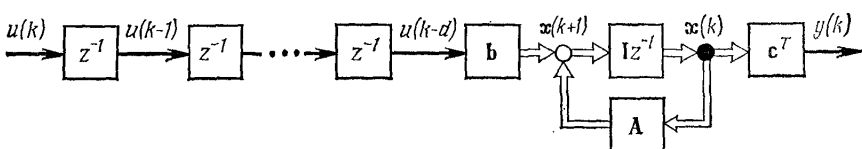


Рис. 3.6.4. Структурная схема линейного объекта управления с задержкой на входе.

этом переменные состояния, соответствующие элементарным задержкам, должны включаться в вектор состояния. Задержке на входе (ср. с рис. 3.6.4) соответствует следующая форма описания в пространстве состояний:

$$\mathbf{x}_u(k+1) = \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(k) + \mathbf{b}_u u(k), \quad (3.6-36)$$

$$u(k-d) = \mathbf{c}_u^T \mathbf{x}_u(k), \quad (3.6-37)$$

где $\mathbf{x}_u^T(k) = [u(k-d) \ u(k-d-1) \ \dots \ u(k-1)]$,

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6-38)$$

$$\mathbf{c}_u^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0].$$

Объединив уравнения (3.6-32) и (3.6-36), получим расширенную систему

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b}\mathbf{c}_u^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_u \end{bmatrix} u(k), \quad (3.6-39)$$

$$y(k) = [\mathbf{c}^T \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{bmatrix}, \quad (3.6-40)$$

которую можно представить в более компактном виде:

$$\mathbf{x}_d(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{b}_d u(k), \quad (3.6-41)$$

$$y(k) = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d(k). \quad (3.6-42)$$

Запишем матрицу расширенной системы, полагая, что матрица имеет структуру, соответствующую канонической форме управляемости:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6-43)$$

Методы описания систем с задержками в пространстве состояний рассматриваются в ряде работ, в частности [3.1] и [3.2] (см. также раздел 9.1).

Решение векторного разностного уравнения

Ниже предлагаются некоторые способы решения разностного уравнения

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), \quad (3.6-26)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k). \quad (3.6-27)$$

Первый из них заключается в построении рекуррентной процедуры решения разностного уравнения для заданной последовательности входных сигналов $u(k)$ при начальных условиях $\mathbf{x}(0)$. Эта процедура описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0), \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1), \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{b}u(0) + \mathbf{b}u(1), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{b}u(k-i). \quad (3.6-44)$$

Решение
однородного
уравнения

Частное
решение
(сумма свертки)

Здесь $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_k$.

Выходной сигнал $y(k)$ вычисляется из уравнения (3.6-27).

Если $u(k)$ задается неявно, в форме z -преобразования, можно воспользоваться вторым способом решения. Запишем z -преобразование для вектора состояния:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} \{ \mathbf{x}(k) \} &= \mathbf{x}(z), \\ \mathfrak{z} \{ \mathbf{x}(k+1) \} &= z [\mathbf{x}(z) - \mathbf{x}(0)] \end{aligned}$$

(применяется теорема о сдвиге влево).

С другой стороны, из уравнения (3.6-26) следует, что

$$z [\mathbf{x}(z) - \mathbf{x}(0)] = \mathbf{A} \mathbf{x}(z) + \mathbf{b} u(z) \quad (3.6-45)$$

или

$$\mathbf{x}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z \mathbf{x}(0) + [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} u(z). \quad (3.6-46)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.6-27), получаем

$$y(z) = \mathbf{c}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z \mathbf{x}(0) + [\mathbf{c}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} + d] u(z). \quad (3.6-47)$$

Сравнивая уравнения (3.6-46) и (3.6-44), можно вывести следующее условие:

$$\mathbf{A}^k = \mathfrak{z}^{-1} \{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} z \}. \quad (3.6-48)$$

Вычисление z -передаточной функции

Из уравнения (3.6-47) при нулевых начальных условиях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ следует, что

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \mathbf{c}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{b} + d \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]}. \quad (3.6-49)$$

Знаменатель полученной передаточной функции составляет левую часть *характеристического уравнения*

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0. \quad (3.6-50)$$

Вычисление импульсной переходной функции

Объединим уравнения (3.6-27) и (3.6-44), положив $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$:

$$y(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{b} u(k-i) + d u(k). \quad (3.6-51)$$

Пусть входной сигнал имеет вид

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k>0. \end{cases}$$

При этом импульсная переходная функция определяется рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} g(0) &= d, \\ g(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} \text{ для } k > 0. \end{aligned} \quad (3.6-52)$$

Отсюда можно получить соотношение, связывающее импульсную переходную функцию и z -передаточную функцию [ср. с уравнением (3.4-22)]:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = d + \sum_{k=1}^{\infty} c^T A^{k-1} b z^{-k}. \quad (3.6-53)$$

Управляемость

Линейный динамический объект называют управляемым, если существует реализуемая последовательность управляющих воздействий $u(k)$, позволяющая перевести объект из произвольного начального состояния $x(0)$ в любое конечное состояние $x(N)$ на ограниченном интервале времени, равном N тактов квантования.

Для того чтобы получить указанную последовательность $u(k)$, можно воспользоваться уравнением (3.6-44). Для объекта со скалярным входом

$$x(N) = A^N x(0) + [b, Ab, \dots, A^{N-1}b] u_N, \quad (3.6-54)$$

где

$$u_N^T = [u(N-1) \ u(N-2) \ \dots \ u(0)]. \quad (3.6-55)$$

При $N=m$ неизвестный вектор входных воздействий определяется однозначно по формулам

$$u_m = Q_s^{-1} [x(m) - A^m x(0)], \quad (3.6-56)$$

$$Q_s = [b \ Ab \ \dots \ A^{m-1}b], \quad (3.6-57)$$

если

$$\det Q_s \neq 0. \quad (3.6-58)$$

Матрица Q_s называется *матрицей управляемости*. Она не должна иметь линейно зависимых столбцов (строк). Следовательно, объект управляем, если выполняется условие

$$\text{Rank } Q_s = m, \quad (3.6-59)$$

где m — порядок матрицы A . Если $N < m$, решения относительно вектора u не существует, а при $N > m$ оно становится неоднозначным.

Наблюдаемость

Линейный динамический объект с выходной переменной $y(k)$ называют *наблюдаемым*, если произвольное состояние $x(k)$ можно определить, имея конечный набор выходных переменных $y(k)$, $y(k+1)$, ..., $y(k+N-1)$. Условия наблюдаемости выведем следующим образом.

Воспользовавшись уравнением выхода

$$y(k) = c^T x(k)$$

и векторным разностным уравнением (3.6-26), сформируем последовательность уравнений

$$\begin{aligned} y(k) &= c^T x(k), \\ y(k+1) &= c^T A x(k) + c^T b u(k), \\ y(k+2) &= c^T A^2 x(k) + c^T A b u(k) + c^T b u(k+1), \\ &\vdots \\ y(k+N-1) &= c^T A^{N-1} x(k) + [0, c^T b, c^T A b, \dots, c^T A^{N-2} b] u_N. \end{aligned}$$

(3.6-60)

Здесь

$$u_N^T = [u(k+N-1) \dots u(k+1) u(k)]. \quad (3.6-61)$$

Если все составляющие вектора входных воздействий u_N^T известны, для однозначного определения m неизвестных, образующих вектор состояния $x(k)$, из системы (3.6-60) достаточно взять m уравнений. Таким образом, $N=m$. При этом систему (3.6-60) можно записать в виде

$$y_m = Q_B x(k) + S u_m, \quad (3.6-62)$$

где

$$y_m^T = [y(k) \ y(k+1) \ \dots \ y(k+m-1)],$$

$$u_m^T = [u(k+m-1) \ \dots \ u(k+1) \ u(k)],$$

$$Q_B = [c^T c^T A \ \dots \ c^T A^{m-1}]^T,$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & c^T b & c^T A b & \dots & c^T A^{m-2} b \end{bmatrix}.$$

Отсюда найдем искомый вектор состояния

$$x(k) = Q_B^{-1} [y_m - S u_m]. \quad (3.6-63)$$

Решение существует, если $\det Q_B \neq 0$. Следовательно, динамический объект наблюдаем, если его матрица наблюдаемости Q_B имеет полный ранг, т. е.

$$\text{Rank } Q_B = m. \quad (3.6-64)$$

Иными словами, все m строк (столбцов) матрицы Q_B должны быть линейно независимы.

3.7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Проектированию сложных, высококачественных алгоритмов управления предшествует построение математических моделей объектов управления. Учитывая это, в данном разделе мы обсудим некоторые методы получения дискретных моделей объектов с сосредоточенными параметрами, иллюстрируя изложение примерами.

3.7.1. Основные типы технических объектов управления

Динамическое поведение технических объектов отличается разнообразными особенностями. Ниже мы перечислим наиболее важные их свойства. Во всех технических объектах происходят процессы преобразования и/или переноса материалов, энергии и/или информации. Объекты можно классифицировать, руководствуясь следующими показателями:

- характером изменения сигналов во времени и по амплитуде
- способом переноса материалов, энергии, информации
- типом математической модели

1. Характер изменения сигналов во времени и по амплитуде

На рис. 3.7.1 изображены основные типы сигналов:

- непрерывные по амплитуде — непрерывные во времени (объекты с непрерывными сигналами)
- непрерывные по амплитуде — дискретные во времени [объекты с дискретными (квантованными по времени) сигналами. Получающиеся импульсы могут впоследствии подвергаться амплитудной, широтной или частотной модуляциям]
- дискретные по амплитуде — непрерывные во времени (объекты со ступенчатыми сигналами)

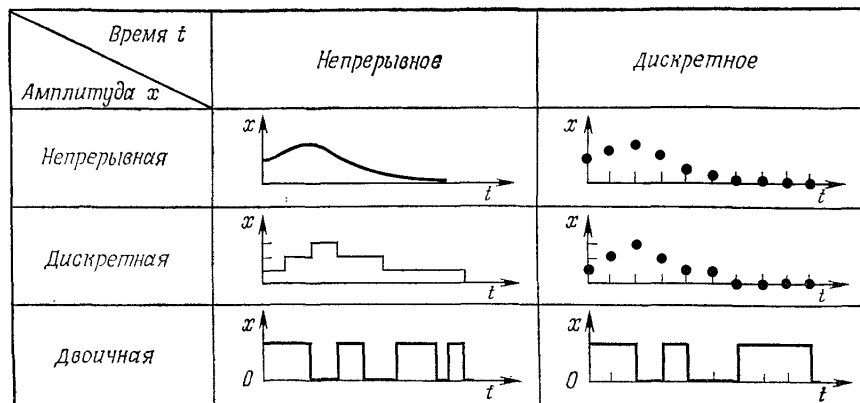


Рис. 3.7.1. Различные типы изменения сигналов во времени и по амплитуде.

- дискретные по амплитуде — дискретные во времени (объекты с дискретными цифровыми сигналами)
- двоичные по амплитуде — непрерывные или дискретные во времени (объекты с двоичными сигналами)

2. Способы переноса материалов, энергии и информации

В зависимости от способа переноса материалов, энергии и/или информации технические объекты можно разделить на следующие группы:

- **Непрерывные объекты**
 - перемещение материалов, энергии, информации в виде непрерывных потоков
 - непрерывное функционирование
 - сигналы: возможны любые сочетания сигналов всех типов, изображенных на рис. 3.7.1
 - математические модели: линейные и нелинейные, описываемые дифференциальными уравнениями (обыкновенными или в частных производных) либо разностными уравнениями
 - примеры: трубопроводы, электроэнергетические установки, электрические кабели для передачи аналоговых сигналов. Разнообразные процессы, используемые в энергетике и химической промышленности
- **Объекты с периодически возобновляемыми процессами**
 - перемещение материалов, энергии, информации «группами» или в виде прерываемых потоков
 - протекание процессов за ограниченное время
 - сигналы: возможны многие сочетания сигналов, изображенных на рис. 3.7.1
 - математические модели: в основном нелинейные, описываемые либо обыкновенными дифференциальными (или в частных производных) уравнениями, либо разностными уравнениями
 - примеры: многие процессы в химической промышленности — некоторые химические реакции, процессы промывки, окраски, вулканизации
- **Объекты с разовыми процессами**
 - перемещение материалов, энергии, информации в виде отдельных «элементов»
 - однократное протекание процессов
 - сигналы: в основном дискретные по амплитуде (двоичные), непрерывные или дискретные во времени
 - математические модели: блок-схемы, программы для моделирования на ЭВМ
 - примеры: разнообразные процессы в машиностроении. Обработка деталей, транспортировка запасных частей, передача информации в запоминающих устройствах

3. Типы математических моделей

Математические модели, применяемые для описания процессов, происходящих в объектах непрерывного и периодического типов, можно разделить на следующие классы:

обыкновенные дифференциальные уравнения (модели с сосредоточенными параметрами)	— дифференциальные уравнения в частных производных (модели с распределенными параметрами)
линейные	— нелинейные
линейные по параметрам	— нелинейные по параметрам
стационарные	— изменяющиеся во времени
параметрические	— непараметрические
с непрерывными сигналами	— с дискретными сигналами

Обоснование идей, лежащих в основе подобной классификации математических моделей, читатель сможет найти в широкоизвестных работах по теории систем и технической кибернетике.

В этой книге проблемы проектирования алгоритмов управления рассматриваются главным образом применительно к непрерывным объектам и объектам с периодическими процессами, для описания которых могут использоваться модели, линеаризованные относительно некоторой рабочей точки. Поскольку при разработке цифровых систем управления основной интерес представляют математические модели с сигналами, дискретными во времени, в следующих разделах будут изложены некоторые методы построения таких моделей.

3.7.2. Построение дискретных моделей на основе непрерывных моделей

В данном разделе рассматриваются способы получения дискретных моделей, если известны модели непрерывного типа, описывающие поведение объектов с сосредоточенными параметрами.

При малых тактах квантования разностные уравнения можно получать из дифференциальных путем дискретизации последних. В частности, дифференциалы могут приближенно заменяться левыми разностями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta f(k)}{T_0} = \frac{f(k) - f(k-1)}{T_0}, \\ \frac{d^2f(t)}{dt^2} &\approx \frac{\Delta^2 f(k)}{T_0^2} = \frac{\Delta f(k) - \Delta f(k-1)}{T_0^2} = \\ &= \frac{f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)}{T_0^2}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.7-1)$$

При вычислении разностных уравнений и дискретных передаточных функций, соответствующих более продолжительным тактам квантования, обычно пользуются таблицами z-преобразований.

Исходной информацией служит либо весовая функция $g(t)=f(t)$, представленная в аналитической форме, либо передаточная функция $G(s)=f(s)$. По ним в таблице z -преобразований отыскивается требуемая передаточная функция $f(z)=G(z)$. Передаточные функции объектов высокого порядка предварительно раскладываются в сумму дробно-рациональных членов, каждый из которых представлен в таблице. Если имеется экстраполятор нулевого порядка, следует использовать формулу (3.4-10), а из таблицы z -преобразований брать передаточную функцию, соответствующую $G(s)/s$. (В дальнейшем $G(s)$ будет обычно заменяться $G(s)/s$, как в примере 3.7.1.)

Передаточную функцию высокого порядка

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^{p+1} c_j s^j}{(s-s_0)^p \prod_{i=1}^l (s-s_i)} \quad (3.7-2)$$

сначала необходимо представить в виде суммы

$$G(s) = \sum_{q=1}^p \frac{A_{0q}}{(s-s_0)^q} + \sum_{i=1}^l \frac{A_i}{(s-s_i)}.$$

Неопределенные коэффициенты вычисляют, используя формулы вычетов

$$A_{0q} = \frac{1}{(p-q)!} \left[\frac{d^{p-q}}{ds^{p-q}} [(s-s_0)^p G(s)] \right]_{s=s_0}, \quad (3.7-3)$$

$$A_i = [(s-s_i) G(s)]_{s=s_i}.$$

Как было показано в разд. 3.5.1, полюсы $G(s)$ и $G(z)$ связаны однозначным преобразованием $z = e^{T_0 s}$.

Зная дискретную передаточную функцию, можно сразу записать разностное уравнение, поскольку у него те же коэффициенты, что и у $G(z)$.

Пример 3.7.1. Требуется вычислить дискретную передаточную функцию объекта, имеющего непрерывную передаточную функцию

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s) \dots (1+T_m s)}$$

с экстраполятором нулевого порядка на входе.

Решение:

1. Раскладываем $G(s)/s$ на элементарные дроби:

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{K \frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2} \dots \frac{1}{T_m}}{s \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right) \dots \left(s + \frac{1}{T_m} \right)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + \frac{1}{T_1}} + \dots + \frac{A_m}{s + \frac{1}{T_m}},$$

$$A_i = \frac{-K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{1}{T_j}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \left(-\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)}, \quad i=1, \dots, m, \quad A_0=K.$$

2. Отыскиваем соответствующие им z -преобразования.

Если

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + \frac{1}{T_i}},$$

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - e^{-\frac{T_0}{T_i}} z^{-1}}.$$

3. Согласно уравнению (3.4-10), имеем

$$\begin{aligned} \text{HG}(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m (1 - e^{-T_0/T_i} z^{-1}) + \sum_{i=1}^m (1-z^{-1}) A_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (1 - e^{-T_0/T_j} z^{-1})}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{-T_0/T_i} z^{-1})}, \end{aligned}$$

В таблице 3.7.1 приведены коэффициенты $G(z)$ для различных значений такта квантования при $m=3$; $K=1$; $T_1=10$ с; $T_2=7,5$ с; $T_3=5$ с. Можно отметить, что с увеличением такта коэффициенты изменяются определенным образом:

- абсолютные значения параметров a_i уменьшаются;
- значения параметров b_i увеличиваются;
- сумма коэффициентов $\sum b_i = 1 + \sum a_i$ возрастает.

При больших значениях такта квантования справедливы неравенства $|a_3| \ll 1 + \sum a_i$ и $|b_3| \ll \sum b_i$. В силу этого коэффициенты a_3 и b_3 можно считать нулевыми. Практически это означает, что полученная модель объекта имеет не третий, а второй порядок.

Еще один метод расчета $\text{HG}(z)$ по $G(s)$, в котором не используются таблицы z -преобразований, основан на приближенном соотношении, введенном Тастином [3.3]:

$$S \approx \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}. \quad (3.7-4)$$

Вывод этой приближенной формулы не представляет затруднений. Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t u(t) dt, \quad (3.7-5)$$

Таблица 3.7.1.

Коэффициенты передаточной функции $G(z)$ для объекта, имеющего передаточную функцию $G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+7,5s)(1+5s)}$ с экстраполятором нулевого порядка на входе, при различных тактах квантования

T_0, c	2	4	6	8	10	12
b_1	0,00269	0,0186	0,05108	0,09896	0,15867	0,22608
b_2	0,00926	0,0486	0,1086	0,17182	0,22570	0,26433
b_3	0,00186	0,0078	0,01391	0,01746	0,01813	0,01672
a_1	-2,25498	-1,7063	-1,2993	-0,99538	-0,76681	-0,59381
a_2	1,68932	0,958	0,54723	0,31484	0,18243	0,10645
a_3	-0,42035	-0,1767	-0,07427	-0,03122	-0,01312	-0,00552
$\Sigma b_i = 1 + \Sigma a_i$	0,01399	0,0750	0,17362	0,28824	0,40250	0,50712

которому соответствует преобразование Лапласа

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ts}. \quad (3.7-6)$$

Если идеальный интеграл заменить численной операцией интегрирования по формуле *прямоугольников*, то при малых значениях T_0 справедливы следующие соотношения:

$$y(k) \approx \frac{T_0}{T} \sum_{i=1}^k u(i-1),$$

$$y(k-1) \approx \frac{T_0}{T} \sum_{i=1}^{k-1} u(i-1),$$

$$y(k) - y(k-1) \approx \frac{T_0}{T} u(k-1), \quad (3.7-7)$$

$$y(z) [1 - z^{-1}] \approx \frac{T_0}{T} u(z) z^{-1},$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} \approx \frac{T_0 z^{-1}}{T(1 - z^{-1})} = \frac{T_0}{T(z-1)}.$$

Учитывая, что при малых тактах квантования уравнения (3.7-6) и (3.7-7) должны практически совпадать, мы можем записать

$$s \rightarrow \frac{1}{T_0} (z-1).$$

Более точного приближения можно достичь с помощью опера-

ции интегрирования по формуле *трапеций*:

$$\begin{aligned} y(k) &\approx \frac{T_0}{T} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [u(i) + u(i-1)], \\ y(k-1) &\approx \frac{T_0}{T} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} [u(i) + u(i-1)], \\ y(k) - y(k-1) &\approx \frac{T_0}{2T} [u(k) + u(k-1)], \\ \frac{y(z)}{u(z)} &\approx \frac{T_0}{2T} \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \quad (3.7-8)$$

Следовательно, при малых T_0 имеет место зависимость

$$s \rightarrow \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}. \quad (3.7-9)$$

Этот же результат можно получить, ограничиваясь первым членом разложения в ряд функции $z = e^{T_0 s}$:

$$s = \frac{1}{T_0} \ln z \approx \frac{2}{T_0} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \dots \right]. \quad (3.7-10)$$

Пример 3.7.2. В таблице 3.7.2 приведены точные значения параметров дискретной передаточной функции $HG(z)$ при различных тактах квантования для объекта с непрерывной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+5s)},$$

на входе которого стоит экстраполятор нулевого порядка. Там же для сравнения помещены параметры, полученные с использованием приближенного соотношения (3.7-4):

$$H\tilde{G}(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}}$$

Кроме того, в таблице указаны значения ошибок, возникающих при расчете переходного процесса $y(k)$ по приближенной модели. Введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta y(k) &= \tilde{y}(k) - y(k), \\ y(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} y(k). \end{aligned}$$

От точной передаточной функции $HG(z)$ приближенная функция $H\tilde{G}(z)$ отличается тем, что в ней присутствует параметр $b_0 \neq 0$. Таким образом, между ними имеется определенное структурное различие. При малых тактах квантования ($T_0 \leq 2c$) оба способа дают достаточно близкие значения коэффициентов a_1 и a_2 , а максимальная ошибка в переходном процессе составляет менее 5%. Однако с увеличением такта ошибки растут. Время установления переходного процесса, за которое он достигает 95% от конечного значения $y(\infty)$, обозначим T_{95} . Для рассматриваемого объекта $T_{95} = 37$ с. Анализируя данные табл. 3.7.2, можно заключить следующее: если при вычислении переходного процесса допускаются ошибки $(\Delta y/y_\infty)_{\max}$ в пределах от 0,05 до 0,1, то максимальное относительное значение такта квантования T_{95}/T_0 может составлять от 17,5 до 8.

Таблица 3.7.2

Параметры функций $HG(z)$ и $\bar{H}\bar{G}(z)$, полученные путем подстановки $s = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}$, а также максимальные значения ошибки в переходном процессе для $\bar{H}\bar{G}(z)$.

$$\text{Здесь } G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+5s)}$$

T_0, c	b_0	b_1	b_2	a_1	a_2	Σb_i	$(\Delta y/y_\infty)_{\max}$ при t, c
1	0,00433	0,00906 0,00866	0,00819 0,00433	-1,72357 -1,72294	0,74082 0,74026	0,01725 0,01732	+0,024 6
2	0,01515	0,03286 0,03030	0,02690 0,01515	-1,48905 -1,48485	0,54881 0,54546	0,05976 0,06061	+0,048 6
4	0,04762	0,10869 0,09524	0,07286 0,04762	-1,11965 -1,09524	0,30119 0,28571	0,18155 0,19048	+0,087 8
6	0,08654	0,20357 0,17308	0,11172 0,08654	-0,85001 -0,78846	0,16530 0,13462	0,31529 0,34615	+0,124 6
8	0,12698	0,30324 0,25397	0,13625 0,12698	-0,65123 -0,53968	0,09072 0,04762	0,43949 0,50794	+0,146 8
12	0,20455	0,48833 0,40909	0,15708 0,20455	-0,39191 -0,15909	0,02732 -0,02273	0,63541 0,81812	+0,20 0

3.7.3. Упрощенное представление моделей объектов управления для дискретных сигналов

Если линейный объект описывается моделью с передаточной функцией вида

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\prod_{\beta=1}^m (1 + T_\beta s)}{(1 + 2DTs + T^2s^2) \prod_{\alpha=1}^{m-2} (1 + T_\alpha s)} e^{-T_t s} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_m s^m} e^{-T_t s}, \quad (3.7-11)$$

его динамические свойства могут оставаться практически постоянными независимо от того, охвачен он обратной связью или нет. Было показано (см. [3.4], [3.5]), что условием этого является неизменность обобщенной суммы постоянных времени:

$$T_\Sigma = 2DT + \sum_{\alpha=1}^{m-2} T_\alpha - \sum_{\beta=1}^m T_\beta + T_t = (a_1 - b_1) + T_t. \quad (3.7-12)$$

Отсюда можно сделать вывод, что упрощение моделей объектов должно проводиться таким образом, чтобы суммарные значения

энергий, масс или моментов, накапливаемых на протяжении переходного процесса, менялись незначительно. Логично предположить, что данное правило сохраняет силу и для дискретных моделей объектов, по крайней мере при малых тактах квантования.

Если интерес для проектировщика представляют только соотношения между входом и выходом объекта, непрерывную модель последнего перед переводом в дискретную форму желательно максимально упростить. В частности, в уравнении (3.7-12) следует заменить одним суммарным запаздыванием

$$T_t = \sum_{i=1}^l T_i$$

совокупность l постоянных времени T_i и сократить близкие друг другу нули и полюса ([3.4], [3.5]).

Если для получения моделей объектов управления применяются методы идентификации, величину запаздывания нужно выбирать такой, чтобы результирующая модель имела как можно меньший порядок m .

Рассмотрим теперь некоторые условия, которые должны соблюдаться при построении упрощенных дискретных моделей. Будем полагать, что исходная модель описывается передаточной функцией вида

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}. \quad (3.7-13)$$

В отличие от нормализованных динамических моделей изменения в параметрах a_1 и b_1 сказываются не только на динамических свойствах модели (3.7-13), но и на ее поведении в статическом режиме, так как влияют на коэффициент усиления. Следовательно, необходимо установить, при каких условиях отклонения параметров a_1 и b_1 от номинальных значений не приводят к изменению коэффициента усиления и обобщенных показателей, характеризующих динамику переходного процесса. Для объекта управления статического типа подобный показатель можно записать по аналогии с непрерывным случаем в виде

$$A' = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} [u(k) - y(k)]. \quad (3.7-14)$$

Предположим, что в качестве входного сигнала выбрана ступенчатая функция с уровнем u_0 , причем

$$y(k) \approx k u_0 \text{ для } k \geq 1,$$

где коэффициент усиления K определяется отношением

$$K = \sum_{i=0}^m b_i / \sum_{i=0}^m a_i. \quad (3.7-15)$$

Введем новый обобщенный показатель $A'' = A' / T_0 u_0$, для которого справедлива приближенная формула

$$A'' \approx \tilde{A} = \frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^l [u(k) - y(k)] = \frac{1}{u_0} \left[(l+1) u_0 - \sum_{k=0}^l y(k) \right]. \quad (3.7-16)$$

Просуммируем последовательность выражений, полученных из разностного уравнения, соответствующего передаточной функции (3.7-13):

$$\begin{aligned} a_0 y(0) &= & b_0 u(0); \\ a_0 y(1) &= -a_1 y(0) & + b_0 u(1) + b_1 u(0); \\ &\vdots & \\ a_0 y(m) &= -a_1 y(m-1) \dots - a_m y(0) & + b_0 u(m) \dots + b_m u(0); \\ &\vdots & \\ a_0 y(l) &= -a_1 y(l-1) \dots - a_m y(l-m) & + b_0 u(l) \dots + b_m u(l-m); \\ &\vdots & \end{aligned}$$

$$\frac{a_0 y(l+m) = -a_1 y(l+m-1) \dots - a_m y(l) + b_0 u(l+m) \dots + b_m u(l)}{a_0 \sum_{k=0}^{l+m} y(k) = -a_1 \sum_{k=0}^{+m-1} y(k) \dots - a_m \sum_{k=0}^l y(k) + b_0 \sum_{k=0}^{l+m} u(k) + \dots + b_m \sum_{k=0}^l u(k)} \quad (3.7-17)$$

Преобразовав это выражение с учетом (3.7-15) для $u(k) = u_0$ при $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m a_i \sum_{k=0}^l y(k) &= (l+1) u_0 \sum_{i=0}^m b_i + u_0 [m b_0 + (m-1) b_1 + \dots + b_{m-1}] - \\ &- K u_0 [m a_0 + (m-1) a_1 + \dots + a_{m-1}], \end{aligned}$$

подставим его в уравнение (3.7-16):

$$\tilde{A} = \frac{1}{\sum_{i=0}^m a_i} [m(a_0 - b_0) + (m-1)(a_1 - b_1) + \dots + (a_{m-1} - b_{m-1})]. \quad (3.7-18)$$

При малых отклонениях параметров имеем

$$\Delta \tilde{A} \approx \frac{\partial \tilde{A}}{\partial a_1} \Delta a_1 + \dots + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial a_m} \Delta a_m + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial b_0} \Delta b_0 + \dots + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial b_m} \Delta b_m. \quad (3.7-19)$$

Отсюда следует приближенное соотношение

$$\Delta \tilde{A} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^m a_i} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (m-i) (\Delta a_i - \Delta b_i) - \tilde{A} \sum_{i=0}^m \Delta a_i \right]. \quad (3.7-20)$$

Данное соотношение позволяет выявить некоторые свойства показателя \bar{A} :

а) Чувствительность \bar{A} к отклонениям параметров Δa_i и Δb_i тем выше, чем меньше номер i :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{A} / \partial a_i}{\partial \bar{A} / \partial a_0} &= \frac{(m-i) - \bar{A}}{m - \bar{A}}, \\ \frac{\partial \bar{A} / \partial b_i}{\partial \bar{A} / \partial b_0} &= \frac{m-i}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7-21)$$

б) Введем коэффициент относительной чувствительности

$$\frac{\partial \bar{A} / \partial b_i}{\partial \bar{A} / \partial a_i} = \frac{(m-i)}{\bar{A} - (m-i)} = \kappa.$$

Нетрудно видеть, что $\kappa \geq 1$ при $\bar{A} \leq 2(m-i)$.

Если коэффициент усиления $K=1$, из уравнения (3.7-15) следует, что при малых отклонениях параметров

$$K \approx \sum_{i=0}^m \left[\frac{\partial K}{\partial a_i} \Delta a_i + \frac{\partial K}{\partial b_i} \Delta b_i \right] = \frac{1}{\sum_{i=0}^m a_i} \sum_{i=0}^m (\Delta b_i - \Delta a_i). \quad (3.7-22)$$

Положив $\Delta \bar{A} = 0$ и $\Delta K = 0$, составим два уравнения, связывающих величины Δa_i и Δb_i . Поскольку при $m \geq 1$ неизвестных Δa_i и Δb_i всегда больше двух, эти уравнения имеют бесчисленное множество решений.

Одно из возможных решений можно получить непосредственно из уравнений (3.7-20) и (3.7-22), задавшись

$$\Delta a_i = \Delta b_i, \quad i=0, 1, \dots, m \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^m \Delta a_i = 0. \quad (3.7-23)$$

Таким образом, величины \bar{A} и K остаются практически неизменными при малых отклонениях параметров, если $\Delta a_1 = \Delta b_1$, $\Delta a_2 = \Delta b_2$ и т. д. и одновременно $\Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots + \Delta a_m = 0$.

Можно, однако, найти и другие решения, одно из которых иллюстрируется приведенным ниже примером.

Пример получения упрощенной модели объекта управления (понижение порядка модели). Из табл. 3.7.2 определим дискретную передаточную функцию объекта управления для такта квантования $T_0 = 10$ с:

$$HG(z) = \frac{0,1587z^{-1} + 0,2557z^{-2} + 0,0181z^{-3}}{1 - 0,7668z^{-1} + 0,1824z^{-2} - 0,0131z^{-3}}.$$

Данный объект характеризуется показателями $K=1$ и $\bar{A}=2,75$. Заметим, что параметры его передаточной функции связаны соотношениями $b_1 \leq 1 + \sum a_i$ и $b_3 \leq \sum b_i$. Это дает основания предполагать, что объект может быть с достаточной точностью описан моделью порядка $m=2$.

Из уравнения (3.7-20) следует, что

$$\Delta \tilde{A} \approx \frac{1}{\Sigma a_i} [2(\Delta a_1 - \Delta b_1) + (\Delta a_2 - \Delta b_2) - \tilde{A}(\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3)] = 0,$$

а из уравнения (3.7-22)

$$\Delta K \approx \frac{-1}{\Sigma a_i} [(\Delta a_1 - \Delta b_1) + (\Delta a_2 - \Delta b_2) + (\Delta a_3 - \Delta b_3)] = 0.$$

Если положить $\tilde{a}_3 = 0$ и $\tilde{b}_3 = 0$, то $\Delta a_3 = -a_3$ и $\Delta b_3 = -b_3$.

После этого в двух полученных выше уравнениях остается четыре неизвестные величины. Следовательно, две из них можно задавать произвольно. Положим, например,

$$\Delta a_2 = -\Delta a_3 \text{ и } \Delta b_1 = 0.$$

При этом имеем

$$2\Delta a_1 + (a_3 - \Delta b_2) - \tilde{A}(\Delta a_1 + a_3 - a_3) = 0$$

или

$$-0,75\Delta a_1 - \Delta b_2 = 0,0131 \text{ и } \Delta a_1 + (a_3 - \Delta b_2) + (-a_3 + b_3) = 0 \text{ или } \Delta a_1 - \Delta b_2 = 0,0181.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= -0,0178; & \Delta a_2 &= -0,0131; \\ \Delta b_2 &= +0,0003; & \Delta b_1 &= 0. \end{aligned}$$

В результате получена новая модель, описываемая дискретной передаточной функцией

$$\tilde{H}\tilde{G}(z) = \frac{0,1587z^{-1} + 0,2260z^{-2}}{1 - 0,7847z^{-1} + 0,1693z^{-2}}.$$

Эта приближенная модель имеет коэффициент усиления $\tilde{K} = 1,000$, а ее обобщенный показатель \tilde{A} изменился по сравнению с прежним всего на 1%.

Таким образом показано, что при построении упрощенных дискретных моделей объектов управления можно исходить из условий $\Delta \tilde{A} = 0$ и $\Delta K = 0$, используя уравнения (3.7-20) и (3.7-22). Подобный подход основывается на предположении о том, что определенные физические показатели, характеризующие динамические свойства объекта, должны оставаться постоянными.

Известны и другие способы понижения порядка модели. В частности, для этого предлагалось отбрасывать собственные значения, оказывающие незначительное влияние на динамику объекта [3.14]. Однако ответ на вопрос, какими именно собственными значениями можно пренебречь, далеко не всегда бывает однозначным. Кроме того, этот метод не позволяет скорректировать остающуюся после редукции часть модели.

3.7.4. Построение моделей и идентификация объектов

Модели динамических объектов определяются либо с помощью теоретических выкладок, либо путем обработки экспериментальных данных [3.4, 3.6—3.13].

Теоретический анализ, т. е. построение модели исходя из неко-

торых физических законов, заключается в составлении уравнений, определяющих положение равновесия, а также уравнений, описывающих внутреннее состояние объекта и внешние явления. Как правило, в результате подобного анализа получают систему дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), которая и является математической моделью объекта. Эта система определяет структуру модели, а также параметры, если она может быть решена в явной форме. Вывод дискретных моделей рекомендуется проводить, придерживаясь следующей традиционной схемы: исходная непрерывная модель заменяется приближенной с сосредоточенными параметрами, затем производится упрощение последней, после чего она подвергается дискретизации или к ней применяется z -преобразование, описанное в разд. 3.7.2.

При экспериментальном анализе (или идентификации) объектов исходной информацией для построения математических моделей служат сигналы, доступные непосредственному измерению. Входные и выходные сигналы объекта обрабатываются с использованием методов идентификации, которые позволяют описать соотношения между этими сигналами в виде некоторой математической зависимости. Полученная модель может быть непараметрической (например, переходная функция или частотная характеристика, заданные в табличной форме) или параметрической (например, системы дифференциальных или разностных уравнений, зависящих от параметров). Для построения непараметрических моделей обычно применяются методы, основанные на преобразовании Фурье или корреляционном анализе. Параметрические модели получают с помощью статистических методов оценки параметров или методов настройки параметров по заданным частотным характеристикам или реакциям на ступенчатое воздействие. При синтезе алгоритмов для управляющих ЭВМ целесообразно пользоваться параметрическими моделями, поскольку современная теория систем в основном ориентирована на описание объектов, содержащее параметры в явной форме. Кроме того, для синтеза алгоритмов управления по параметрическим моделям могут применяться аналитические методы.

Идентификацию дискретных параметрических моделей наиболее удобно проводить с использованием статистических методов оценки параметров. В этом случае линейные стационарные объекты обычно описываются моделями вида

$$y(z) = \underbrace{\frac{B(z-1)}{A(z-1)}}_{\text{Модель объекта}} z^{-d} u(z) + \underbrace{\frac{D(z-1)}{C(z-1)}}_{\text{Модель возмущений}} v(z) \quad (3.7-24)$$

Модель объекта

Модель возмущений

[ср. с уравнениями (3.4-14) и (12.2-31)].

Оценки неизвестных параметров моделей объекта и случайных возмущений определяются путем обработки измеряемых сигналов $u(k)$ и $y(k)$ [3.13].

В основе алгоритмов обработки лежат такие известные методы идентификации, как метод наименьших квадратов, метод вспомогательных переменных, метод максимального правдоподобия, реализуемые либо в рекуррентной, либо в нерекуррентной формах. В последние годы разработке методов идентификации уделялось большое внимание. Были созданы и успешно опробованы методы, предназначенные как для работы в реальном времени, так и для обработки накопленной информации. В настоящее время с достаточно высокой точностью можно выполнять идентификацию объектов различных классов — линейных и нелинейных, в составе разомкнутых или замкнутых контуров управления, при наличии случайных возмущений и без них. Созданы пакеты прикладных программ, с помощью которых можно определять порядок моделей и величину запаздывания (см. гл. 23, 24 и 29).

Системы управления с детерминированными возмущениями

ГЛАВА 4

Детерминированные системы управления

Детерминированные системы управления являются системами управления, проектируемыми для детерминированных внешних воздействий или детерминированных начальных условий. Детерминированными воздействиями или начальными условиями считаются те, которые в отличие от стохастических могут быть точно описаны в аналитической форме.

Системы управления можно разделить на системы управления с задающим сигналом и терминальные системы управления. В дальнейшем предполагается, что объекты управления имеют одну управляющую переменную $u(k)$, одну регулируемую переменную $y(k)$, вектор состояния $x(k)$ и возмущающие воздействия $v(k)$, как показано на рис. 4.1. В системах управления с задающим сигналом регулируемая переменная $y(k)$ должна как можно более точно обрабатывать задающий сигнал $w(k)$, т. е. изменяться так, чтобы ошибка управления $e(k) = w(k) - y(k)$ была как можно меньше ($e(k) \approx 0$). Если задающая переменная изменяется во времени, то необходимо проектировать систему управления с переменным задающим сигналом или следящую систему управления. Если регулируемой переменной является положение, скорость или ускорение, то соответствующую систему управления также называют *серворегулятором*. Если задающая переменная системы управления остается постоянной, то такая система называется системой *стабилизации*.

В терминальных системах управления конечное результирующее состояние $x(N)$ процесса должно быть достигнуто в заданный или произвольный момент времени N . Как в системах управления с задающим сигналом, так и в терминальных системах управления влияние начальных условий $x(0)$ и возмущающих воздействий $v(k)$ должно быть скомпенсировано, насколько это возможно. Более того, задачей управления также является обеспечение с помощью обратных связей устойчивости всей системы при неустойчивом процессе.

Указанные задачи, как правило, могут быть решены за счет введения обратной связи по выходной координате $y(k)$ или состояниям

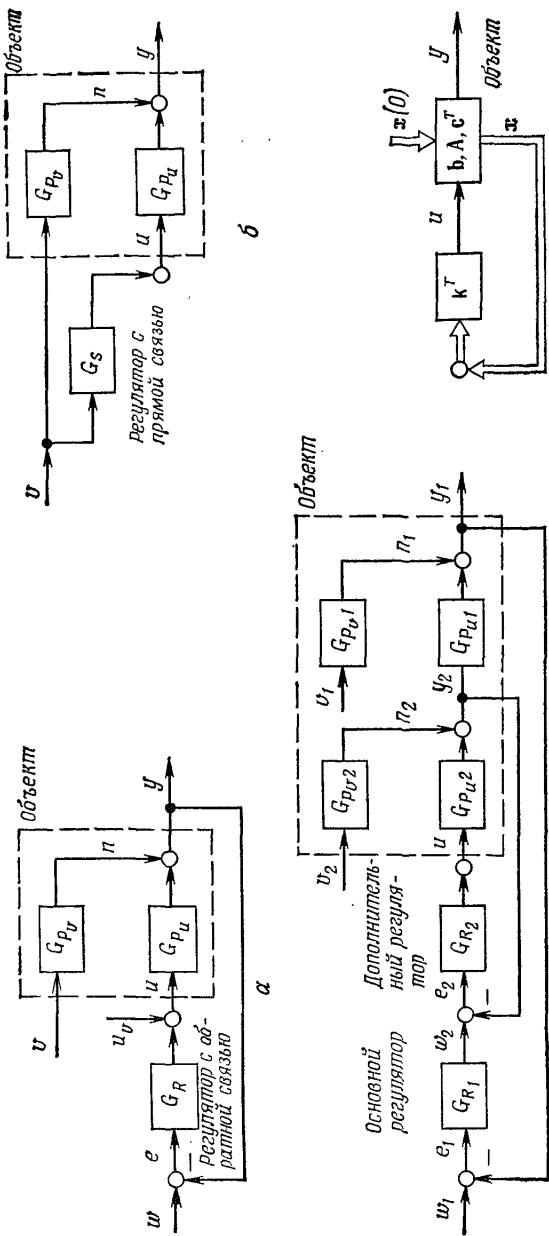


Рис. 4.1. Блок-схемы основных типов систем управления с одной регулируемой переменной.

а — одноконтурная система; б — система с прямой связью; в — каскадная система управления; г — обратная связь по состоянию.

$x(k)$ объекта. Введение обратных связей часто сопровождается формированием дополнительных элементов управления в прямой цепи. На рис. 4.1 представлены блок-схемы систем управления для случаев, когда управление выходной переменной $y(k)$ осуществляется с помощью одного контура обратной связи или одной прямой цепи. На рисунке использованы следующие обозначения: G_R — регулятор или управляющий алгоритм, использующий обратную связь; G_S — регулятор или управляющий алгоритм с прямой связью.

На рис. 4.1,а показана одноконтурная система управления с обратной связью. Если возмущающее воздействие $v(k)$ может быть измерено, то можно использовать регулятор с прямой связью, показанный на рис. 4.1,б, в сочетании с обратными связями для тех

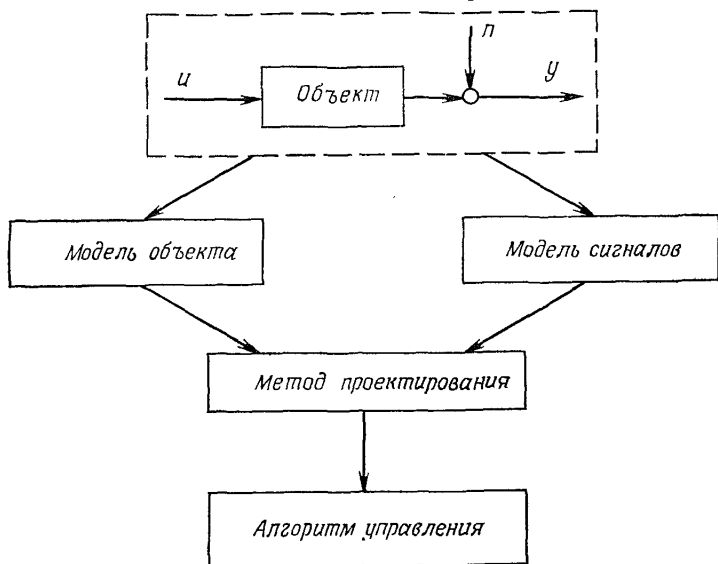


Рис. 4.2. Схема процесса проектирования алгоритмов управления.

возмущений, которые не могут быть скомпенсированы данным регулятором. Если между точкой приложения управляющего воздействия и регулируемой переменной существуют измеримые переменные объекта, которые можно использовать для формирования обратных связей, то можно сформировать вспомогательные контуры управления или, как показано на рис. 4.1,в, каскадные системы управления с основными и дополнительными контурами управления. Схема введения обратных связей по состоянию для повышения устойчивости системы или изменения характера собственных движений объекта показана на рис. 4.1, г.

Обобщенная схема процесса проектирования систем управления приведена на рис. 4.2. В качестве исходных данных для проектирования используются точные или приближенные *математические*

модели объектов управления и сигналов (возмущающих воздействий, задающих сигналов, начальных условий), что зависит от требований к системе и выбранных методов проектирования. В разд. 3.7 описаны методы построения математических моделей объектов управления. Часто модели сигналов могут быть получены лишь в приближенном виде. Например, нередко предполагается ступенчатое изменение сигналов, хотя на практике такого типа сигналы достаточно редки. Однако применение современных ЭВМ позволяет достаточно просто получить более точные модели детерминированных и стохастических сигналов.

В книге будут рассмотрены методы проектирования линейных систем управления для линеаризуемых инвариантных объектов с сигналами, которые измеряются дискретно. Схема классификации основных систем управления и методов их расчета приведена на рис. 4.3.

На схеме выделены две основные группы: *параметрически и структурно оптимизируемые системы* управления. Системы, структура которых, т. е. вид и порядок описывающих их уравнений, задана, а свободные параметры подстраиваются под управляемый объект с использованием критерия оптимизации или определенных правил настройки, называются *параметрически оптимизируемыми*. Системы управления называются *структурно оптимизируемыми*, если и структура, и параметры регулятора оптимально подстраиваются под структуру и параметры модели объекта. В каждой из рассмотренных двух основных групп регуляторов можно выделить несколько подгрупп: для параметрически оптимизируемых регуляторов это различные типы ПИД-регуляторов невысокого порядка. Структурно оптимизируемые регуляторы подразделяются на компенсационные регуляторы и регуляторы с управлением по состоянию (регуляторы состояния). Обычно при проектировании используют *правила настройки, критерии качества или задают расположение полюсов замкнутой системы*. На рис. 4.3 приведены также названия наиболее важных регуляторов и указана возможность их использования для *детерминированных и стохастических возмущений*.

Решающую роль при проектировании играет выбор критерия управления. Компенсационные регуляторы задают качество процессов по управляемым переменным либо на протяжении всего времени переходного процесса, либо после некоторого конечного интервала времени. Использование заданного распределения полюсов определяет характер поведения управляемых переменных лишь приближенно, поскольку полюсы соответствуют изолированным собственным движениям. В то же время суперпозиция полюсов, нули системы и характер внешних возмущений при таком подходе не учитываются.

Более полно задать поведение систем управления позволяют прямые методы расчета, которые основаны на использовании различных

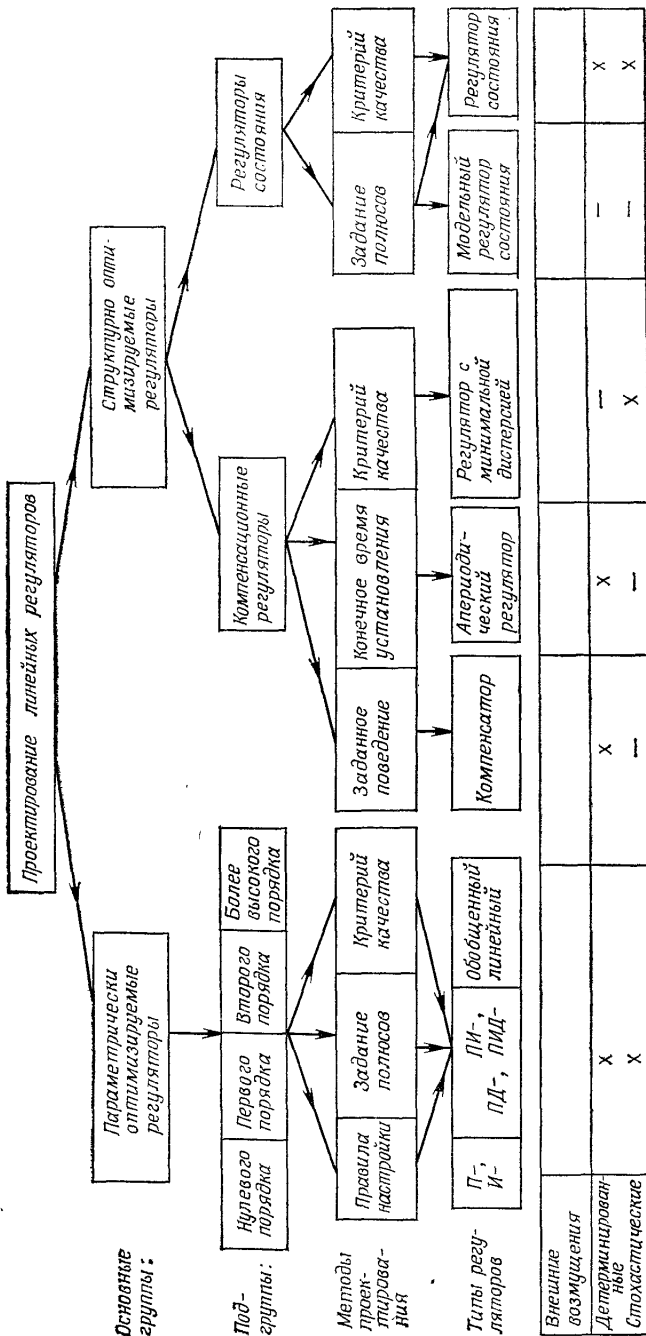


Рис. 4.3. Линейные регуляторы.

критериев качества. В последнее время при проектировании непрерывных систем управления, как правило, используют интегральные критерии качества — интеграл от ошибки управления, квадрата ошибки управления, абсолютной величины этой ошибки и т. д. Следует отметить, что в этих интегральных критериях можно также учитывать и время. Для построения дискретных систем управления соответствующие критерии задаются в следующем виде:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e(k) \quad \text{— сумма ошибок,}$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(k) \quad \text{— сумма квадратов ошибок,}$$

$$I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} |e(k)| \quad \text{— сумма абсолютных значений ошибок,}$$

$$I_4 = \sum_{k=0}^{\infty} k |e(k)| \quad \text{— сумма произведения абсолютных значений ошибок на время.}$$

Поскольку критерий I_1 неприменим в случаях, когда значения ошибки являются знакопеременными, наиболее часто при проектировании используют критерий I_2 . Однако использование второго критерия приводит к значительным колебаниям переходного процесса, поэтому для обеспечения переходного процесса по управляемой переменной с большим демпфированием следует использовать критерии I_3 или I_4 .

При аналитическом расчете систем управления определенными преимуществами обладают квадратичные критерии качества. Это связано с тем, что при отыскании оптимальных значений квадратической функции ее первые производные представляются в виде математических соотношений, линейных относительно ошибки $e(k)$. Для введения дополнительных ограничений, в частности связанных с возможностью непосредственного влияния на степень демпфирования процессов в системе, при формировании критерия достаточно ввести квадратичный член, учитывающий величину отклонения управляемой переменной, с соответствующим весовым коэффициентом γ . Таким образом, в наиболее общем случае квадратичный критерий может быть представлен в следующем виде:

$$I_5 = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(k) + \gamma u^2(k). \quad (4.1)$$

Записывая последнее соотношение в пространстве состояний, получим другую форму представления квадратичного критерия:

$$I_6 = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) Q x(k) + \gamma u^2(k). \quad (4.2)$$

Поскольку эти квадратичные критерии можно использовать при проектировании как детерминированных, так и стохастических систем, в данной книге им уделяется основное внимание.

Независимо от выбора критерия качества необходимо также задать качество системы в установившемся состоянии. Как правило, к таким требованиям относится отсутствие статической ошибки регулирования при постоянном значении задающей переменной, а также при постоянных возмущающих сигналах $p(k)$, $v(k)$ и $u_r(k)$, т. е. должно выполняться условие $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$.

Используя теорему z-преобразования о конечном значении, в этом случае можно записать

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) e(z) = 0.$$

Для системы с одной обратной связью выражение для сигнала ошибки имеет следующий вид:

$$e(z) = \frac{1}{1 + G_R(z) G_P(z)} [w(z) - p(z)] - \frac{G_P(z)}{1 + G_R(z) G_P(z)} u_v(z), \quad (4.3)$$

поэтому при единичном ступенчатом сигнале $1(z) = z/(z - 1)$ различными возмущениям соответствуют различные условия, налагаемые на передаточные функции компонентов системы.

$$1. \quad w(k) = 1(k), \quad p(k) = 1(k),$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G_R(z) G_P(z)} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) G_P(z) = \infty.$$

$$2. \quad u_v(k) = 1(k) \text{ (возмущение на входе объекта),}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{G_P(z) z}{1 + G_R(z) G_P(z)} = 0;$$

$$a) \quad \lim_{z \rightarrow 1} G_P(z) \neq \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty \text{ и}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) G_P(z) = \infty;$$

$$б) \quad \lim_{z \rightarrow 1} G_P(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty.$$

Из приведенных соотношений следует, что во всех случаях для получения нулевой статической ошибки должно выполняться условие

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty. \quad (4.4)$$

Это условие удовлетворяется, если передаточная функция регулятора имеет полюс в точке $z = 1$:

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P'(z)(z-1)}, \quad (4.5)$$

т. е. в том случае, когда регулятор обладает интегрирующей характеристикой. Если же используется пропорциональный регулятор, а в передаточной функции объекта содержится полюс $z=1$, то при $w(k)=1(k)$ и $u_v(k)=1(k)$ происходит уменьшение статической ошибки. Однако для постоянного возмущения $p(k)=1(k)$ это несправедливо.

Аналогичные требования могут быть сформулированы для обеспечения нулевой установившейся ошибки при подаче в систему линейно или квадратично изменяющихся задающих сигналов. В этом случае регулятор должен содержать двукратный или трехкратный полюс в точке $z=1$ (см. [2.13]).

Параметрически оптимизируемые регуляторы

5.1. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

Поскольку обычно к параметрически оптимизируемым относят широко используемые П-, ПИ- или ПИД-регуляторы, первоначально предпринимались попытки просто преобразовать их уравнения с помощью дискретизации. Такой подход позволяет использовать накопленный опыт работы с аналоговыми регуляторами и в принципе применять уже хорошо известные правила настройки параметров. Более того, в этом случае нет необходимости проводить переподготовку обслуживающего персонала [5.1—5.5].

Идеализированное уравнение ПИД-регулятора имеет вид

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (5.1-1)$$

где введены следующие обозначения: K — коэффициент передачи, T_I — постоянная интегрирования; T_D — постоянная дифференцирования.

Для малых тактов квантования T_0 это уравнение можно преобразовать в разностное с помощью дискретизации, состоящей в замене производной разностью первого порядка, а интеграла — суммой. Непрерывное интегрирование может быть заменено интегрированием по методу прямоугольников или трапеций (см. разд. 3.2). При использовании метода прямоугольников получаем

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i-1) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - e(k-1)) \right]. \quad (5.1-2)$$

Таким образом, мы получили рекуррентный алгоритм управления. В нем для формирования суммы необходимо помнить все предыдущие значения сигнала ошибки $e(t)$. Поскольку каждый раз значение управляющего сигнала $u(k)$ вычисляется заново, этот алгоритм называют «позиционным» [5.1, 5.3].

Однако для программирования на ЭВМ более удобны рекуррентные алгоритмы. Эти алгоритмы отличаются тем, что для вычисления текущего значения управляющей переменной $u(k)$ используются ее предыдущее значение $u(k-1)$ и поправочный член. Для получения рекуррентного алгоритма достаточно вычесть из уравнения (5.1-2) следующее уравнение:

$$u(k-1) = K \left[e(k-1) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i-1) + \frac{T_D}{T_0} (e(k-1) - e(k-2)) \right]. \quad (5.1-3)$$

В результате получим

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \quad (5.1-4)$$

где

$$\begin{aligned} q_0 &= K \left(1 + \frac{T_D}{T_0} \right); \\ q_1 &= -K \left(1 + 2 \frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{T_1} \right); \\ q_2 &= K \frac{T_D}{T_0}. \end{aligned} \quad (5.1-5)$$

Теперь вычисляется только текущее приращение управляющей переменной:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1),$$

и поэтому этот алгоритм называют «скоростным».

Следует отметить, что после небольшой модификации способа интегрирования в уравнении (5.1-2) под знаком суммы можно использовать значения $e(k-1)$ вместо $e(k)$. При этом коэффициенты q_0 и q_1 изменятся и не будут соответствовать коэффициентам, полученным в разд. 5.2 для больших тактов квантования.

Если для аппроксимации интеграла использовать *метод трапеций*, то на основании уравнения (5.1-1) будет получено следующее соотношение:

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{T_0}{T_1} \left(\frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - e(k-1)) \right]. \quad (5.1-6)$$

Вычитая из него соответствующее уравнение для $u(k-1)$, получим другое рекуррентное выражение, описывающее динамику дискретного закона управления:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2),$$

где

$$\begin{aligned} q_0 &= K \left(1 + \frac{T_0}{2T_1} + \frac{T_D}{T_0} \right); \\ q_1 &= -K \left(1 + 2 \frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{2T_1} \right); \\ q_2 &= K \frac{T_D}{T_0}. \end{aligned} \quad (5.1-7)$$

Для малых тактов квантования параметры q_0 , q_1 и q_2 можно вычислить, используя параметры K , T_1 и T_D аналогового ПИД-регулятора в соответствии с соотношениями (5.1-5) или (5.1-7).

5.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ОПТИМИЗИРУЕМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ НИЗКОГО ПОРЯДКА

При больших тактах квантования рассмотренные в разд. 5.1 способы дискретной аппроксимации непрерывных регуляторов становятся несправедливыми. Поскольку к тому же непосредственное использование прямого z -преобразования невозможно из-за наличия дифференцирующих членов, связь между непрерывными и дискретными регуляторами в этом разделе будет опущена.

Рассмотрим простой контур управления, изображенный на рис. 5.2.1. Дискретная передаточная функция объекта управления с экстраполятором нулевого порядка имеет вид

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d}. \quad (5.2-1)$$

Обобщенная дискретная передаточная функция линейного регулятора записывается как

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}. \quad (5.2-2)$$

Этот алгоритм может быть реализован, если $p_0 \neq 0$. Однако соотношение порядков числителя и знаменателя может быть различным: $\nu \leq \mu$ или $\nu > \mu$. Обычно в таких регуляторах $q_0 \neq 0$, а значение p_0 выбирается равным 1.

В структурно оптимизируемых регуляторах порядки числителя и знаменателя передаточной функции μ и ν являются функциями со-

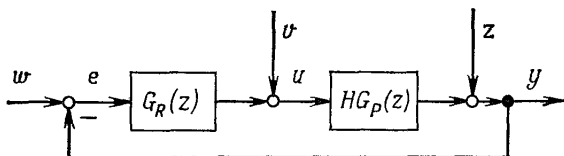


Рис. 5.2.1. Одноконтурная система управления.

ответствующих порядков модели объекта. Например, для аperiodических регуляторов $\nu = m$ и $\mu = m + d$. Однако в параметрически оптимизируемых регуляторах порядок регулятора может быть меньше порядка модели объекта, $\nu \leq m$ и $\mu \leq m + d$. Следовательно, параметрически оптимизируемые регуляторы требуют меньших затрат машинного времени в процессе эксплуатации.

При выборе структуры параметрически оптимизируемых регуляторов обычно необходимо гарантировать, чтобы изменения задающей переменной $w(k)$ и возмущений $u_v(k)$ и $p(k)$ (см. рис. 5.2.1) не приводили к появлению статической ошибки по сигналу $e(k)$. На основании теоремы z -преобразования о конечном значении для выполнения этого условия необходимо, чтобы передаточная функция регулятора имела полюс $z=1$. Следовательно, простейшие алгоритмы управления ν -го порядка будут иметь следующую струк-

туру:

$$G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}}. \quad (5.2-3)$$

При $v=1$ и соответствующем выборе параметров получаем регулятор типа ПИ, при $v=2$ — типа ПИД, при $v=3$ — типа ПИД₂ и т. д. Разностное уравнение, описывающее регулятор с передаточной функцией (5.2-3), имеет вид

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \dots + q_v e(k-v). \quad (5.2-4)$$

Для получения хорошего качества процессов управления параметры $q_0, q_1, q_2, \dots, q_v$ должны выбираться с учетом характеристик объекта. Расчет этих параметров может быть выполнен следующим образом:

а) на основе метода, использующего модель объекта управления, в результате минимизации критерия качества с использованием *параметрической оптимизации*, причем аналитическое решение возможно лишь для объектов и регуляторов очень низкого порядка; в остальных случаях следует применять численные методы;

б) с использованием алгоритмов *параметрической настройки*, позволяющих получить параметры регулятора, близкие к оптимальным для некоторого критерия. Обычно для этого необходимо оценивать либо параметры переходного процесса в системе при ступенчатом задающем воздействии, либо критическое значение коэффициента усиления и период колебаний на границе устойчивости системы (см. разд. 5.6);

в) путем последовательного увеличения значений параметров от малых начальных значений до тех пор, пока процесс в замкнутой системе не приобретет значительной колебательности. После этого следует понемногу уменьшать значения параметров (*метод проб и ошибок*).

Если к системе управления не предъявляется каких-либо специфических требований и если ее переходный процесс отличается простотой и малым временем установления, то для оптимизации параметров регулятора достаточно использовать методы, упомянутые в пп. б) и в). Если же требования строги или переходный процесс оказывается сложным, медленным или существенно изменяющимся, то следует применять метод, упомянутый в п. а). Этот метод также пригоден для автоматизации проектирования регуляторов.

Оценка качества процессов управления должна выполняться с учетом требований, предъявляемых конкретным объектом управления. Однако и в этом случае оценка оказывается несколько субъективной. Существует много способов оценки качества управления, которые зависят как от характера прилагаемых возмущающих воздействий, так и от свойств рассматриваемого объекта и регулятора. Для упрощения процессов настройки параметров регуляторов и более наглядного сравнения различных систем управления часто

используют ступенчатое изменение возмущающих воздействий и задающего сигнала.

При синтезе параметрически оптимизируемых систем для оценки качества управления удобно использовать какой-либо единственный показатель. В частности, для непрерывных систем таким показателем с большим успехом может служить интегральный критерий качества (для дискретных систем вместо интеграла берется сумма). Следует отметить, что критерий суммы квадратов ошибок управления предпочтительнее с математической точки зрения, кроме того, он может быть интерпретирован как средняя мощность и в связи с этим использоваться в других методах проектирования регуляторов. Таким образом, в дальнейшем для параметрической оптимизации будут использоваться *квадратичные критерии качества*, представленные в следующем виде (см. гл. 4):

$$S_{eu}^2 = \sum_{k=0}^M (e^2(k) + \gamma \Delta u^2(k)), \quad (5.2-6)$$

где $e(k) = w(k) - u(k)$ — ошибка управления; $\Delta u(k) = u(k) - \bar{u}$ — «отклонение управляемой переменной» от установившегося значения $\bar{u} = u(\infty)$ для ступенчатых возмущений или от математического ожидания $\bar{u} = E\{u(k)\}$ для стохастических возмущений; γ — весовой коэффициент при управляющей переменной.

В этом квадратичном критерии качества соотношение *среднего квадрата ошибки управления*

$$S_e^2 = \overline{e^2(k)} = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M e^2(k) \quad (5.2-7)$$

и усредненного квадратичного отклонения управляющей переменной или *средней входной мощности*

$$S_u^2 = \overline{\Delta u^2(k)} = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \Delta u^2(k) \quad (5.2-8)$$

определяется выбором весового коэффициента γ . Если значение γ мало, то малая величина S_e^2 может быть получена при весьма большой величине S_u^2 . Чем больше весовой коэффициент γ при $\Delta u^2(k)$, тем меньше изменяется входной сигнал и больше становится ошибка управления, т. е. система управления становится более инерционной. При оптимизации параметров регулятора параметры $\mathbf{q}^T = [q_0 q_1 \dots q_v]$ должны выбираться таким образом, чтобы доставить минимальное значение S_{eu}^2 , т. е. обеспечить выполнение условия

$$\frac{dS_{eu}^2}{dq} = 0. \quad (5.2-9)$$

Для объектов высокого порядка следует использовать численные методы оптимизации, например простые методы поиска (эквидистантный поиск, метод Хуки — Дживса), градиентные методы первого или второго порядка (Ньютона — Рафсона) или комбинации различных методов (Флетчера — Пауэла) [5.6], [5.19—5.21].

5.2.1. Алгоритмы управления первого и второго порядков

а) Алгоритмы управления второго порядка.

Рассмотрим сначала алгоритмы управления второго порядка. Алгоритмы первого порядка будут получены затем путем упрощений.

Задав $v=2$ в уравнении (5.2-3), получим

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}. \quad (5.2-10)$$

Запишем в соответствии с уравнением (5.2-4) следующее соотношение:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2). \quad (5.2-11)$$

Рассматривая единичное ступенчатое изменение сигнала ошибки

$$e(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{для } k \geq 0; \\ 0 & \text{для } k < 0, \end{cases} \quad (5.2-12)$$

сформируем систему уравнений для последовательных значений выходного сигнала регулятора $u(k)$, следующих из (5.2-11):

$$\begin{aligned} u(0) &= q_0; \\ u(1) &= u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1; \\ u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2; \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2. \end{aligned} \quad (5.2-13)$$

В случае когда $u(1) < u(0)$, дискретный регулятор соответствует непрерывному ПИД-регулятору с дополнительной задержкой сигнала на один такт. Если параметр регулятора $q_0 > 0$, то можно записать следующие соотношения для параметров q_0 , q_1 и q_2 :

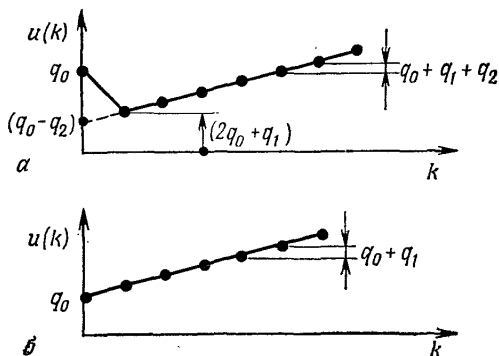
$$\begin{aligned} \text{при } u(1) < u(0): & \quad q_0 + q_1 < 0 \quad \text{или} \quad q_1 < -q_0; \\ \text{при } u(k) < u(k-1) \text{ для } k \geq 2: & \quad q_0 + q_1 + q_2 > 0 \quad \text{или} \quad q_2 > -(q_0 + q_1). \end{aligned}$$

Для положительного коэффициента передачи регулятора выполняется условие $q_0 > q_2$ (см. 5.2-15). Таким образом, обобщая допустимые диапазоны изменения параметров регулятора, получим

$$q_0 > 0; \quad q_1 < -q_0; \quad -(q_0 + q_1) < q_2 < q_0. \quad (5.2-14)$$

Реакция регулятора на единичное ступенчатое входное воздействие приведена на рис. 5.2.2, а, а допустимые области изменения его параметров изображены на рис. 5.2.3. Как видно из рис. 5.2.2, начальное значение управляющей переменной $u(0)$ при рассмотренном входном сигнале определяется величиной параметра q_0 .

Рис. 5.2.2. Переходные процессы для алгоритмов управления первого и второго порядков. а — ПИД-алгоритм управления второго порядка; б — ПИ-алгоритм управления первого порядка.



Определим следующие коэффициенты, характеризующие свойства регулятора:

$$\begin{aligned} K &= q_0 - q_2 && \text{— коэффициент передачи;} \\ c_D &= q_2 / K && \text{— коэффициент опережения;} \\ c_I &= (q_0 + q_1 + q_2) / K && \text{— коэффициент интегрирования.} \end{aligned} \quad (5.2-15)$$

Эти коэффициенты, определяющие вид переходного процесса регулятора, изображены на рис. 5.2.4. Коэффициенты (5.2-15) при ма-

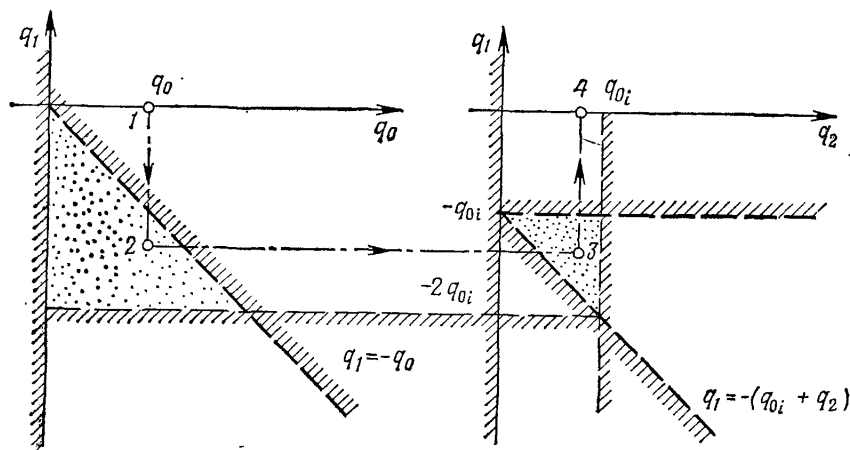


Рис. 5.2.3. Диапазоны изменения параметров q_0 , q_1 и q_2 ПИД-регулятора. Для заданного значения q_{0i} значения параметров q_{1i} и q_{2i} должны лежать в областях, выделенных точками (как показано линией 1—2—3—4).

лых значениях такта квантования связаны с соответствующими коэффициентами непрерывных ПИД-алгоритмов управления (5.1-5) следующими соотношениями:

$$K \hat{=} K; c_D \hat{=} T_D/T_0; c_I \hat{=} T_0/T_I. \quad (5.2-16)$$

Из (5.2-16) видно, что для малых тактов квантования коэффициенты передачи регуляторов тождественно равны. Коэффициент

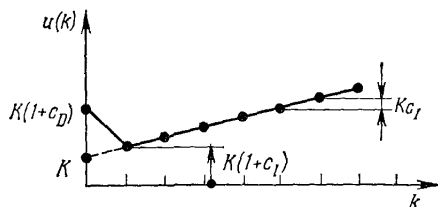


Рис. 5.2.4. Переходный процесс для алгоритма управления второго порядка, где K — коэффициент передачи; c_D — коэффициент опережения; c_I — коэффициент интегрирования.

опережения c_D равен отношению постоянной дифференцирования к такту квантования, а коэффициент интегрирования c_I — отношению такта квантования к постоянной интегрирования.

Учитывая условия (5.2-14), получим, что

$$c_D > 0; c_I > 0; c_I < c_D. \quad (5.2-17)$$

Если рассмотренные выше коэффициенты подставить в выражение (5.2-10), то дискретная передаточная функция регулятора примет вид

$$G_R(z) = \frac{K[(1+c_D) + (c_I - 2c_D - 1)z^{-1} + c_D z^{-2}]}{(1-z^{-1})}. \quad (5.2-18)$$

Следует отметить, что рассмотренный выше алгоритм управления второго порядка является аналогом непрерывного ПИД-регулятора с положительными параметрами только в том случае, если выполняются условия (5.2-14) или (5.2-17). В общем случае параметры регулятора, определенные в результате оптимизации, могут и не удовлетворять этим условиям, что зависит от характеристик конкретного объекта управления, вида критерия оптимизации и возмущающего сигнала.

б) Алгоритм управления первого порядка.

Положив $q_2=0$, получим из (5.2-10) передаточную функцию

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (5.2-19)$$

которой соответствует разностное уравнение

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1).$$

Реакция регулятора на единичное ступенчатое входное воздействие определяется следующей системой управлений:

$$\begin{aligned} u(0) &= q_0; \\ u(1) &= u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1; \\ u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 = 3q_0 + 2q_1; \\ &\vdots \\ u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 = (k+1)q_0 + kq_1. \end{aligned} \quad (5.2-20)$$

При $u(1) > u(0)$ алгоритм управления первого порядка аналогичен непрерывному ПИ-алгоритму без дополнительной задержки. Если коэффициент $q_0 > 0$, то выполняется условие $q_0 + q_1 > 0$ или $q_1 > -q_0$.

На рис. 5.2.2, б показана реакция дискретного регулятора первого порядка на единичный ступенчатый сигнал. По аналогии с (5.2-15) определим следующие характерные коэффициенты алгоритма:

$$\begin{aligned} K &= q_0 && \text{— коэффициент передачи;} \\ c_1 &= (q_0 + q_1)/K && \text{— коэффициент интегрирования.} \end{aligned} \quad (5.2-21)$$

Для ПИ-алгоритма с положительными коэффициентами

$$c_1 > 0. \quad (5.2-22)$$

Подставляя введенные коэффициенты в выражение для передаточной функции (5.2-19), получим

$$G_R(z) = \frac{K [1 + (c_1 - 1) z^{-1}]}{1 - z^{-1}}. \quad (5.2-23)$$

Если параметр q_0 выбран равным нулю, то будет получен регулятор интегрирующего типа с передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (5.2-24)$$

и соответствующим разностным уравнением

$$u(k) = u(k-1) + q_1 e(k-1). \quad (5.2-25)$$

Другими частными случаями являются регулятор пропорционального типа, передаточная функция которого

$$G_R(z) = q_0 \text{ или } u(k) = q_0 e(k) \quad (5.2-26)$$

получена из (5.2-23) при $c_1 = 0$, и регулятор пропорционально-дифференциального типа с передаточной функцией

$$G_R(z) = q_0 - q_2 z^{-1} \text{ или } u(k) = q_0 e(k) - q_2 e(k-1), \quad (5.2-27)$$

полученной из (5.2-18) при $c_1 = 0$.

5.2.2. Алгоритмы управления с заданным начальным значением управляющей переменной

Передаточная функция замкнутой системы управления, описывающая связь между задающей и управляющей переменной, записывается следующим образом:

$$\frac{u(z)}{w(z)} = \frac{G_R(z)}{1 + G_R(z) G_P(z)}. \quad (5.2-28)$$

Используя передаточные функции объекта управления (5.2-1) и регулятора второго порядка (5.2-10) и полагая, что $b_0 = 0$, получим

$$\begin{aligned} & [(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) + \\ & + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) z^{-d}] u(z) = \\ & = (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) w(z). \end{aligned} \quad (5.2-29)$$

Запишем полученное выражение в виде разностного уравнения, разрешив его относительно управляющей переменной:

$$\begin{aligned} u(k) = & (1 - a_1) u(k-1) + (a_1 - a_2) u(k-2) + \dots - \\ & - q_0 b_1 u(k-d-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1) u(k-d-2) + \dots + \\ & + q_0 w(k) + (q_0 a_1 + q_1) w(k-1) + \\ & + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2) w(k-2) + \dots \end{aligned} \quad (5.2-30)$$

Первые два значения управляющей переменной при подаче на вход системы ступенчатого задающего воздействия $w(k) = 1(k)$ будут определяться следующими соотношениями:

а) при $d = 0$

$$\begin{aligned} u(0) &= q_0, \\ u(1) &= q_0(2 - q_0 b_1) + q_1; \end{aligned} \quad (5.2-31)$$

б) при $d \geq 1$

$$\begin{aligned} u(0) &= q_0, \\ u(1) &= 2q_0 + q_1. \end{aligned} \quad (5.2-32)$$

Как видно из последних соотношений, величина $u(0)$ при ступенчатом изменении входного сигнала определяется только значением параметра q_0 регулятора и не зависит от постоянного запаздывания d . Поэтому для того, чтобы задать начальное значение управляющей переменной $u(0)$, следует зафиксировать параметр q_0 регулятора.

Соответствие между начальным значением управляющей переменной и параметром q_0 может быть использовано в процессе проектирования регулятора для задания допустимого диапазона изменения управляющей переменной. Для этого необходимо выбрать рабочую точку контура управления и задать максимальное прира-

щение сигнала $u(0)$ на входе объекта управления при ступенчатом изменении на величину w_0 задающей переменной $w(k)$ (или ошибки $e(k)$) и после этого положить $q_0 = u(0)/w_0$. Для того чтобы значение $u(1)$ управляющей переменной было меньше $u(0)$, параметр q_1 регулятора следует выбирать с учетом определенных неравенств. Из уравнений (5.2-31) и (5.2-32) следует, что для выполнения условия $u(1) \leq u(0)$ параметры регулятора должны удовлетворять неравенствам

$$q_1 \leq -q_0(1 - q_0 b_1); \quad (5.2-33)$$

а) при $d=0$

$$q_1 \leq -q_0.$$

Эти же неравенства справедливы и для регуляторов первого порядка. Если задано достаточно малое значение $u(0)$ и в результате система становится сильно задемпфированной, то в квадратичном критерии оптимизации (5.2-6) можно задать $\gamma=0$.

Если значение параметра q_0 определено на основании ограничений, наложенных на $u(0)$, то в регуляторе второго порядка могут быть оптимизированы только два параметра, а в регуляторе первого порядка — только один параметр. Это приводит к уменьшению объема необходимых вычислений. Конечно, такой подход к проектированию регуляторов не позволяет построить систему, в которой учтены ограничения на управляющую переменную, обусловленные всеми возмущающими воздействиями. Рассмотренный способ задания параметра q_0 является приемом проектирования, в результате применения которого ограничения на управляющую переменную, связанные лишь с одним возмущающим воздействием, становятся превалирующими.

5.3. МОДИФИКАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Было опубликовано большое число модификаций дискретных алгоритмов управления, основанных на дискретизации дифференциальных уравнений непрерывных ПИД-регуляторов (5.1-1—5.1-4). Некоторые из этих модификаций будут рассмотрены ниже.

Для уменьшения больших изменений управляющей переменной при резких изменениях задающего сигнала задающее воздействие $w(k)$ исключают из дифференцирующего члена [5.3]. В результате этого вместо обычного алгоритма ПИД-регулятора (5.1-4)

$$u(k) - u(k-1) = K \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_1} e(k-1) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \right] \quad (5.3-1)$$

используется модифицированный алгоритм

$$u(k) - u(k-1) = K \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_1} e(k-1) + \frac{T_D}{T_0} (-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)) \right], \quad (5.3-2)$$

где $e(k) = w(k) - y(k)$.

Дополнительного уменьшения амплитуды управляющей переменной добиваются, оставляя значения задающего сигнала только в интегрирующем члене алгоритма [1.12, 5.1, 5.3]:

$$u(k) - u(k-1) = K \left[-y(k) + y(k-1) + \frac{T_0}{T_1} e(k-1) + \frac{T_D}{T_0} (-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)) \right]. \quad (5.3-3)$$

В последнем алгоритме, кроме того, предпочтительнее использовать сигнал $e(k)$ вместо $e(k-1)$, см. стр. 82. Рассмотренные модифицированные алгоритмы менее чувствительны к высокочастотным составляющим сигнала $w(k)$ по сравнению с сигналом $y(k)$. Поэтому параметры регуляторов, полученные в результате оптимизации для определенных типов возмущений, например для возмущений на входе объекта и на входе системы, будут отличаться незначительно (см. [5.8]). Существенные изменения управляющей переменной могут быть также уменьшены путем ограничения скорости изменения задающей и (или) управляющей переменной. Поскольку такие ограничения оказываются эффективными для всех типов возмущений, их применение предпочтительнее использования модифицированных алгоритмов управления, описываемых уравнениями (5.3-2) и (5.3-3).

Другие модификации алгоритмов управления состоят в различных способах реализации *дифференцирующей части*. Часто регулируемая переменная содержит относительно высокочастотный шум, который не измеряется, что приводит к нежелательным существенным колебаниям управляющей координаты, если дифференцирующая часть алгоритма сформирована с использованием первой разности в рекуррентной форме (5.1-2)

$$T_D \frac{\Delta e(k)}{T_0} = \frac{T_D}{T_0} (e(k) - e(k-1))$$

или в рекуррентной форме (5.3-1)

$$\frac{T_D}{T_0} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)).$$

Введение дифференцирующего члена в алгоритм управления часто может быть необходимым для улучшения качества процессов управления при наличии среднечастотных шумов не слишком большого уровня, поскольку в этом случае происходит приближенное сокращение полюсов объекта, что приводит к расширению областей устойчивости и возможности увеличения коэффициента передачи.

Следовательно, при введении дифференцирующего члена в алгоритм управления следует, учитывая сказанное выше, выбирать его параметры для обеспечения допустимого компромисса.

Одна из возможностей состоит в том, чтобы выбирать отношение T_D/T_0 меньшим его оптимальной величины. Можно также сгладить дифференцирующие свойства алгоритма, используя 4 последовательных значения сигнала ошибки для формирования первой разности [5.2]. Для этого сначала оценивается среднее значение ошибки

$$\bar{e}_k = \frac{1}{4} [e(k) + e(k-1) + e(k-2) + e(k-3)],$$

после чего все аппроксимации первой производной усредняются по отношению к \bar{e}_k . Дифференцирующий член, представленный в рекуррентной форме, в этом случае запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_D \frac{\bar{e}_k}{T_0} &= \frac{T_D}{4} \left[\frac{e(k) - \bar{e}_k}{1,5T_0} + \frac{e(k-1) - \bar{e}_k}{0,5T_0} + \frac{\bar{e}_k - e(k-2)}{0,5T_0} + \frac{\bar{e}_k - e(k-3)}{1,5T_0} \right] = \\ &= \frac{T_D}{6T_0} [e(k) + 3e(k-1) - 3e(k-2) - e(k-3)]. \end{aligned} \quad (5.3-4)$$

Для рекуррентной формы имеем

$$\frac{T_D}{6T_0} [e(k) + 2e(k-1) - 6e(k-2) + 2e(k-3) + e(k-4)]. \quad (5.3-5)$$

Еще один подход, применимый лишь при выборе малых тактов квантования в системе, состоит в использовании дифференцирующего члена, такого, как в непрерывной передаточной функции

$$G(s) = K \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_I s} \right],$$

и применении соотношения $s \rightarrow 2(z-1)/T_0(z+1)$ для аппроксимации непрерывных зависимостей [2.19] (см. разд. 3.7). В результате такой подстановки получим из приведенного непрерывного следующий дискретный алгоритм управления:

$$u(k) = p_1 u(k-1) + p_2 u(k-2) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \quad (5.3-6)$$

параметрами которого являются

$$p_1 = -4c_1/(1 + 2c_1),$$

$$p_2 = (2c_1 - 1)/(1 + 2c_1),$$

$$q_0 = K \left[1 + 2(c_1 + c_D) + \frac{c_1}{2}(1 + 2c_1) \right] / (1 + 2c_1),$$

$$q_1 = K [c_1 - 4(c_1 + c_D)] / (1 + 2c_1),$$

$$q_2 = K \left[c_1(2 - c_1) + 2c_D + \frac{c_1}{2} - 1 \right] / (1 + 2c_1),$$

где

$$c_1 = T_1/T_0, \quad c_I = T_0/T_1, \quad c_D = T_D/T_0.$$

Другие возможности улучшения работы системы управления связаны с осуществлением фильтрации регулируемой переменной $y(k)$ с помощью фильтров, включаемых в систему перед алгоритмом управления и поэтому влияющих на все компоненты ПИД-алгоритма. Об этом будет сказано в гл. 27.

5.4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При проектировании систем управления ставится задача выбора приемлемых значений свободных параметров алгоритмов. В случае параметрической оптимизации дискретных алгоритмов управления такими параметрами являются такт квантования T_0 и весовой коэффициент γ квадратичного функционала при управляющей переменной или заданное начальное значение управляющей переменной $u(0)$. Для того чтобы помочь в выборе начальных значений этих параметров, ниже приведены некоторые результаты моделирования [5.7]. Свободные параметры не могут выбираться независимо от объекта управления и его технических характеристик. Поэтому здесь приведены наиболее общие правила их выбора. В то же время из результатов моделирования двух тестовых объектов будет видно, что полученные качественные результаты справедливы и для других подобных объектов.

5.4.1. Тестовые объекты

Для исследования алгоритмов управления в замкнутом контуре использованы объекты II и III, описанные в [5.9] (см. приложение).

Объект II.

Это объект с неминимальнофазовой характеристикой, описываемый непрерывной передаточной функцией

$$G_{II}(s) = \frac{K(1 - T_1s)}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}, \quad (5.4-1)$$

где $K = 1$; $T_1 = 4$ с; $T_2 = 10$ с.

Соответствующая дискретная передаточная функция объекта II имеет вид

$$G_{II}(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}. \quad (5.4-2)$$

Параметры передаточной функции для различных значений тактов квантования приведены в табл. 5.4.1. Переходный процесс объекта при подаче на его вход единичного ступенчатого воздействия показан на рис. 5.4.1, а.

Объект III.

Это объект, обладающий характеристиками фильтра нижних частот (низкочастотный) и чистым запаздыванием, с передаточной

Таблица 5.4.1

Параметры объекта II

Такт квантования T_0 , с	1	4	8	16
b_1	-0,07289	-0,07357	0,13201	0,55333
b_2	0,09394	0,28197	0,34413	0,23016
a_1	-1,68364	-1,03820	-0,58466	-0,22721
a_2	0,70469	0,24660	0,06081	0,00370

функцией

$$G_{III}(s) = \frac{K(1+T_4s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} e^{-T_t s}, \quad (5.4-3)$$

где $K=1$; $T_1=10$ с; $T_2=7$ с; $T_3=3$ с; $T_4=2$ с; $T_t=4$ с.
Дискретная передаточная функция объекта III имеет вид

$$G_{III}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} z^{-d}. \quad (5.4-4)$$

Параметры передаточной функции $G_{III}(z)$ для различных значений такта квантования приведены в табл. 5.4.2. Переходный процесс

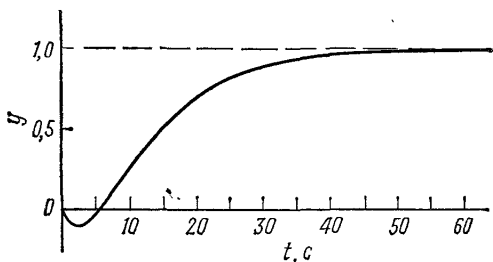
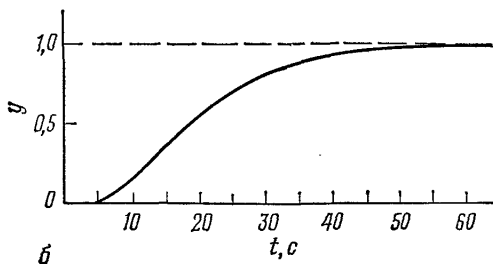


Рис. 5.4.1. Переходный процесс для тестовых объектов II и III: а — объект II, б — объект III.



объекта при подаче на его вход единичного ступенчатого воздействия показан на рис. 5.4.1, б.

Таблица 5.4.2

Параметры объекта III

Такт квантования T_0 , с	1	4	8	16
d	4	1	1	1
b_0	0	0	0,06525	0,37599
b_1	0,00462	0,06525	0,25598	0,32992
b_2	0,00169	0,04793	0,02850	0,00767
b_3	-0,00273	-0,00750	-0,00074	-0,00001
a_1	-2,48824	-1,49863	-0,83771	-0,30842
a_2	2,05387	0,70409	0,19667	0,02200
a_3	-0,56203	-0,09978	-0,00995	-0,00010

5.4.2. Результаты моделирования алгоритмов управления второго порядка

а) Алгоритмы управления с незадаанным начальным значением управляющей переменной

Здесь рассмотрены некоторые результаты моделирования на универсальной ЭВМ систем управления, состоящих из тестовых объектов II и III и регуляторов с алгоритмами управления второго порядка, для которых начальное значение управляющей переменной не задано. Значения всех трех параметров алгоритмов получены в результате оптимизации. Далее будет использоваться сокращенная запись названия регуляторов такого типа, описываемых передаточной функцией (5.2-1) — ЗПР-3 (3-параметрический регулятор с 3 оптимизируемыми параметрами). В качестве критерия оптимизации использован квадратичный критерий (5.2-6). Параметры q_0 , q_1 и q_2 регулятора определялись с помощью численного метода Флетчера — Пауэла. Время моделирования $M=128$ с.

Качество процессов управления при *ступенчатом изменении сигнала задающей переменной* определяется следующими параметрами:

$$S_e = \sqrt{\overline{e^2(k)}} = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N e^2(k)} \text{ — среднеквадратическая ошибка управления;} \quad (5.4-5)$$

$$y_m = y_{\max}(t) - w(t) \text{ — максимальное перерегулирование;} \quad (5.4-6)$$

$$k_1 \text{ — время установления, при котором } |e(k)| \leq 0,01 |w(k)|. \quad (5.4-7)$$

Среднеквадратическое отклонение управляющей переменной (затраты на управление) определяется в соответствии с выражением

$$S_u = \sqrt{\overline{\Delta u^2(k)}} = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \Delta u^2(k)}. \quad (5.4-8)$$

Значения указанных параметров качества являются функциями такта квантования T_0 и весового коэффициента γ при управляющей переменной в критерии оптимизации (5.2-6). Время моделирования T_N выбрано равным 128 с, что с избытком достаточно для того, чтобы ошибка управления стала практически равной нулю. Отсюда получаем $N=128 \text{ с}/T_0$. Параметры S_e и S_u названы среднеквадратическими, что эквивалентно термину «эффективное значение» или термину «корень квадратный из эффективной мощности».

Замечание. Ступенчатое возмущение возбуждает преимущественно низкочастотные движения системы и приводит к подчеркиванию интегрирующих свойств регулятора. В гл. 13 рассмотрены стохастические возмущения, содержащие высокочастотные компоненты и приводящие в связи с этим к подчеркиванию пропорциональных и дифференцирующих свойств регулятора.

ВЛИЯНИЕ ТАКТА КВАНТОВАНИЯ T_0

На рис. 5.4.2а и рис. 5.4.2б приведены графики переходных процессов по управляющей (дискретные значения) и регулируемой переменным соответственно в системах с двумя тестовыми объектами при ступенчатом изменении задающего сигнала и значениях такта квантования $T_0=1, 4, 8$ и 16 с (при $\gamma=0$). Для относительно малого значения T_0 , равного 1 с, переходные процессы практически совпадают с процессами в непрерывном ПИД-регуляторе. Для $T_0=4$ с непрерывный сигнал регулируемой переменной для обоих тестовых объектов все еще можно считать вполне удовлетворительным. Однако уже при $T_0=8$ с для объекта II и при $T_0=16$ с для обоих объектов качество переходных процессов становится неудовлетворительным. Следовательно, критерий качества S_e (5.4-5) следует использовать с осторожностью для оценки поведения системы при такте дискретности, превышающем 4 с. Тем не менее, поскольку для упрощения вычислений параметрическая оптимизация выполняется в классе дискретных сигналов, значения S_e используются для сравнения.

На рис. 5.4.3 показана зависимость критерия качества S_e и среднеквадратического отклонения управляющей переменной S_u от величины такта квантования T_0 . Для объекта II среднеквадратическая ошибка управления, максимальное значение перерегулирования u_m и время установления регулируемой координаты k_f возрастают с увеличением такта квантования T_0 , т. е. происходит ухудшение качества регулирования. Кривая, изображающая изменение параметра S_u имеет минимум при $T_0=4$ с и возрастает при $T_0>4$ с и $T_0<4$ с. Для объекта III все три характеристики ухудшаются с увеличением такта квантования, а параметр S_u принимает минимальное значение при $T_0=8$ с. Улучшение качества управления для $T_0<8$ с обусловлено тем, что при уменьшении T_0 значение S_u существенно увеличивается и поэтому возрастает величина $u(0)$ (см. рис. 5.4.2).

Исходя из анализа результатов моделирования, можно заключить, что для данного критерия оптимизации при $\gamma=0$ допустимая

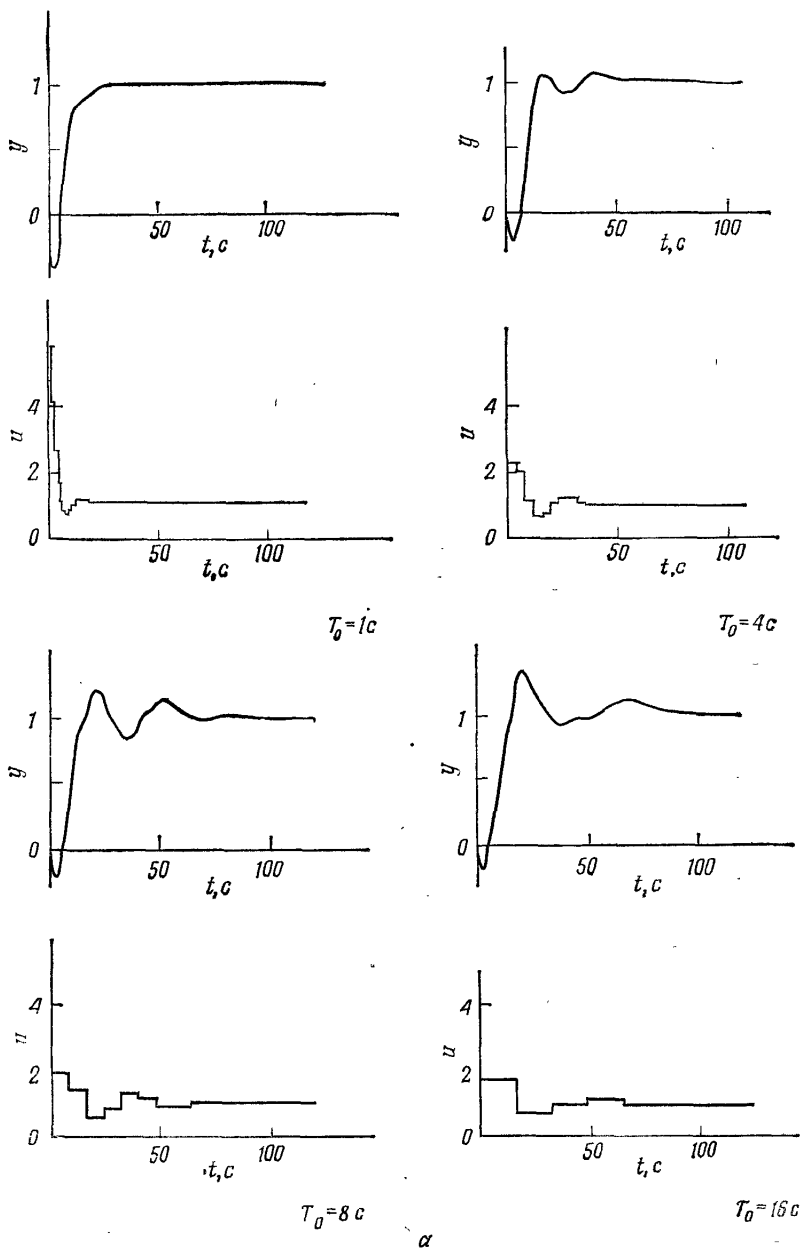


Рис. 5.4.2а. Переходные процессы при изменении задающего сигнала для объекта II при различных значениях тактов квантования T_0 и $\gamma=0$.

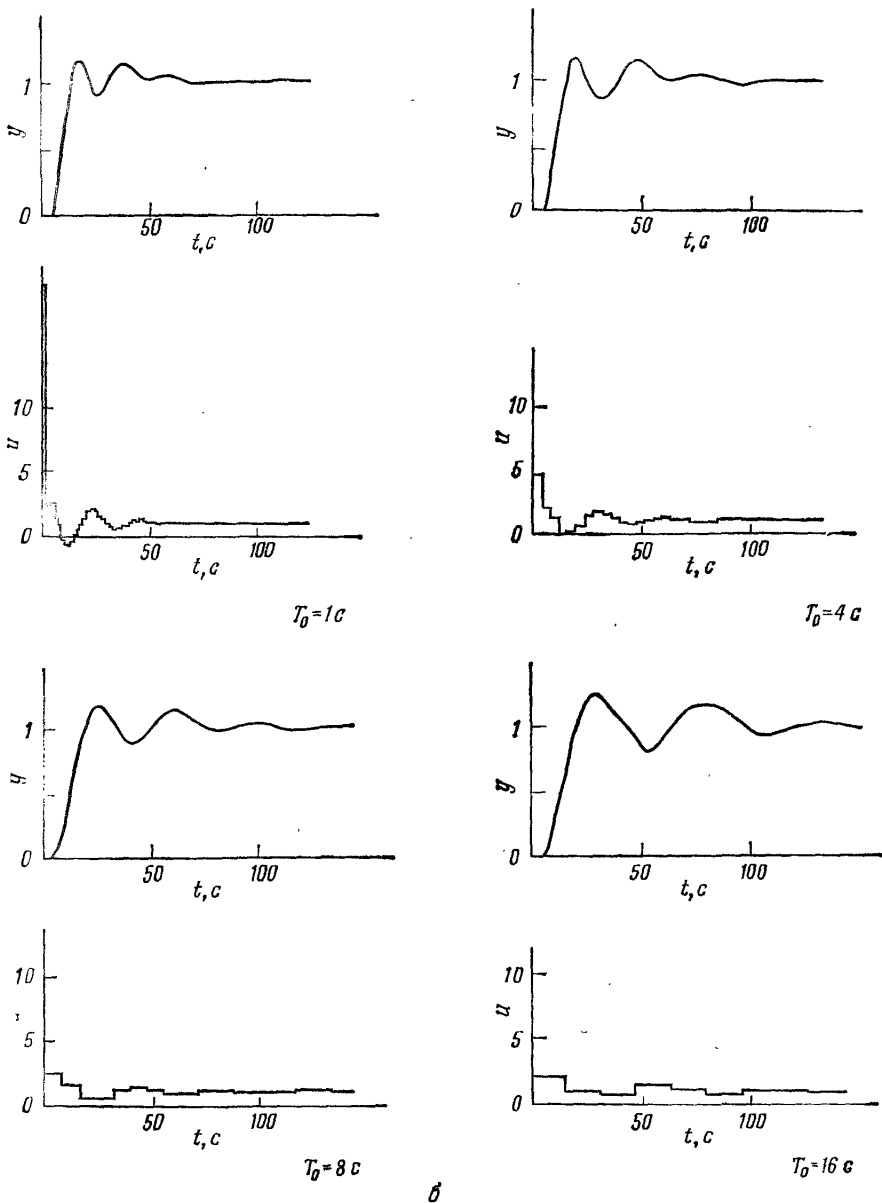


Рис. 5.4.26. Переходные процессы при изменении задающего сигнала для объекта III при различных значениях тактов квантования T_0 и $\gamma=0$.

величина такта квантования для обоих объектов лежит в диапазоне $4 \div 8$ с, причем меньшее значение такта соответствует лучшему качеству управления. Такт квантования $T_0=1$ с непригоден для объек-

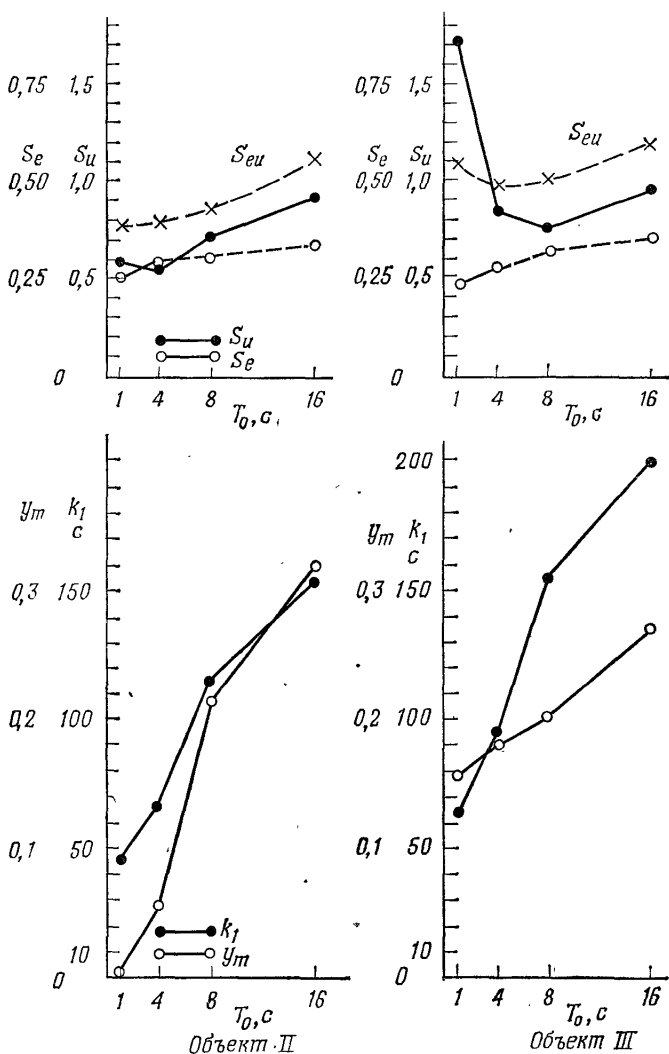


Рис. 5.4.3. Зависимость качества управления и затрат на управление от величины T_0 при $g=0$.

та III, так как затраты на управление становятся слишком большими по сравнению с улучшением показателей качества. Такт квантования $T_0=16$ с непригоден для обоих объектов из-за низкого качества управления.

При выборе такта квантования можно также воспользоваться зависимостью критерия $S_{\text{ен}}$ (5.2-6) от T_0 . Этот критерий учитывает как качество управления S_e , так и затраты на управление $S_{\text{и}}$. На рис. 5.4.3 показаны кривые изменения $S_{\text{ен}}$ для значения весового

Таблица 5.4.3

Параметры регулятора для различных тактов квантования
 T_0 при $\gamma = 0$

	Объект II				Объект III			
	1	4	8	16	1	4	8	16
q_0	5,958	2,332	2,000	1,779	19,408	4,549	2,437	1,957
q_1	-10,337	-3,074	-2,080	-1,089	-36,623	-7,160	-2,995	-1,660
q_2	4,492	1,105	0,748	0,361	17,370	3,030	1,158	0,667
K	1,466	1,227	1,252	1,418	2,038	1,519	1,279	1,290
s_D	3,065	0,901	0,597	0,255	8,524	1,994	0,905	0,517
s_I	0,077	0,297	0,534	0,742	0,076	0,275	0,469	0,748

коэффициента γ при управляющей переменной в критерии оптимизации, равного 0,25. Из анализа «смешанного» критерия видно, что он имеет пологий минимум при $T_0 = 5$ с для объекта III и при $T_0 = 8$ с для объекта II. Следовательно, приемлемые значения такта квантования лежат в диапазоне $T_0 = 3 \div 8$ с для объекта III и $T_0 = 1 \div 8$ с для объекта II. Используя значение T_{95} для времени установления процесса, т. е. для того времени, за которое выходная величина достигает 95% установившегося значения при ступенчатом входном сигнале, запишем следующие условия для выбора такта квантования:

$$\begin{aligned} \text{Объект II: } \beta = T_{95}/T_0 &= 4,4 \dots 11,7; \\ \text{Объект III: } \beta = T_{95}/T_0 &= 5,6 \dots 15,0. \end{aligned} \quad (5.4-9)$$

В табл. 5.4.3 приведены параметры регулятора для различных значений T_0 . При увеличении такта квантования параметры q_0 , q_1 и q_2 уменьшаются. Коэффициент передачи регулятора K существенно изменяется при $T_0 \geq 4$ с, коэффициент опережения s_D уменьшается, а коэффициент интегрирования s_I возрастает. При значениях тактов квантования $T_0 = 1, 4$ и 8 с параметры регулятора удовлетворяют неравенствам (5.2-14) или (5.2-17), т. е. алгоритм управления обладает свойствами обычного ПИД-регулятора.

ВЛИЯНИЕ ВЕСОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА γ ПРИ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ

На рис. 5.4.4а и 5.4.4б показаны переходные процессы при ступенчатом изменении задающего сигнала для такта квантования $T_0 = 1$ с и различных значений весового коэффициента γ в критерии оптимизации. Как видно из приведенных графиков, изменение вели-

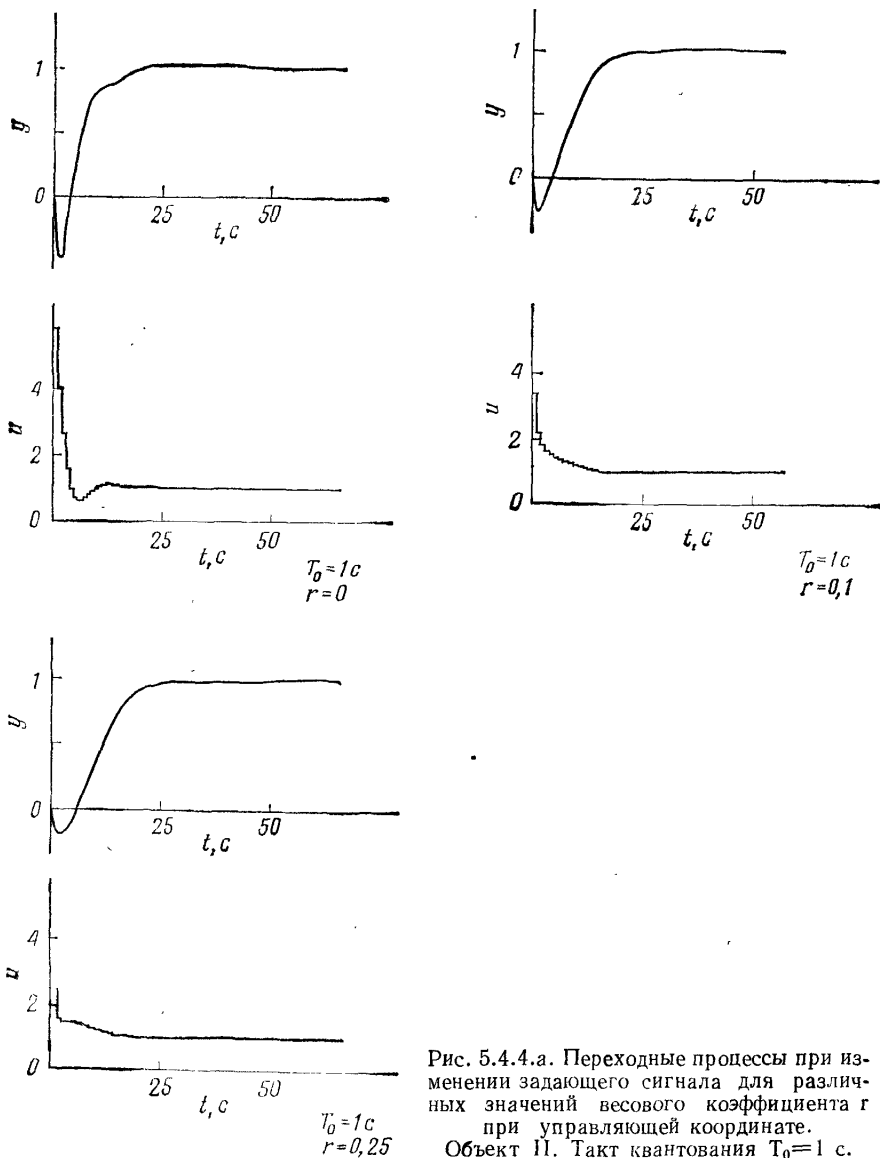


Рис. 5.4.4.а. Переходные процессы при изменении задающего сигнала для различных значений весового коэффициента γ при управляющей координате. Объект II. Такт квантования $T_0 = 1c$.

чины γ от 0 до 0,1 гораздо больше влияет на качественные характеристики переходного процесса, чем изменение γ от 0,1 до 0,25.

На рис. 5.4.5 приведены графики изменения параметров качества управления и затрат на управление для $T_0 = 1,4$ и 8 с в зависимости от величины весового коэффициента γ . Для обоих объектов возраста-

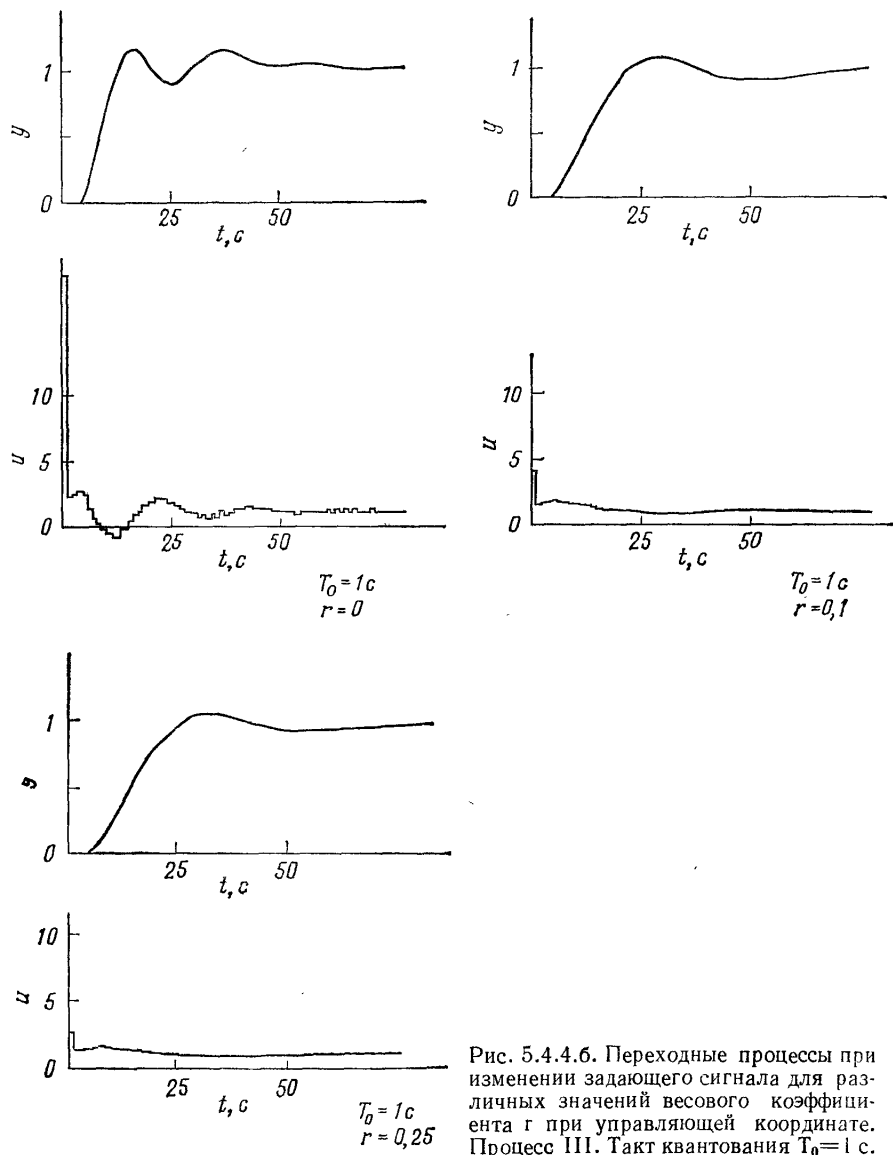


Рис. 5.4.4.6. Переходные процессы при изменении задающего сигнала для различных значений весового коэффициента γ при управляющей координате. Процесс III. Такт квантования $T_0 = 1 \text{ с}$.

ние γ ведет к увеличению S_e и уменьшению затрат на управление S_u , причем для объекта III этот эффект оказывается большим, чем для объекта II. Выбор значения весового коэффициента γ оказывает более сильное влияние на S_e и S_u для объекта III. Кроме того, влияние γ тем больше, чем меньше величина такта квантования.

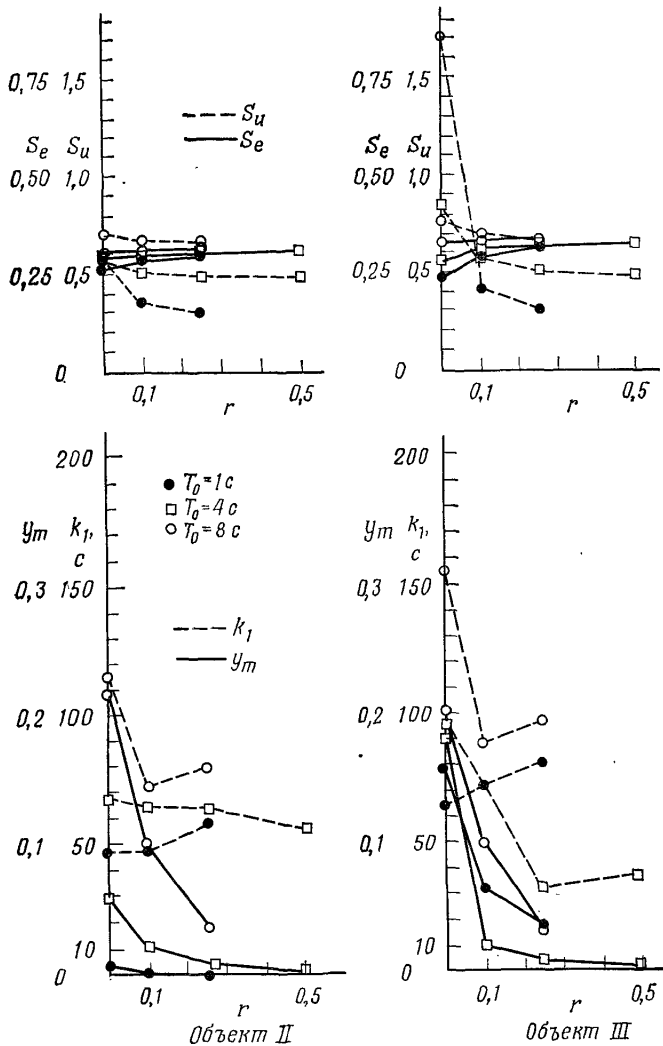


Рис. 5.4.5. Зависимость качества управления и затрат на управление от величины весового коэффициента γ в критерии оптимизации.

Значение максимального перерегулирования y_m уменьшается с увеличением γ . Время регулирования k_1 увеличивается вместе с γ для $T_0 = 1$ с. Однако для $T_0 = 4$ и 8 с k_1 сначала убывает, а затем возрастает при большем значении γ . Выбор коэффициента γ в гораздо большей степени влияет на параметры y_m и k_1 , чем на S_e и S_u для всех значений такта квантования. Увеличение весового коэффициента при управляющей переменной в критерии оптимизации (5.2-6),

таким образом, приводит к уменьшению затрат на управление $S_{\text{ц}}$, возрастанию S_e и уменьшению перерегулирования u_m . Выбор коэффициента γ в значительной степени зависит от конкретных условий применения регулятора. Приемлемый компромисс между хорошим качеством процессов в системе и малыми затратами на управление может быть получен при $0,1 \leq \gamma \leq 0,25$, если коэффициент передачи объекта равен единице.

Таблица 5.4.4

Параметры регулятора для различных весовых коэффициентов при $T_0 = 4$ с и $T_0 = 8$ с

$\gamma_n = 4$ с	Объект II			Объект III		
	γ			γ		
	0	0,1	0,25	0	0,1	0,25
q_0	2,332	1,933	1,663	4,549	2,688	2,049
q_1	-3,076	-2,432	-2,016	-7,160	-3,798	-2,723
q_2	1,117	0,816	0,637	3,030	1,398	0,916
K	1,215	1,117	1,026	1,519	1,290	1,133
c_D	0,919	0,730	0,621	1,994	1,083	0,808
c_I	0,307	0,284	0,277	0,275	0,223	0,213

$T_0 = 8$ с	γ			γ		
	γ			γ		
	0	0,1	0,25	0	0,1	0,25
q_0	2,000	1,714	1,512	2,437	1,944	1,653
q_1	-2,080	-1,685	-1,423	-2,995	-2,222	-1,795
q_2	0,748	0,557	0,440	1,158	0,780	0,587
K	1,252	1,175	1,072	1,279	1,164	1,066
c_D	0,597	0,481	0,410	0,905	0,669	0,550
c_I	0,534	0,507	0,494	0,469	0,431	0,417

В табл. 5.4.4 приведены параметры регулятора для тактов квантования $T_0 = 4$ с и $T_0 = 8$ с. При увеличении веса γ управляющей переменной значения параметров q_0 , q_1 и q_2 уменьшаются. Коэффициенты K и c_D также убывают, в то время как c_I меняется мало.

б) Алгоритм управления с заданным начальным значением управляющей переменной $u(0)$

В разд. 5.2.2 было показано, что при ступенчатом изменении задающей переменной на 1 или w_0 параметр q_0 алгоритма управления равен значению управляющей переменной $u(0)$ или $u(0)/w_0$ (см. 5.2-6). Выбрав $u(0)$ с учетом допустимого диапазона изменения управляющей переменной, можно сразу же определить значение параметра q_0 . Теперь можно проводить оптимизацию только двух

параметров: q_1 и q_2 . Следовательно, такой алгоритм управления будет обозначаться ЗПР-2.

Поскольку диапазон изменения управляющей переменной можно ограничить заданием относительно малой величины $u(0)$, весовой коэффициент γ в критерии оптимизации (5.2-10) может быть выбран равным нулю.

ВЛИЯНИЕ ЗАДАННОЙ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ

На рис. 5.4.6 приведены графики переходных процессов при ступенчатом изменении задающей переменной для различных начальных значений управляющей переменной $u(0) = q_0$. Уменьшение за-

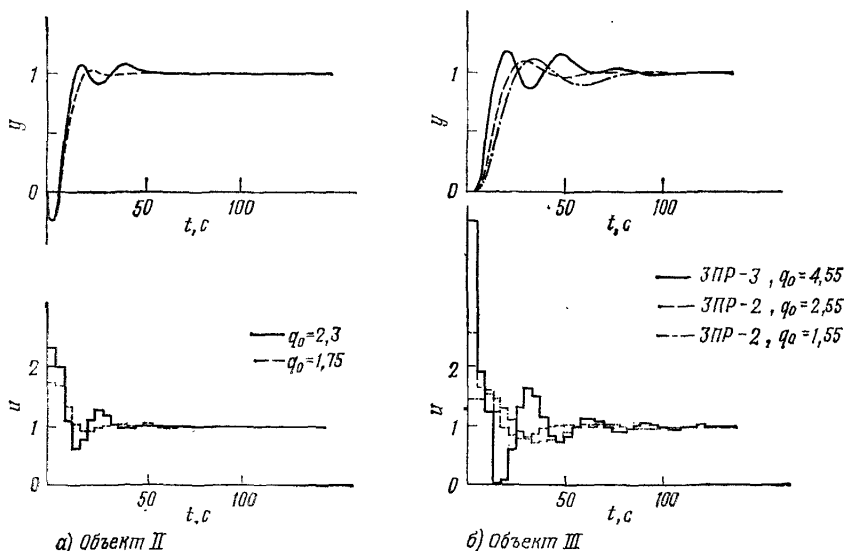


Рис. 5.4.6. Переходные процессы при ступенчатом изменении задающей переменной для различных заданных начальных значений управляющей переменной $u(0)$. Такт квантования $T_0 = 4$ с.

данной величины q_0 от значения $q_{0 \text{ опт}}$, полученного в результате оптимизации по всем параметрам в соответствии с квадратичным критерием при $\gamma = 0$, приводит к сглаживанию переходного процесса в системе. Перерегулирование $u_{\text{ин}}$ при этом убывает. На рис. 5.4.6, б показан переходный процесс для случая, когда q_0 выбрано таким, что первые два значения управляющей переменной $u(0)$ и $u(1)$ равны. Однако в этом случае перерегулирование возрастает. Аналогичный результат получается и для объекта II.

На рис. 5.4.7 приведены характеристики качества управления и затрат на управление для реально приемлемых значений такта квантования $T_0 = 4$ с и $T_0 = 8$ с. При снижении заданного начального значения управляющей переменной $u(0)$, т. е. уменьшении q_0 , затраты

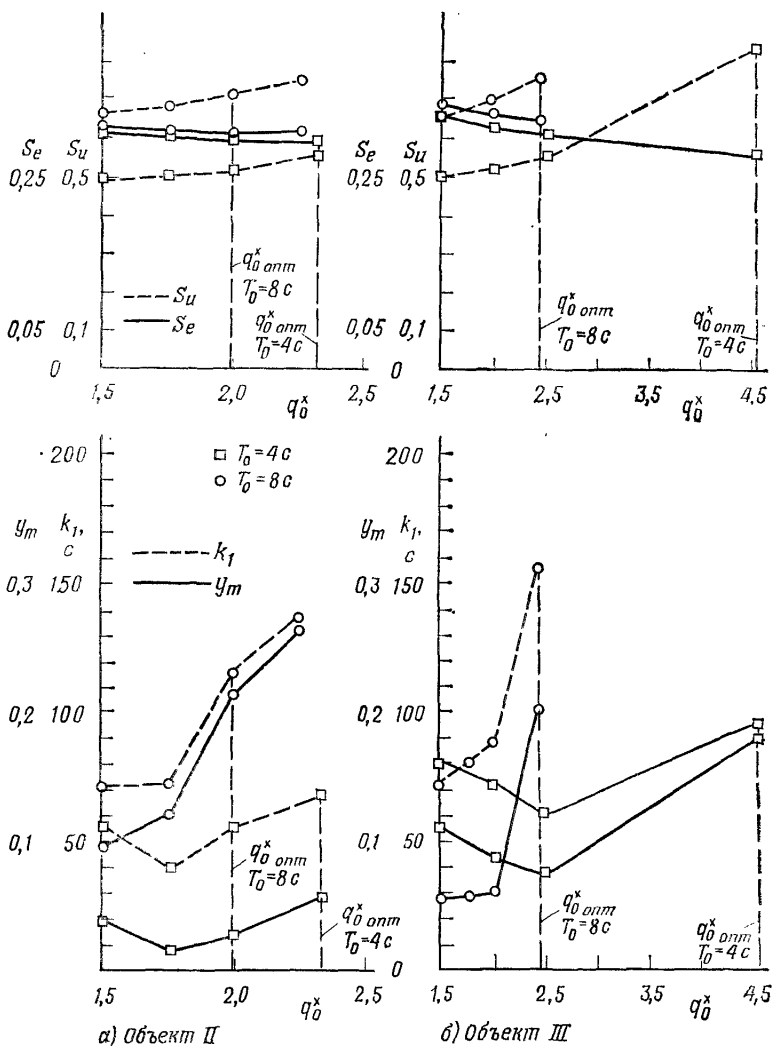


Рис. 5.4.7. Зависимость качества управления и затрат на управление от величины заданного начального значения управляющей переменной $u(0) = q_0$.

на управление убывают, а параметр S_0 незначительно возрастает. Перерегулирование y_m и время регулирования k_1 также убывают для $T_0 = 8$ с. Для $T_0 = 4$ с сначала аналогичные тенденции сохраняются, однако при существенном уменьшении q_0 оба последних коэффициента начинают возрастать. Таким образом, существует минимум характеристик y_m и k_1 .

Если начальное значение управляющей переменной $u(0) = q_0$ задано не слишком малым, параметр качества S_e ухудшается незначительно. Однако затраты на управление S_u , перерегулирование u_m и время регулирования k_1 уменьшаются существенно.

Удачный выбор начального значения управляющей переменной $u(0)$ обеспечивает не только хорошее качество процессов управления, но и снижение объема необходимых вычислений в процессе параметрической оптимизации. В табл. 5.4.5 приведены параметры

Таблица 5.4.5

Параметры регулятора для различных начальных значений управляющей переменной $u(0) = q_0$ для $T_0 = 4$ с и $T_0 = 8$ с

Объект II

Объект III

Объект II					Объект III				
$T_0 = 4$ с					$T_0 = 4$ с				
	ЗПР-2			ЗПР-3		ЗПР-2			ЗПР-3
q_0	1,500	1,750	2,000	2,332	q_0	1,500	2,000	2,500	4,549
q_1	-1,593	-2,039	-2,484	-3,076	q_1	-1,499	-2,406	-3,320	-7,160
q_2	0,376	0,591	0,810	1,105	q_2	0,223	0,656	1,097	3,030
K	1,125	1,159	1,190	1,227	K	1,277	1,244	1,403	1,519
c_D	0,333	0,511	0,681	0,901	c_D	0,175	0,488	0,783	1,994
c_I	0,251	0,261	0,274	0,295	c_I	0,176	0,186	0,198	0,275
$T_0 = 8$ с					$T_0 = 8$ с				
	ЗПР-2			ЗПР-3		ЗПР-2			ЗПР-3
q_0	1,500	1,750	2,250	1,999	q_0	1,500	1,750	2,000	2,437
q_1	-1,338	1,717	-2,405	-2,079	q_1	-1,451	-1,864	-2,280	-2,995
q_2	0,364	0,556	0,936	0,748	q_2	0,372	0,576	0,784	1,158
K	1,136	1,194	1,314	1,251	K	1,128	1,174	1,216	1,279
c_D	0,321	0,466	0,712	0,597	c_D	0,330	0,490	0,645	0,905
c_I	0,464	0,494	0,594	0,534	c_I	0,374	0,393	0,414	0,469

регулятора для различных заданных значений $u(0)$. Как видно из этой таблицы, параметры q_1 и q_2 изменяются в соответствии с тенденцией изменения q_0 , однако c_I меняется мало. Остальные параметры регулятора при одинаковых значениях q_0 мало изменяются для обоих объектов.

в) Выводы по результатам моделирования

Для параметрически оптимизируемых алгоритмов управления первого и второго порядков коэффициенты K, c_I и c_D , т. е. коэффициенты передачи, интегрирования и опережения, могут быть просто вычислены по известным значениям параметров q_0 , q_1 и q_2 с использованием соотношений (5.2-15). Эти коэффициенты нет необходимости определять по соответствующим коэффициентам дифферен-

аналогичных уравнений аналогового регулятора. Соотношения (5.2-15) справедливы и для больших значений тактов квантования.

Задавая параметр q_0 , можно определить начальное значение управляющей переменной $u(0)$ или начальную ошибку управления при ступенчатом изменении задающего сигнала. При этом уменьшается на единицу число оптимизируемых с помощью численных методов параметров регулятора, что сокращает время расчетов. Более того, такой подход позволяет в достаточной степени *задемпфировать* процессы управления без введения в критерий оптимизации весового коэффициента g .

Результаты моделирования объекта второго порядка с неминимальнофазовой характеристикой и объекта третьего порядка с *численным запаздыванием* позволяют сделать следующие выводы для алгоритмов управления второго порядка.

ВЫБОР ТАКТА КВАНТОВАНИЯ T_0

Чем меньше величина такта квантования, тем лучше качество процессов управления. Однако при очень малых значениях такта квантования дальнейшее улучшение качества достигается лишь при существенном возрастании затрат на управление. Поэтому не следует выбирать такт квантования слишком малым. Для выбора приемлемого такта квантования можно руководствоваться следующим соотношением:

$$T_0/T_{95} \approx 1/15 \dots 1/4. \quad (5.4-10)$$

Здесь T_{95} — время достижения регулируемой координатой величины, равной 95% ее установившегося значения при ступенчатом изменении задающего сигнала.

ВЫБОР ВЕСОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА g

Если на основании оптимизации выбираются значения всех трех параметров алгоритма управления второго порядка (ЗПР-3), то оптимальным с точки зрения хорошего качества процессов управления и малых затрат на управление будет значение параметра g , удовлетворяющее условию

$$g/K^2 \approx 0,1 \dots 0,25, \quad (5.4-11)$$

где $K = G_p(1)$ — коэффициент передачи объекта.

Чем больше величина такта квантования, тем меньше влияние коэффициента g на значения параметров алгоритма управления.

ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ $u(0) = q_0$

Величина q_0 зависит от допустимого диапазона изменения управляющей переменной и от характеристик конкретного объекта управления. Так, для неминимальнофазового объекта (объект II) значение q_0 выбрано равным 1,75, а для инерционного объекта (объект III) $q_0 = 2,5$. Однако значение q_0 можно выбирать из большего диа-

пазона, зависящего от допустимого диапазона изменения управляющей переменной. При оценке величины q_0 следует учитывать максимально возможное значение ступенчатого изменения сигнала задающей переменной.

Если такт квантования не слишком мал, начальное значение и управляющей переменной $u(0)$ можно оценить с помощью следующего неравенства:

$$u(0) \leq 1/(1 - a_1) (b_1 + b_2 + \dots + b_m). \quad (5.4-12)$$

Это неравенство получено на основании анализа характеристик модифицированного апериодического регулятора AP ($\nu+1$) [см. уравнение 7.2-13)].

5.5. ВЫБОР ТАКТА КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ОПТИМИЗИРУЕМЫХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Как хорошо известно, дискретные регуляторы обычно обладают худшими качественными характеристиками, чем непрерывные. Иногда это объясняют тем, что дискретные выборки сигналов содержат меньше информации, чем непрерывные сигналы. Однако интерес представляет не только количество информации, но и то, как она используется. Поскольку кроме этого важную роль играют класс и частотный спектр возмущающих сигналов, то оказывается достаточно сложным сделать обобщающие выводы о качестве процессов регулирования в дискретных системах. В случае параметрически оптимизируемых регуляторов, как правило, принято считать, что качество управления ухудшается с ростом величины такта квантования. Следовательно, если поставлена задача обеспечения качества управления, такт квантования следует выбирать как можно меньшим.

Выбор такта квантования зависит не только от достижимого качества управления. Необходимо учитывать следующие факторы:

- требуемое качество управления;
- динамику объекта;
- спектры возмущений;
- исполнительное устройство и его привод;
- измерительные приборы;
- требования оператора;
- вычислительные затраты или стоимость одного контура управления;
- используемую модель объекта.

Рассмотрим, какое влияние оказывают эти факторы

Из рис. 5.4.2 и 5.4.3 видно, что задание такта квантования $T_0 = 4$ с приводит к незначительному ухудшению процессов по сравнению с процессами при $T_0 = 1$ с, представляющими хорошее приближение к непрерывному случаю. Таким образом, если нас интересует только требуемое *качество управления*, величина такта квантования часто может быть выбрана большей, чем та, которая обеспечивает близкую аппроксимацию непрерывного контура управления. Практические рекомендации по выбору такта квантования, основанные на аппроксимации характеристик непрерывного контура управления, приведены в табл. 5.5.1.

На выбор такта квантования существенное влияние оказывает *динамика объекта управления*, поскольку она определяет как струк-

Тс

Правила для определения тактов квантования для низкочастотных объектов

Критерий определения такта квантования	Литература	Определение такта квантования	Такт квантования для объекта III, с	Замечания
	[5.10], [5.3] [5.10], [5.3]	$T_0 \approx (1/8 \dots 1/16) (1/f)$ $T_0 \approx (1/4 \dots 1/8) T_t$	3...1 —	Объекты с преобладающим временем запаздывания
Время установления, большее, чем для непрерывного ПИ-регулятора: 15%	[5.11], [5.17]	$T_0 \approx (1,2 \dots 0,35) T_u$ $T_0 \approx (0,35 \dots 0,22) T_u$	4,5	$0,1 \leq T_u/T \leq 1,0$ $1,0 \leq T_u/T \leq 10$
Компенсация возмущений до частоты ω_{\max} , как в непрерывном контуре		$T_0 = \pi/\omega_{\max}$	8...2	Условие выбора: $ G(\omega_{\max}) = 0,01 \dots 0,1$
Моделирование разд. 5.4	[5.7]	$T_0 \approx (1/6 \dots 1/15) T_{95}$	8...3	
Идентификация модели объекта	[3.13]	$T_0 \approx (1/6 \dots 1/12) T_{95}$	8...4	

f — собственная частота замкнутой системы (1/с); T_t — время запаздывания; T_{95} — время достижения 95% установившегося значения; T_u — время задержки (см. табл. 5.6.1).

туру передаточной функции, так и ее постоянные времени. В связи с этим соотношения для выбора такта квантования (табл. 5.5.1) представлены как функции времени задержки, чистого запаздывания и т. д. Как правило, чем больше постоянная времени, тем больше такт квантования.

Рассмотрим теперь зависимость такта квантования от *спектра возмущающих сигналов* или ширины их полосы. Хорошо известно, что для контура управления можно выделить три области частот [5.14] (см. разд. 11.4): низкочастотная область ($0 \leq \omega \leq \omega_1$) — возмущения управляющей переменной подавляются; среднечастотная область ($\omega_1 < \omega \leq \omega_2$) — возмущения усиливаются; высокочастотная область ($\omega_2 < \omega < \infty$) — контур управления не оказывает действия на возмущения.

Обычно контуры управления проектируют таким образом, чтобы их среднечастотная область охватывала такой диапазон частот, в котором амплитуда возмущающих действий была незначительной. Кроме того, возмущающие сигналы высокой и средней частоты необходимо подвергать фильтрации, чтобы исключить нежелательные отклонения управляющей переменной. Если возмущающие сигналы вплоть до частоты $\omega_{\max} = \omega_1$ необходимо обрабатывать, как и в непрерывной системе, такт квантования должен выбираться в соответствии с теоремой Шеннона:

$$T_0 \leq \pi / \omega_{\max}.$$

Эту же теорему можно использовать для определения такта квантования в том случае, когда известно собственное значение системы с наибольшей собственной частотой ω_{\max} . Она будет максимальной частотой, пропускаемой дискретным регулятором без искажений. В частности, если исполнительное устройство обладает значительной инерционностью, в общем случае не следует выбирать слишком малый такт квантования, поскольку может случиться, что предыдущий сигнал управляющей переменной окажется неотработанным к моменту прихода следующего сигнала. Если в системе используются *измерительные приборы*, выдающие сигналы дискретно, как, например, в химических анализаторах или во вращающихся радиолокационных антеннах, то такт квантования дискретного регулятора оказывается заданным. Оператору, как правило, желательно иметь в системе быстрый отклик управляющей или регулируемой переменной на ступенчатое изменение задающего сигнала в произвольный момент времени. Поэтому такт квантования не должен превышать нескольких секунд. Более того, если учитывать возможность возникновения опасной ситуации, например появления сигнала тревоги, такт квантования следует выбирать малым. Для минимизации вычислительных затрат или стоимости каждого контура управления такт квантования следует брать как можно большим.

Если расчет системы управления выполняется на основе идентифицированной модели объекта и если для идентификации исполь-

зуются методы оценки параметров, то такт квантования не должен быть слишком малым, иначе могут возникнуть вычислительные трудности, обусловленные близкой к линейной зависимостью уравнений системы при малых T_0 [3.13].

Из сказанного выше следует, что такт квантования нужно выбирать, исходя из большого числа требований, часть из которых оказываются противоречивыми. Поэтому приходится в каждом конкретном случае принимать компромиссное решение. К тому же для упрощения структуры программного обеспечения часто приходится выбирать один и тот же такт квантования в различных контурах системы управления. В табл. 5.5.1 сведены рекомендации по выбору тактов квантования, взятые из современных источников. Заметим, что эти рекомендации, основанные на аппроксимации качества процессов управления в непрерывных системах, часто приводят к заданию слишком малых значений тактов квантования. Для обеспечения хорошего качества управления вполне достаточно, по крайней мере для низкочастотных объектов, иметь от 6 до 15 выборок за период, определяемый временем установления T_{95} . Для некоторых объектов в тяжелой и химической промышленности рекомендуется использовать такты квантования, значения которых приведены в работах [5.12], [5.13], [5.5].

5.6. ПРАВИЛА НАСТРОЙКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ОПТИМИЗИРУЕМЫХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Для того чтобы получить приближенно оптимальный набор параметров непрерывных ПИД-регуляторов, часто применяют так называемые «правила настройки». Обычно эти правила предназначены для низкочастотных объектов и основаны на определении пределов устойчивости системы с П-регулятором или использовании постоянных времени объекта управления. Обзор таких правил содержится в работе [5.14]. Хорошо известны, например, правила Циглера и Никольса [5.14].

Рассмотрим возможность модификации правил настройки для дискретных ПИД-регуляторов. В [5.15] приведены соотношения для расчета параметров регулятора, предназначенного для управления объектами, динамика которых может быть аппроксимирована передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{1+T_s} e^{-T_t s}. \quad (5.6-1)$$

Однако с помощью этих соотношений для непрерывных регуляторов можно получить параметры дискретных регуляторов, если вместо чистого запаздывания T_t подставить величину $(T_t + T_0/2)$. Здесь $T_0/2$ — аппроксимированное время задержки, обусловленное процедурами квантования и фиксации сигналов.

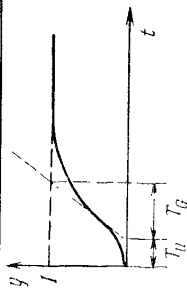
Правила настройки параметров, основанные на определении характеристик переходного процесса или пределов устойчивости, предложены в [5.16] для модифицированных алгоритмов управле-

Таблица 5.6.1

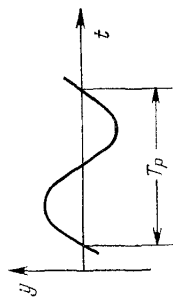
Правила настройки параметров регуляторов, предложенные Такахаши [5.16] на основании критерия Циглера — Никольса

Алгоритм управления: $u(k) - u(k-1) = K \left[y(k-1) - y(k) + \frac{T_D}{T_I} [w(k) - y(k)] + \frac{T_D}{T_0} [2y(k-1) - y(k-2) - y(k)] \right]$

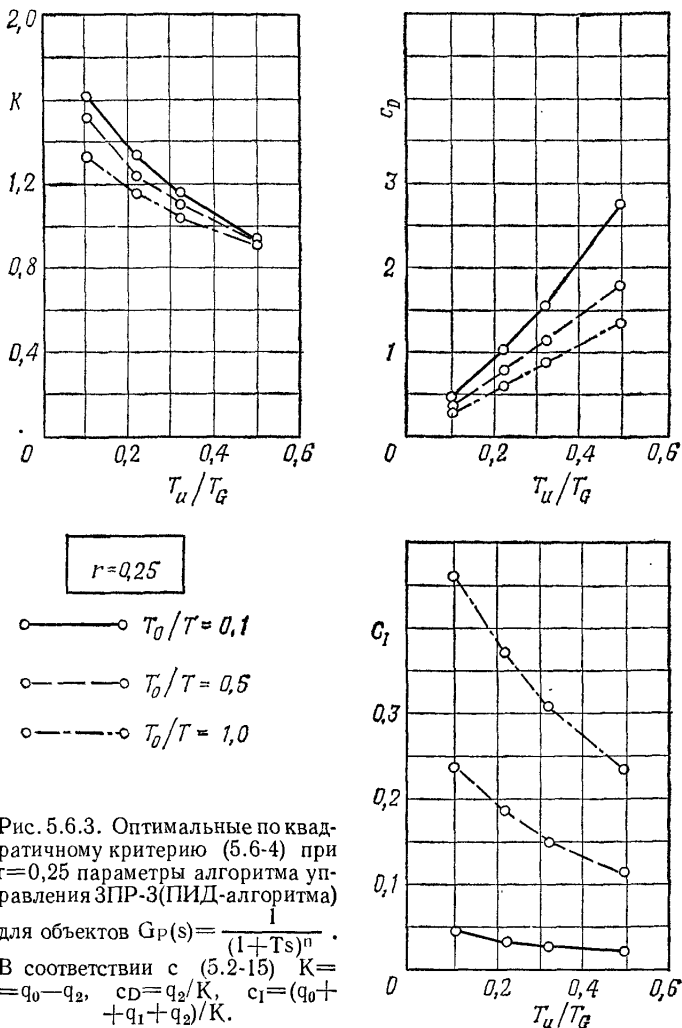
	K	T_0/T_I	T_D/T_0	K	T_0/T_I	T_D/T_0
П	$\frac{T_G}{T_u + T_0}$	—	—	$K_{\text{крит}}/2$	—	—
ПИ	$\frac{0,9T_G}{T_u + T_0/2} - \frac{0,135T_G T_0}{(T_u + T_0/2)^2}$	$\frac{0,27T_G T_0}{K(T_u + T_0/2)^2}$	—	$[0,45K_{\text{крит}} \dots 0,27K_{\text{крит}}] \times$ $\times (T_0/T_G)$ меньшее значение для $T_0 \approx 4T_u$	$K_{\text{крит}} \frac{T_0}{K T_P}$ 0,54	—
ПИД	$\frac{1,2T_G}{(T_u + T_0)} - \frac{0,3T_G T_0}{(T_u + T_0/2)^2}$	$\frac{0,6T_G T_0}{K(T_u + T_0/2)^2}$	$\frac{0,5T_G}{KT_0}$	$[0,6K_{\text{крит}} \dots 0,6K_{\text{крит}}] \frac{T_0}{T_P}$ Справедливо для $T_0 \leq 2T_u$ Не рекомендуется для $T_0 \approx 4T_u$	$K_{\text{крит}} \frac{T_0}{K T_P}$ 1,2	$\frac{3}{40} \frac{K_{\text{крит}} T_P}{K T_0}$



Измерение параметров переходного процесса



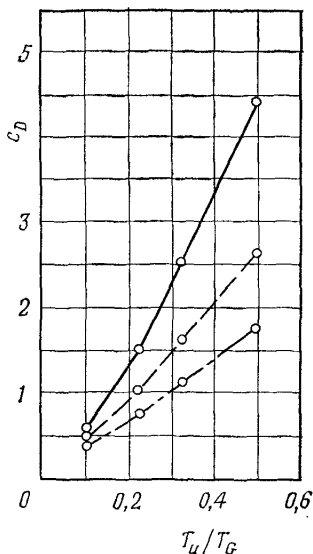
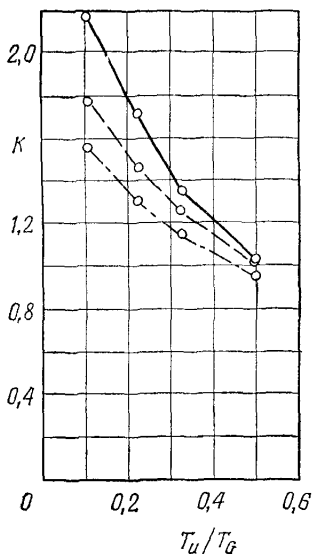
Измерение параметров колебаний



тора нулевого порядка при различных значениях такта квантования: $T/T_0=0,1; 0,5$ и $1,0$. Параметры q_0 , q_1 и q_2 регулятора определялись на основании оптимизации квадратичного критерия качества управления (см. 5.2-6)

$$S_{eu}^2 = \sum_{k=0}^M [e^2(k) + r \Delta u^2(k)] \quad (5.6-4)$$

для ступенчатого изменения задающей переменной $w(k)$ и трех значений весового коэффициента при управляющей переменной $r=0, 0,1$ и $0,25$. На основании полученных параметров были опре-



r=0,1

- T₀/T = 0,1
- - -○ T₀/T = 0,5
- · - · -○ T₀/T = 1,0

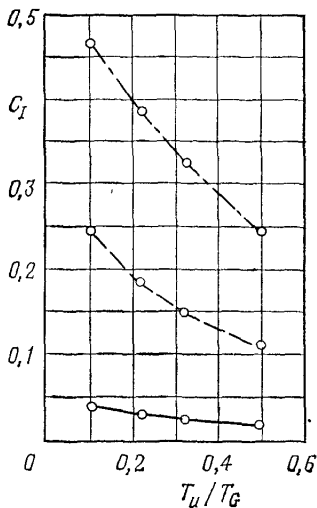


Рис. 5.6.2. Оптимальные по квадратичному критерию (5.6-4) при $\gamma=0,1$ параметры алгоритма управления ЗПР-3(ПИД-алгоритма)

для объектов $G_P(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$.
 В соответствии с (5.2-15) $K=q_0 - q_2$, $c_D=q_2/K$, $c_I=(q_0+q_1+q_2)/K$,

ровое моделирование [5.18]. Моделирование выполнялось для объектов с непрерывной передаточной функцией вида

$$G_P(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}, \tag{5.6-3}$$

где n принимало значения 2, 3, 4 и 6. Указанные передаточные функции были переведены в дискретную форму с учетом экстраполя-

ния, представленных в виде (5.3-3). Эти правила сведены в табл. 5.6.1.

Для более детального исследования зависимости параметров алгоритма управления

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (5.6-2)$$

от характеристик объекта управления (для низкочастотных объектов), вида критерия качества и такта квантования проводилось циф-

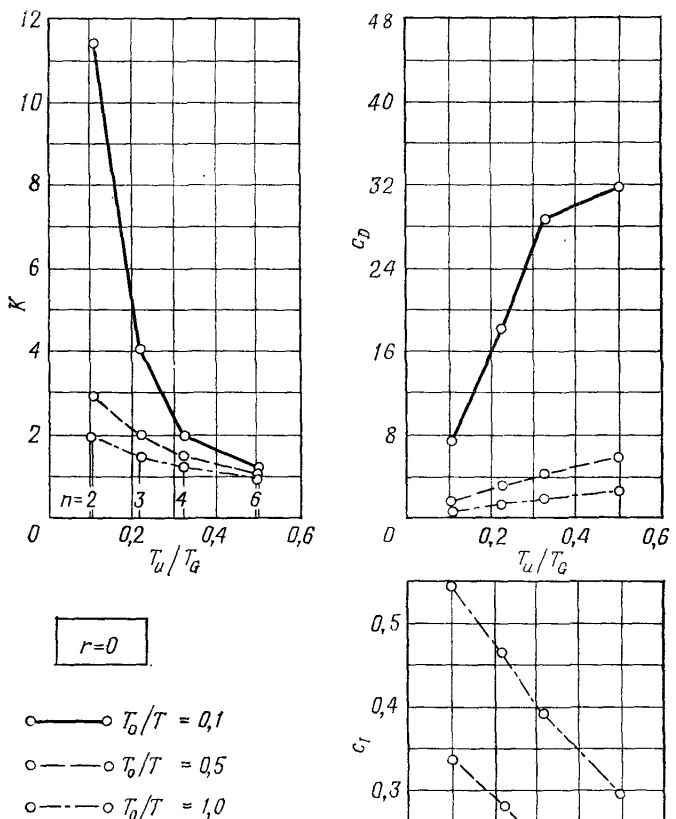
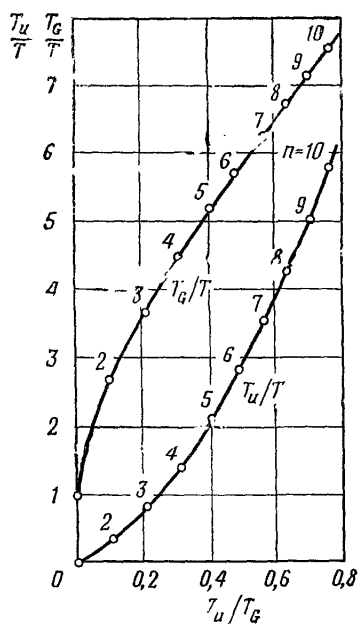


Рис. 5.6.1. Оптимальные по квадратичному критерию (5.6-4) при $r=0$ параметры алгоритма управления ЗПР-3 (ПИД-алгоритма) для объектов $G_p(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$. В соответствии с (5.2-15) $K=q_0-q_2$, $c_D=q_2/K$, $c_I=(q_0+q_1+q_2)/K$.

делены характеристические коэффициенты регулятора K , c_D и c_I в соответствии с выражениями (5.2-15). Результаты этих исследований (диаграммы настройки) приведены на рис. 5.6.1 ÷ 5.6.3. Коэффициенты регулятора изображены на них как функции отношения постоянных времени T_u/T_G передаточных функций объектов.



Зависимость характеристик T_u/T или T_G/T от отношения T_u/T_G иллюстрируется рис. 5.6.4.

Из анализа приведенных зависимостей следует:

- а) с ростом отношения T_u/T_G (с ростом порядка n)
- коэффициент передачи K убывает;
 - коэффициент опережения c_D возрастает;
 - коэффициент интегрирования c_I убывает;
- б) с ростом такта квантования T_0
- K убывает;
 - c_D убывает;
 - c_I возрастает;

Рис. 5.6.4. Характеристики объекта $G_P(s) = 1/(1+Ts)^n$ [3.11]. Величины T_u и T_G пояснены в табл. 5.6.1.

- в) с ростом весового коэффициента γ в критерии качества
- K убывает;
 - c_D убывает;
 - c_I убывает.

Используя эти номограммы и характеристики переходного процесса при ступенчатом изменении задающего сигнала, можно определить параметры регулятора, реализующего алгоритм управления второго порядка. Процесс выбора параметров состоит в следующем:

1. Проводится касательная в точке перегиба кривой переходного процесса и определяются значения T_u , T_G и T_u/T_G , а также коэффициент передачи $K_f = y(\infty)/u(\infty)$ (см. табл. 5.6.1).

2. Из номограммы на рис. 5.6.4 определяются значения T_u/T' и T_G/T'' . После этого вычисляется значение $T = \frac{1}{2}(T' + T'')$.

3. После выбора такта квантования T_0 определяется отношение T_0/T .

4. По номограммам, приведенным на рис. 5.6.1—5.6.3, после выбора весового коэффициента γ определяются значения коэффициентов K_0 ; c_D и c_I , которые зависят от отношений T_u/T_G и T_0/T .

Здесь K_0 — коэффициент разомкнутого контура регулирования: $K_0 = K \cdot K_P$.

5. На основании уравнения (5.2-15) и полученных значений $K = K_0/K_P$, c_D и c_1 определяются параметры регулятора:

$$q_0 = K(1 + c_1), \quad q_1 = K(c_1 - 2c_D - 1), \quad q_2 = Kc_D.$$

Хотя диаграммы настройки, приведенные на рис. 5.6.1 ÷ 5.6.3, построены для равных постоянных времени объекта, рассмотренная процедура определения параметров регуляторов может быть также использована для низкочастотных объектов с существенно отличающимися постоянными времени. Это подтверждается результатами цифрового моделирования (см., например, разд. 3.2.4), а также данными, приведенными в табл. 5.6.2. В ней для сравнения приведены оптимальные параметры регулятора для объекта III, а также параметры, полученные на основе правил настройки (табл. 5.6.1) и с использованием диаграмм 5.6.1 ÷ 5.6.3 для соответствующих объектов. Параметры регулятора, выбранные на основе диаграмм настройки, хорошо согласуются с оптимальными. Применение правил настройки из табл. 5.6.1 (левая часть таблицы) приводит к значительному завышению коэффициента передачи K . Значения коэффициентов c_D и c_1 , напротив, оказываются достаточно близкими к оптимальным.

Таблица 5.6.2

Сравнение результатов настройки параметров по характеристикам переходного процесса. Объект III. $T_0 = 4$ с; $K = 1$; $T_n/T_G = 6,6$ с / 25 с = 0,264

Объект III $T_0 = 4$ с	K	$T_0/T_1 = c_1$	$T_D/T_0 = c_D$	Модель объекта
Оптимизация параметров для $\gamma = 0 \dots 0,25$ (табл. 5.4.4)	1,52...1,13	0,28...0,21	1,99...0,81	Объект III
Т: кахаша [5.16] (табл. 5.6.1)	2,34	0,33	1,3	$\frac{1}{T_G^s} e^{-T_0 s}$
Рис. 5.6.1—5.6.3 для $\gamma = 0 \dots 0,25$	1,7...1,2	0,27...0,17	3,8...0,85	$\frac{1}{(1+Ts)^n}$

Компенсационные регуляторы

Основная задача проектирования следящих систем управления состоит в том, чтобы регулируемая переменная y как можно более точно воспроизводила входной задающий сигнал w . Если модель G_P устойчивого объекта задана точно, то при отсутствии возмущений эта задача может быть решена введением регулятора в прямой цепи, как показано на рис. 6.1. В идеальном случае можно потребовать, чтобы выходная координата точно отслеживала входной сигнал w . Это требование может быть выполнено, если

$$G_{ST}(z) = G_{ST}^0(z) = \frac{1}{G_P(z)}. \quad (6.1)$$

Если передаточная функция G_{ST}^0 является реализуемой, то такой регулятор полностью «компенсирует» динамику объекта, поскольку

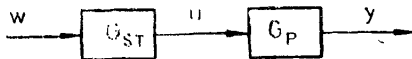


Рис. 6.1. Система управления с прямой связью.

обладает обратными к объекту динамическими характеристиками. Однако, если объект обладает чистым запаздыванием, регулятор оказывается нереализуемым, и в его передаточную характеристику приходится вводить дополнительный элемент, позволяющий сформировать реализуемый алгоритм управления:

$$G_S(z) = G_{ST}^0(z) G_S^R(z) = \frac{1}{G_P(z)} G_S^R(z). \quad (6.2)$$

Конечно, такая модификация приводит к некоторому отличию сигналов w и y . Рассматривая вопросы сокращения нулей и полюсов регулятора и объекта, следует учитывать соображения, изложенные на стр. 122—123. Если же изложенные выше предположения не оправдываются, т. е. если модель объекта оказывается неточной и в системе присутствуют возмущающие воздействия, то для управления следует использовать систему с обратной связью, изображенную на рис. 6.2.

В отличие от компенсационной в системе с обратной связью нельзя требовать выполнения условия $e(t) = w(t) - y(t) = 0$ для $t \geq 0$. Дело в том, что в системах с обратной связью управляющая переменная формируется из сигнала ошибки, который отличен от нуля по крайней мере в течение переходного процесса. Поэтому задается

передаточная функция замкнутой системы

$$G_w(z) = \frac{y(z)}{w(z)} = \frac{G_R(z) G_P(z)}{1 + G_R(z) G_P(z)}, \quad (6.3)$$

заведомо отличная от 1, и передаточная функция регулятора имеет вид

$$G_R(z) = \frac{1}{G_P(z)} \frac{G_w(z)}{1 - G_w(z)}. \quad (6.4)$$

Передаточная функция регулятора (6.4) состоит из обратной передаточной функции объекта управления и дополнительного члена, вид которого зависит от заданной передаточной функции замкнутой системы. Поэтому только часть регулятора используется для

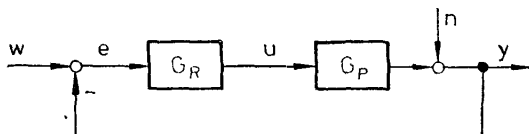


Рис. 6.2. Система управления с обратной связью.

сокращения нулей и полюсов объекта. «Компенсационный» регулятор может быть спроектирован не только для отработки задающего воздействия, но и для заданного возмущающего воздействия. Например, для заданной передаточной функции по возмущению $G_n(z) = y(z)/n(z)$ передаточная функция регулятора имеет вид

$$G_R(z) = \frac{1}{G_P(z)} \frac{1 - G_n(z)}{G_n(z)}. \quad (6.5)$$

Вопросам разработки «компенсационных» регуляторов, особенно непрерывных, посвящено большое число работ. Дискретные регуляторы рассматриваемого типа описаны в [6.1—6.3, 2.4, 2.14].

Задавая желаемую замкнутую передаточную функцию $G_w(z)$ или $G_n(z)$, следует учитывать следующие ограничения:

а) Реализуемость.

Если задана дискретная передаточная функция вида

$$G(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_n z^n}{1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_m z^m}, \quad (6.6)$$

то условие реализуемости состоит в том, что $n \leq m$, если $\alpha_m \neq 0$ (см. разд. 3.4). В передаточных функциях

$$G_R(z) = \frac{Q_v(z)}{P_\mu(z)} \quad \text{и} \quad G_P(z) = \frac{B_n(z)}{A_m(z)}$$

индексами обозначены порядки полиномов числителя и знаменателя. Тогда с учетом выражения (6.3) получим для передаточной

функции замкнутой системы

$$G_w(z) = \frac{Q_v B_n}{P_{\mu} A_m + Q_v B_n}.$$

Если передаточные функции $G_R(z)$ и $G_P(z)$ реализуемы, т. е. $v \leq \mu$ и $p \leq m$, то порядки полиномов числителя и знаменателя $G_w(z)$ определяются следующим образом:

$$G_w(z): \frac{\text{Порядок } (v+n)}{\text{Порядок } (\mu+m)}.$$

Следовательно, разность порядков (рп) передаточной функции $G_w(z)$ будет равна

$$\text{рп} = (\mu - v) + (m - n). \quad (6.7)$$

Для получения минимально возможной величины рп выбирают $\mu = v$. Тогда разность порядков замкнутой передаточной функции

$$\text{рп}(G_w) = (m - n)$$

оказывается равной разности порядков передаточной функции объекта управления $G_P(z)$:

$$\text{рп}(G_P) = (m - n) = \text{рп}(G_w). \quad (6.8)$$

Это значит, что исходя из условий реализуемости разность порядков передаточной функции замкнутой системы $G_w(z)$ должна быть либо равна, либо быть больше разности порядков передаточной функции объекта, если порядок регулятора $\mu \geq v$ [2.19].

Обычно в передаточной функции объекта, соответствующей выражению (3.2-8), коэффициент $b_0 = 0$, поскольку либо чувствительный элемент, либо управляющий орган объекта имеют временную задержку. Тогда из уравнения (6.6) следует, что $p = m - 1$, т. е. разность порядков равна единице, так что, например, передаточная функция минимального порядка будет равна

$$G_w(z) = z^{-1}.$$

б) Сокращение полюсов и нулей.

Когда компенсационный регулятор $G_R(z)$ с передаточной функцией (6.4) и объект $G_{PO}(z)$ объединены в замкнутую систему управления, то полюса и нули объекта сократятся с нулями и полюсами регулятора, если модель $G_P(z)$ точно описывает объект. Однако используемые при проектировании модели $G_P(z) = B(z)/A(z)$ никогда не описывают динамику объекта, поэтому соответствующие нули и полюса сокращаются не точно, а только приближенно. Что касается полюсов (корней полинома $A^+(z)$) и нулей (корней полинома $B^+(z)$), которые расположены на z -плоскости внутри круга единичного радиуса, то неточность их сокращения, как правило, приводит лишь к незначительным отклонениям характеристик замкнутой системы от заданных. Если же полюса $A^-(z)$ или нули $B^-(z)$

объекта расположены вблизи или вне окружности единичного радиуса, то надо быть очень осторожным.

Для анализа этой проблемы [2.4] запишем передаточную функцию объекта в следующем виде:

$$G_{PO}(z) = \frac{B_0^+(z) B_0^-(z)}{A_0^+(z) A_0^-(z)}. \quad (6.9)$$

Соответствующая ему модель будет

$$G_P(z) = \frac{B^+(z) B^-(z)}{A^+(z) A^-(z)}. \quad (6.10)$$

Если регулятор точно компенсирует устойчивые нули и полюса, расположенные внутри единичного круга, т. е.

$$G_R(z) = \frac{A_0^+(z) A^-(z) G_w(z)}{B_0^+(z) B^-(z) [1 - G_w(z)]}, \quad (6.11)$$

то передаточная функция замкнутой системы примет следующую форму:

$$G_{w, \text{res}}(z) = \frac{A^-(z) B_0^-(z) G_w(z)}{A_0^-(z) B^-(z) [1 - G_w(z)] + A^-(z) B_0^-(z) G_w(z)}. \quad (6.12)$$

Если теперь учесть, что

$$\begin{aligned} A^-(z) &= A^-(z) + \Delta A^-(z), \\ B^-(z) &= B^-(z) + \Delta B^-(z), \end{aligned}$$

то мы получим

$$G_{w, \text{res}}(z) = \frac{A_0^- B_0^- G_w + \Delta A^- B_0^- G_w}{A_0^- B_0^- + A_0^- \Delta B^- [1 - G_w] + \Delta A^- B_0^- G_w}. \quad (6.13)$$

При $\Delta A^-(z)=0$ и $\Delta B^-(z)=0$ полюса этой передаточной функции располагаются вблизи или вне окружности единичного радиуса, однако они точно сокращаются нулями. Если разности $\Delta A^-(z)$ и $\Delta B^-(z)$ отличны от нуля, полюса системы смещаются и точной компенсации не происходит. В результате этого процессы управления становятся существенно колебательными или даже неустойчивыми, если полюса находятся вне единичной окружности. Поэтому применять компенсационные регуляторы для объектов с нулями или полюсами, расположенными вблизи или вне окружности единичного радиуса на z -плоскости, не рекомендуется, поскольку разности $\Delta A^-(z)$ и $\Delta B^-(z)$ всегда отличны от нуля.

Следовательно, область применения компенсационных регуляторов (6.4) ограничена объектами, которые достаточно задемпфированы, асимптотически устойчивы и не обладают неминимальнофазовыми свойствами.

в) Межтактовое поведение систем.

В отличие от непрерывных компенсационных регуляторов аналогичные дискретные регуляторы обеспечивают заданное качество управления в соответствии с заданной передаточной функцией $G_w(z)$ только в тактовые моменты времени. Если передаточная функция $G_w(z)$ выбрана неверно, то, хотя в тактовые моменты времени заданное поведение системы будет обеспечено, между тактами могут возникнуть колебания регулируемой переменной. Как правило, эти колебания слабо демпфированы, что приводит к значительным отклонениям управляющей переменной по сравнению со случаем, соответствующим так называемому «отклику минимального прототипа» [2.4, 2.19]:

$$G_w(z) = z^{-1}, \text{ или } 2z^{-1} - z^{-2}, \text{ или } 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}.$$

Предотвратить появление межтактовых колебаний можно, требуя, чтобы передаточная функция системы имела вид

$$G_w(z) = \frac{1}{K_P} G_P(z),$$

где K_P — коэффициент передачи объекта управления. В этом случае мы получаем так называемый предсказывающий регулятор, применение которого особенно эффективно для объектов с большим временем запаздывания (см. гл. 9).

Хотя процесс проектирования компенсационных регуляторов оказывается достаточно простым, применять их в общем случае не рекомендуется из-за соображений, рассмотренных выше. В частности, это касается систем с объектами высокого порядка, где достаточно трудно определить желаемый характер процессов регулирования, и поэтому удобнее применять другие методы проектирования.

Регуляторы для систем с конечным временем установления (апериодические регуляторы)

Межтактовые колебания, которые могут возникать в системе, включающей в себя компенсационные регуляторы (см. гл. 6), можно устранить, задавая конечное время установления управляющей и регулируемой переменных. Джури [7.1, 2.3] назвал такой характер протекания процессов «апериодическим». При ступенчатом изменении задающей переменной входной и выходной сигналы объекта должны при этом принимать новое установившееся значение после определенного конечного интервала времени. Ниже описаны методы проектирования апериодических регуляторов, которые весьма просто выводятся и требуют при синтезе небольшого объема вычислений.

7.1. ОБЫЧНЫЙ АПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР

Предполагается, что ступенчатое изменение задающей переменной происходит в момент времени $k=0$, т. е.

$$w(k) = 1 \quad \text{для } k=0, 1, 2, \dots \quad (7.1-1)$$

Если время запаздывания $d=0$, то требования для минимального конечного времени установления переходного процесса записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} y(k) = w(k) = 1 & \quad \text{для } k \geq m, \\ u(k) = u(m) & \quad \text{для } k \geq m. \end{aligned} \quad (7.1-2)$$

Для случая $b_0=0$ z -преобразования задающей, регулируемой и управляющей переменных имеют следующий вид [7.2]:

$$w(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})}, \quad (7.1-3)$$

$$y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots], \quad (7.1-4)$$

$$u(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m)[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots]. \quad (7.1-5)$$

Разделив уравнения (7.1-4) и (7.1-5) на (7.1-3), получим

$$\frac{y(z)}{w(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} = P(z), \quad (7.1-6)$$

$$p_1 = y(1),$$

$$p_2 = y(2) - y(1),$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$p_m = 1 - y(m-1),$$

$$\frac{u(z)}{w(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m} = Q(z), \quad (7.1-7)$$

$$\begin{aligned} q_0 &= u(0), \\ q_1 &= u(1) - u(0), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_m &= u(m) - u(m-1). \end{aligned}$$

Следует учесть, что

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \quad (7.1-8)$$

$$q_0 + q_1 + \dots + q_m = u(m) = \frac{1}{K} = \frac{1}{G_P(1)}. \quad (7.1-9)$$

Передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$G_w(z) = \frac{y(z)}{w(z)} = \frac{G_R(z) G_L(z)}{1 + G(z) G_P(z)}. \quad (7.1-10)$$

Следовательно, передаточная функция компенсационного регулятора [см. (6-4)] имеет вид

$$G_R(z) = \frac{1}{G_P(z)} \frac{G_w(z)}{1 - G_w(z)}. \quad (7.1-11)$$

Сравнивая уравнения (7.1-6) и (7.1-10), получим

$$G_w(z) = P(z). \quad (7.1-12)$$

Более того, из уравнений (7.1-6) и (7.1-7) следует, что

$$G_P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (7.1-13)$$

и с учетом (7.1-11) передаточная функция регулятора принимает вид

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_m z^{-m}}. \quad (7.1-14)$$

Параметры этого регулятора можно получить, используя уравнения (7.1-13), (7.1-8) и (7.1-9):

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = u(0), \\ q_1 &= a_1 q_0, \quad p_1 = b_1 q_0, \\ q_2 &= a_2 q_0, \quad p_2 = b_2 q_0, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_m &= a_m q_0, \quad p_m = b_m q_0. \end{aligned} \quad (7.1-15)$$

Таким образом, параметры регулятора могут быть вычислены очень просто. Начальное значение управляющей переменной $u(0)$ зависит только от значения суммы коэффициентов b_1 объекта. Поскольку значение этой суммы убывает с уменьшением такта квантования, начальное значение управляющей переменной $u(0)$ будет тем больше, чем меньше такт квантования.

Такой аperiodический регулятор можно считать *компенсационным регулятором* (см. 7.1-11), однако передаточная функция замкнутой системы (7.1-12) и (7.1-6) в данном случае определяется в процессе проектирования, а не задается заранее, как это было описано в гл. 6. Результирующая передаточная функция замкнутой системы с учетом уравнений (7.1-12) и (7.1-6) принимает вид

$$G_w(z) = P(z) = p_1 z^{-1} + \dots + p_m z^{-m} = \frac{p_1 z^{m-1} + \dots + p_m}{z^m}.$$

Ее характеристическое уравнение равно

$$1 + G_R(z) G_P(z) = z^m = 0. \quad (7.1-16)$$

Таким образом, контур управления с аperiodическим регулятором имеет m полюсов в начале координат плоскости z .

Если $d \neq 0$, необходимо использовать следующую модель объекта [5.7]:

$$\begin{aligned} G_P(z) &= \frac{b_1 z^{-(1+d)} + \dots + b_m z^{-(m+d)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \\ &= \frac{\bar{b}_1 z^{-1} + \dots + \bar{b}_{d+1} z^{-(1+d)} + \dots + \bar{b}_v z^{-v}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m} + \dots + a_v z^{-v}}. \end{aligned} \quad (7.1-17)$$

Коэффициенты этой модели удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{array}{l} \bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \dots = \bar{b}_d = 0, \quad a_{m+1} = 0, \\ \bar{b}_{1+d} = b_1, \quad \vdots \\ \bar{b}_{2+d} = b_2, \quad a_v = 0 \\ \vdots \\ \bar{b}_v = b_m; \end{array} \right\}. \quad (7.1-18)$$

На процесс управления наложены теперь следующие ограничения:

$$\begin{aligned} y(k) = w(k) = 1 & \quad \text{для } k \geq v = m + d, \\ u(k) = u(m) & \quad \text{для } k \geq m. \end{aligned} \quad (7.1-19)$$

Далее можно применить уравнения (7.1-3) ÷ (7.1-15), учитывая (7.1-17). Из уравнений (7.1-17) и (7.1-13) следует, что

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = u(0), \\
 q_1 &= a_1 q_0, \\
 q_2 &= a_2 q_0, & p_1 &= \bar{b}_1 q_0 = 0, \\
 &\vdots & &\vdots \\
 &\vdots & &\vdots \\
 q_m &= a_m q_0, & p_d &= \bar{b}_d q_0 = 0, \\
 q_{m+1} &= a_{m+1} q_0 = 0, & p_{d+1} &= \bar{b}_{d+1} q_0 = b_1 q_0, \\
 &\vdots & &\vdots \\
 &\vdots & &\vdots \\
 q_v &= a_v q_0 = 0, & p_v &= \bar{b}_v q_0 = b_m q_0.
 \end{aligned} \tag{7.1-20}$$

Следовательно, передаточная функция регулятора имеет вид

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 + d z^{-(1+d)} - \dots - p_{m+d} z^{-(m+d)}}. \tag{7.1-21}$$

Из уравнений (7.1-20) и (7.1-21) получим передаточную функцию аperiodического регулятора AP (v)

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d}}. \tag{7.1-22}$$

Отсюда следует, что передаточная функция по задающему сигналу при использовании точной модели объекта будет равна

$$G_w(z) = \frac{q_0 B(z^{-1}) z^{-d}}{1} = \frac{q_0 B'(z)}{z^{(m+d)}}, \tag{7.1-23}$$

а ее характеристическое уравнение есть

$$z^{(m+d)} = 0. \tag{7.1-24}$$

Следует иметь в виду, что применение аperiodического регулятора приводит к сокращению полюсов объекта управления.

Пример 7.1. Аperiodический регулятор AP (v) ($v = m + d$).

Для низкочастотного объекта III, описанного в разд. 5.4.1 и приложении, при такте квантования $T_0 = 4$ с на основании соотношений (7.1-20) получены следующие коэффициенты аperiodического регулятора:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= 9,523; & q_1 &= -14,285; & q_2 &= 6,714; & q_3 &= -0,952; \\
 p_1 &= 0; & p_2 &= 0,619; & p_3 &= 0,457; & p_4 &= -0,0762.
 \end{aligned}$$

На рис. 7.1.1 изображены переходные процессы при ступенчатом изменении задающей w и возмущающей v переменных. Как видно из рисунков, регулятор обеспечивает заданный аperiodический характер протекания переходного процесса при ступенчатом изменении сигнала w .

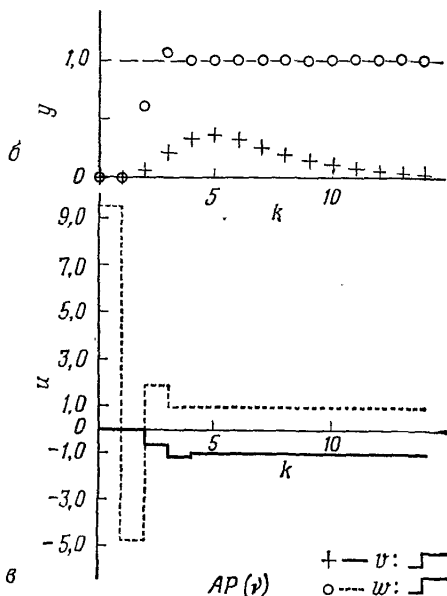
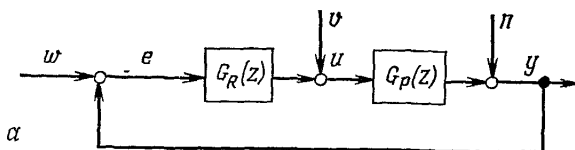


Рис. 7.1.1. Переходные процессы в контуре управления с аperiodическим регулятором порядка ν (нормальный порядок) и объектом III для ступенчатого изменения сигналов w и v .

a — блок-схема контура управления;
 b — изменение регулируемой переменной;
 v — изменение управляющей переменной.

7.2. АPERИОДИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА

Если увеличить конечное время установления на один такт с $m+1$, то можно заранее определить начальное значение управляющей переменной $u(0)$. Поскольку этот сигнал обычно имеет максимальную величину, его можно ограничить, задав допустимое значение $u(0)$ при синтезе регулятора [5.7].

Добавим еще один член в уравнения (7.1-4) и (7.1-5), тогда уравнения (7.1-6) и (7.1-7) примут вид

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)}, \quad (7.2-1)$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}. \quad (7.2-2)$$

Приравнявая коэффициенты этих полиномов коэффициентам из уравнения (7.1-13), получим

$$\frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}. \quad (7.2-3)$$

Это равенство справедливо только в том случае, когда его правая часть содержит общий корень в числителе и знаменателе.

Таким образом,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(p_1'z^{-1} + \dots + p_m'z^{-m})(\alpha - z^{-1})}{(q_0' + \dots + q_m'z^{-m})(\alpha - z^{-1})}. \quad (7.2-4)$$

После деления на q_0' , получим связь между коэффициентами уравнения (7.2-4) и коэффициентами уравнения (7.2-3):

$$\begin{aligned} q_1' &= a_1 q_0', & p_1' &= b_1 q_0', \\ q_2' &= a_2 q_0', & p_2' &= b_2 q_0', \\ &\vdots & &\vdots \\ q_m' &= a_m q_0', & p_m' &= b_m q_0'. \end{aligned} \quad (7.2-5)$$

Теперь выпишем параметры полных полиномов числителя и знаменателя уравнения (7.2-4) и, приравнявая коэффициенты в правых частях уравнений (7.2-3) и (7.2-4), запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha q_0', & p_1 &= \alpha p_1', \\ q_1 &= (\alpha q_1' - q_0'), & p_2 &= (\alpha p_2' - p_1'), \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \\ q_m &= (\alpha q_m' - q_{m-1}'), & p_m &= (\alpha p_m' - p_{m-1}'), \\ q_{m+1} &= -q_m', & p_{m+1} &= -p_m'. \end{aligned} \quad (7.2-6)$$

Из уравнения (7.1-7) имеем

$$q_0 = \alpha q_0' = u(0), \quad (7.2-7)$$

а из уравнений (7.2-1) или (7.1-6) получим

$$p_1 + \dots + p_{m+1} = 1.$$

Наконец, из уравнений (7.2-6) и (7.2-5) следует, что

$$q_0' = q_0 - \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = q_0 - \frac{1}{\sum b_i}. \quad (7.2-8)$$

Теперь на основании уравнений (7.2-7) и (7.2-8) можно записать соотношения для определения параметров регулятора

$$\begin{aligned} q_0 &= u(0) \text{ — задано,} \\ q_1 &= q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i}, \\ q_2 &= q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_m &= q_0(q_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum b_i}, \end{aligned} \quad (7.2-9)$$

$$q_{m+1} = a_m \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right).$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= q_0 b_1, \\
 p_2 &= q_0 (b_2 - b_1) + \sum b_i, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 p_m &= q_0 (b_m - b_{m-1}) + \sum b_i, \\
 p_{m+1} &= -b_m \left(q_0 - \sum b_i \right).
 \end{aligned} \tag{7.2-10}$$

По аналогии с уравнением (7.1-14) запишем передаточную функцию регулятора

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1-P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_{m+1} z^{-(m+1)}}, \tag{7.2-11}$$

однако в отличие от регулятора, описываемого выражением (7.1-14), в данном случае начальное значение управляющей переменной $u(0)$ задано. Второе значение управляющей переменной в соответствии с уравнениями (7.1-7) и (7.2-9) будет равно

$$u(1) = q_1 + q_0 = a_1 u(0) + \frac{1}{\sum b_i}. \tag{7.2-12}$$

Значение $u(0)$ не следует задавать слишком малым, так как при этом $u(1)$ будет больше $u(0)$, что в большинстве случаев нежелательно.

Для выполнения условия $u(1) \leq u(0)$ необходимо, чтобы удовлетворялось соотношение

$$u(0) = q_0 \geq 1/(1 - a_1) \sum b_i. \tag{7.2-13}$$

Выполнение условия $u(1) \leq u(0)$ вовсе не гарантирует, что $|u(k)| < |u(0)|$ для $k \geq 2$. Поскольку расчет параметров регулятора достаточно прост, значение $u(0)$ обычно изменяют до тех пор, пока не будет получена желаемая последовательность управляющих сигналов. Часто условие $u(1) = u(0)$ приводит к хорошим результатам.

Для объектов с запаздыванием ($d > 0$) расчет регулятора выполняют с использованием уравнений (7.1-17) ÷ (7.1-21). В этом случае передаточная функция аперидического регулятора $AP(v+1)$, определяемая уравнением (7.2-11) и соотношениями (7.2-9) и (7.2-10), принимает вид

$$G_R(z) = \frac{q_0 A(z^{-1}) [1 - z^{-1}/\alpha]}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d} [1 - z^{-1}/\alpha]}, \tag{7.2-14}$$

где

$$1/\alpha = 1 - 1/q_0 \sum b_i. \tag{7.2-15}$$

Характеристическое уравнение регулятора записывается следующим образом:

$$z^{m+d+1} = 0. \quad (7.2-16)$$

Пример 7.2. Аperiodический регулятор $AP(v+1)$.

На рис. 7.2.1 приведены переходные процессы в системе с объектом, аналогичным использованному в примере 7.1, при подаче ступенчатого задающего

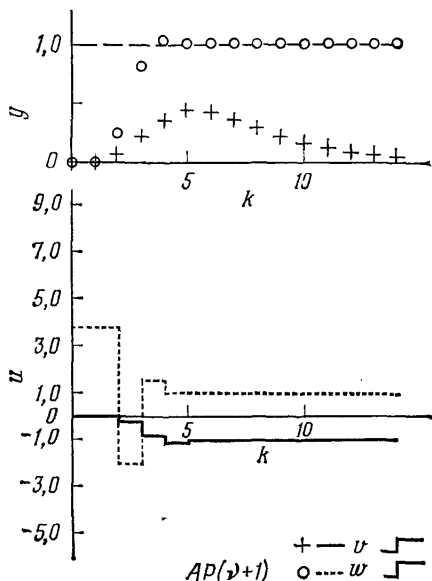


Рис. 7.2.1. Переходные процессы в контуре управления с аperiodическим регулятором порядка $v+1$ (повышенный порядок) и объектом III для ступенчатого изменения сигналов w и v . При синтезе было задано условие $u(0)=u(1)$ в соответствии с уравнением (7.2-13).

воздействия. Параметры регулятора при заданном сигнале $u(0)$ имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} q_0 &= 3,810; & q_1 &= -0,0012; & q_2 &= -5,8840; & q_3 &= 3,647; & q_4 &= -0,571; \\ p_1 &= 0; & p_2 &= 0,247; & p_3 &= 0,554; & p_4 &= 0,244; & p_5 &= -0,046. \end{aligned}$$

Как видно из переходных процессов, при ступенчатом изменении сигнала задающей переменной обеспечивается сглаженный характер переходного процесса. Начальное значение управляющей переменной уменьшилось по сравнению со значением $u(0)$ на рис. 7.1.1 на 60%. Длительность конечного переходного процесса по регулируемой переменной увеличилась на один такт. Система достаточно хорошо подавляет ступенчатый сигнал возмущения v . Однако выбранное начальное значение управляющей переменной $u(0)$ приводит к некоторому увеличению показателя качества регулирования. Тем не менее аperiodический регулятор такого типа может применяться достаточно широко, поскольку он обеспечивает меньшие амплитуды отклонений управляющей переменной.

Переходные процессы аperiodических регуляторов, рассмотренных в примерах 7.1 и 7.2, показаны на рис. 7.2.2. Регулятор $AP(v)$ формирует отрицательное значение управляющего сигнала $u(1)$ после положительного сигнала $u(0)$ большой амплитуды, что

обусловлено достаточно большой величиной $u(0)$. Значение $u(2)$ положительно: далее после небольшого числа колебаний процесс приобретает интегрирующий характер, при котором происходит постоянное ступенчатое возрастание сигнала $u(k)$. Что касается переходного процесса регулятора $AP(\nu+1)$, то в нем значения

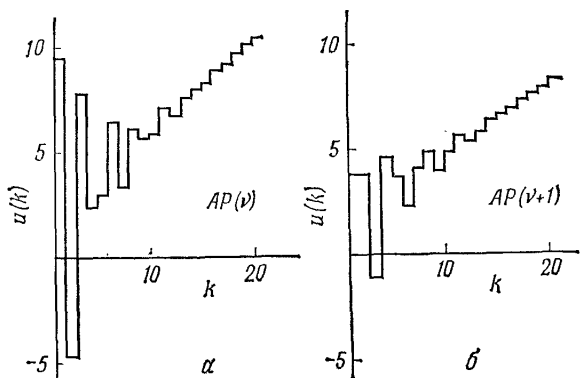


Рис. 7.2.2. Переходные процессы регулятора с конечным временем установления для объекта III. а — $AP(\nu)$; б — $AP(\nu+1)$.

сигналов $u(0)$ и $u(1)$ равны. Это объясняется тем, что запаздывание d в объекте равно 1 и, следовательно, $p_1=0$ и, кроме того, при его расчете было введено условие равенства $u(0)$ и $u(1)$ в замкнутом контуре управления. Далее появляется отрицательное значение $u(2)$, и затем характер процесса после нескольких колебаний приближается к интегрирующему.

По характеристикам переходных процессов регуляторы с конечным временем установления отличаются от обычных ПИД-регуляторов тем, что они характеризуются более сильно выраженными опережающими свойствами и большим подавлением колебаний управляющей переменной, в результате чего и обеспечивается конечное время установления процессов в системе.

7.3. ВЫБОР ТАКТА КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ АПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Из уравнения (7.1-15) следует, что начальное значение управляющей переменной $u(0)$ обратно пропорционально сумме коэффициентов числителя дискретной модели объекта управления. Однако значение этой суммы возрастает с увеличением такта квантования (см. табл. 3.7.1), что в свою очередь приводит к уменьшению амплитуды сигнала управления. Таким образом, такт квантования можно определить, задавая допустимый диапазон отклонения управляющей переменной. В табл. 7.3.1 приведена зависимость начального значения управляющей переменной $u(0)$ от величины

такта квантования для объекта управления третьего порядка, параметры которого содержатся в табл. 3.7.1.

Для того чтобы значение $u(0)$ не было слишком большим, такт квантования T_0 для регулятора AP (ν) должен быть не меньше 8 с.

Таблица 7.3.1

Влияние такта квантования на начальное значение управляющей переменной $u(0)$ для аperiodических регуляторов с объектом 3-го порядка из табл. 3.7.1

Регулятор	T_0, c	2	4	6	8	10
AP (ν)	$u(0) = q_0$	71,5	13,3	5,75	3,81	2,50
	$(1 - a_1)$	3,25	2,71	2,30	2,00	1,77
AP ($\nu+1$)	$u(0) = q_0$	22,0	4,91	2,50	1,91	1,41

Отсюда следует, что

$$T_0/T_{\Sigma} \geq 0,36 \text{ или } T_0/T_{95} \geq 0,18,$$

где T_{Σ} — сумма постоянных времени объекта управления; T_{95} — время достижения выходной координатной величины, равной 95% ее установившегося значения. Если увеличить конечное время установления на один такт, т. е. использовать регулятор AP ($\nu+1$), то при выборе такта квантования следует учесть, что значение $u(0)$ в этом случае оказывается меньшим на величину, равную $(1 - a_1)$. Это следует из уравнения (7.2-13). Поэтому для примера из табл. 7.3.1 в зависимости от выбранного значения такта квантования управляющая переменная уменьшается в $1,8 \div 3,3$ раза. Для регулятора AP ($\nu+1$) такт квантования T_0 должен быть не меньше 5 с, т. е.

$$T_0/T_{\Sigma} \geq 0,22 \text{ или } T_0/T_{95} \geq 0,11.$$

Если для регуляторов AP ($\nu+1$) и AP (ν) анализировать максимально возможные значения сигнала $u(0)$, которые определяются допустимым диапазоном изменения управляющей переменной, такт квантования для регулятора AP ($\nu+1$) может быть выбран меньшим.

В табл. 7.3.2 приведены для сравнения значения допустимых тактов квантования для параметрически оптимизируемого регулятора ЗПР-3 и регуляторов с конечным временем установления, рассчитанных с учетом параметров объекта III. Наименьшие рекомендованные величины тактов квантования для регуляторов ЗПР-3 и AP ($\nu+1$) приблизительно равны. Для регулятора AP (ν) величина такта квантования вдвое больше.

Расчет рассмотренных в данном разделе регуляторов с конечным временем установления оказывается очень простым. Поэтому им следует отдавать предпочтение в тех случаях, когда процесс синтеза регулятора должен выполняться достаточно часто, например

Таблица 7.3.2

Сравнение тактов квантования параметрически оптимизируемого и аperiodического регуляторов для объекта III при условии, что $u(0)_{\max} \leq 4,5$

Регулятор	ЗПР-3 (ПИД) ($r=0$)	АР (ν)	АР ($\nu+1$)
T_0/T_{95}	0,12	$\geq 0,20$	$\geq 0,10$

в адаптивных системах управления. Однако, поскольку такие регуляторы используют сокращение полюсов объекта, как это видно из уравнений (7.1-22) и (7.2-14), их не следует применять для объектов, полюса которых расположены вне или вблизи окружности единичного радиуса на z -плоскости (см. гл. 6, [7.1]). Таким образом, применение аperiodических регуляторов ограничено классом асимптотически устойчивых объектов (см. разд. 11.1).

Регуляторы состояния

При проектировании регуляторов с использованием методов, изложенных в предыдущих главах, необходимо задавать структуру регулятора и определять его параметры на основе минимизации некоторого критерия качества (гл. 5) либо формировать структуру и определять параметры регулятора, исходя из требуемых характеристик замкнутой системы управления (гл. 6 и 7). При этом в обоих случаях предполагается, что замкнутая система находится в равновесном состоянии перед появлением возмущающих сигналов. При проектировании регуляторов с управлением по состоянию (в дальнейшем называемых регуляторами состояния) таких предположений не требуется. Структура и параметры регуляторов состояния определяются в результате минимизации квадратичного критерия качества, при этом начальные и конечные условия могут быть отличны от нуля. Сначала будем считать, что все переменные состояния измеряются.

В разд. 8.1 рассматривается оптимальное управление объектом при переводе его из *заданного начального состояния* в нулевое. Проектированию оптимальных регуляторов состояния для *внешних возмущений* посвящен разд. 8.2. И в том и в другом случае для получения оптимального регулятора необходимо решать матричное уравнение Риккати.

Параметры линейных регуляторов состояния можно также определить, исходя из *заданных коэффициентов характеристического уравнения* (разд. 8.3), что оказывается достаточно простым с вычислительной точки зрения. Параметры регулятора после приведения уравнений объекта в диагональную форму могут быть определены в результате независимого задания полюсов замкнутой системы, обеспечивающих выполнение заданных требований. Такой подход следует из теории *модального управления* (разд. 8.4). Кроме того, параметры регуляторов состояния могут быть легко определены, если задано требование *конечного времени установления* (разд. 8.5).

Если некоторые переменные не измеряются, их необходимо восстановить с помощью *наблюдателя* (разд. 8.6). Система управления, включающая регулятор состояния, наблюдатель и объект управления, рассмотрена в разд. 8.7. Наконец, в разд. 8.8 изложена методика построения *наблюдателя пониженного порядка*, а в разд. 8.9 приведены соображения о *выборе свободных параметров* регуляторов состояния.

Поскольку различие в выводе уравнений регуляторов состояния для многомерных и одномерных систем управления состоит только в записи управляющей и регулируемой переменной в векторной форме и использовании матриц вместо соответствующих векторов, ниже будет рассмотрен более общий многомерный случай.

8.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ ПО НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

Предполагается, что заданы уравнение объекта управления в пространстве состояний

$$\dot{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8.1-1)$$

с постоянными матрицами A и B , а также начальные условия $x(0)$ (см. рис. 8.1.1). Будем сначала считать, что все переменные состояния могут быть измерены точно.

Задача состоит в построении регулятора, формирующего такой вектор управляющих переменных $\mathbf{u}(k)$ из вектора переменных состояния $\mathbf{x}(k)$, который переводит систему в конечное состояние $\mathbf{x}(N) \approx \mathbf{0}$ и минимизирует квадратичный критерий качества

$$I = \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)]. \quad (8.1-2)$$

Матрицы, входящие в этот критерий, обладают следующими свойствами: \mathbf{S} — положительно полуопределена и симметрична; \mathbf{Q} — положительно полуопределена и симметрична; \mathbf{R} — положительно

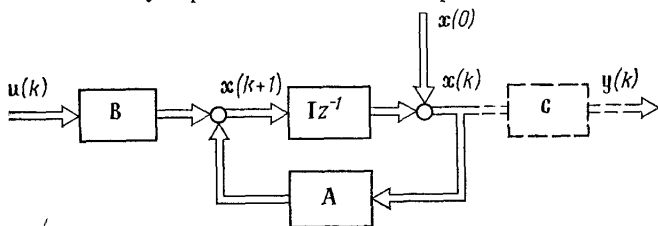


Рис. 8.1.1. Модель линейного объекта в пространстве состояний.

определена и симметрична, так что выполняются условия $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0$ и $\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} > 0$. Требования, наложенные на матрицы \mathbf{S} , \mathbf{Q} и \mathbf{R} , вытекают из условий существования оптимума критерия I и обусловлены следующими соображениями. Решение поставленной задачи, имеющее смысл с инженерной точки зрения, может быть получено только в том случае, если все члены уравнения (8.1-2) имеют один и тот же знак, например являются положительными. В связи с этим все матрицы, упомянутые выше, должны быть по крайней мере положительно полуопределены. Если $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, т. е. конечное состояние $\mathbf{x}(N)$ в критерии не учитывается, а $\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$, т. е. все состояния $\mathbf{x}(0), \dots, \mathbf{x}(N-1)$ входят в критерий с определенным весом, то имеющее смысл оптимальное решение также существует. Отсюда следует, что если матрица \mathbf{Q} положительно определена, то матрица \mathbf{S} может быть положительно полуопределена. Справедливо также и обратное утверждение. Следует, однако, исключить случай, когда $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, т. е. все состояния в критерии не учитываются и только вектор управляющих переменных имеет вес, определяемый матрицей $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, что не имеет смысла. В случае непрерывных регуляторов состояния матрица \mathbf{R} должна быть положительно определена, поскольку значение \mathbf{R}^{-1} входит в выражение для закона управления. Для дискретных регуляторов это требование может быть исключено, как об этом будет сказано ниже.

Так как далее рассматривается случай, когда $\mathbf{x}(N) \approx \mathbf{0}$, матрицы \mathbf{S} и \mathbf{Q} выбраны равными. Следовательно, и матрица \mathbf{Q} должна быть положительно определена. Отметим также, что здесь не рас-

сматривается влияние задающих переменных и внешних возмущений, а выходные переменные

$$y(k) = Cx(k) \quad (8.1-3)$$

не используются для формирования обратных связей.

Мы исследуем лишь изменение собственных движений и стабилизацию объекта управления с помощью обратных связей по состоянию. Если найдена оптимальная управляющая переменная $u(k)$, то

$$\min_{u(k)} I = \min_{u(k)} \left\{ x^T(N) Q x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \right\}, \quad (8.1-4)$$

$k=0, 1, 2, \dots, N-1.$

Определение оптимальной управляющей переменной является задачей динамической оптимизации, которая может быть решена с использованием методов вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина или принципа оптимальности Беллмана [8.1]. Решение, представленное ниже, было дано Калманом и Кепке [8.2].

Замечания

а) В соответствии с принципом максимума каждый отрезок оптимальной траектории также является оптимальным. Это означает, что, если известна конечная точка, оптимальная траектория может быть найдена в обратном направлении (т. е. от конечной точки к начальной).

б) Из уравнений состояния (8.1-1) следует, что сигнал управления $u(k)$ определяет последующие значения состояний $x(k+1)$, $x(k+2)$, \dots . Следовательно, оптимальный сигнал управления $u(k)$ можно получить путем обратного расчета. Итак, запишем уравнение (8.1-4) в следующем виде:

$$\min_{u(k)} I = \min_{u(k)} \left[\min_{u(N-1)} \left\{ x^T(N) Q x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \right\} \right]. \quad (8.1-5)$$

Можно показать, что

$$\min_{u(N-1)} \{ \dots \} = \sum_{k=0}^{N-1} x^T(k) Q x(k) + \sum_{k=0}^{N-2} u^T(k) R u(k) + \underbrace{\min_{u(N-1)} \{ x^T(N) Q x(N) + u^T(N-1) R u(N-1) \}}_{I_{N-1, N}}, \quad (8.1-6)$$

где первые два слагаемых не зависят от $\mathbf{u}(N-1)$, а слагаемое $I_{N-1, N}$ определяет вклад от $\mathbf{u}(N-1)$ для значений k , изменяющихся от $N-1$ до N . Если учесть, что уравнение состояния для $k=N$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(N) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(N-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(N-1) \text{ или} \\ \mathbf{x}^T(N) &= \mathbf{x}^T(N-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{u}^T(N-1)\mathbf{B}^T, \end{aligned} \quad (8.1-7)$$

то из уравнения (8.1-6) следует, что

$$\begin{aligned} I_{N-1, N} &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} \{ \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \mathbf{u}^T(N-1) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-1) \} = \\ &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} \{ \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) + 2 \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{u}(N-1) + \\ &+ \mathbf{u}^T(N-1) \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{u}(N-1) + \mathbf{u}^T(N-1) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-1) \} = \\ &= \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) + \min_{\mathbf{u}(N-1)} \{ 2 \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{u}(N-1) + \\ &+ \mathbf{u}^T(N-1) (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{u}(N-1) \}. \end{aligned} \quad (8.1-8)$$

Для минимизации уравнения (8.1-8) необходимо обеспечить выполнение соотношений

$$\min_{\mathbf{u}(N-1)} \{ \dots \} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}(N-1)} \{ \dots \} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{u}(N-1)^2} \{ \dots \} > 0. \quad (8.1-9)$$

Отсюда, используя правила вычисления производных от векторов и матриц, которые даны в приложении, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}(N-1)} \{ \dots \} &= 2 \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) + 2 (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{u}(N-1) = 0, \\ \mathbf{u}^0(N-1) &= -(\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) = -\mathbf{K}(N-1) \mathbf{x}(N-1). \end{aligned} \quad (8.1-10)$$

Здесь

$$\mathbf{K}(N-1) = (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}, \quad (8.1-11)$$

$$\frac{\partial^2 \{ \dots \}}{\partial \mathbf{u}(N-1)^2} = 2 (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R}) > 0. \quad (8.1-12)$$

Теперь можно записать выражение для $I_{N-1, N}$ в виде функции текущих начальных условий $\mathbf{x}(N-1)$:

$$\begin{aligned} I_{N-1, N} &= \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) - \\ &- 2 \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) + \\ &+ \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) = \\ &= \mathbf{x}^T(N-1) [\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}] \mathbf{x}(N-1) = \\ &= \mathbf{x}^T(N-1) [\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} - \\ &- \mathbf{K}^T(N-1) (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{K}(N-1)] \mathbf{x}(N-1) = \\ &= \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{P}_{N-1, N} \mathbf{x}(N-1) \end{aligned} \quad (8.1-13)$$

где

$$\begin{aligned} P_{N-1, N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{Q} [\mathbf{I} - \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}] \mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} - \mathbf{K}^T (\mathbf{N} - 1) (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{K} (\mathbf{N} - 1). \end{aligned} \quad (8.1-14)$$

Значение I или $\min I$, соответствующее уравнениям (8.1-5) или (8.1-6), можно представить как функцию состояния $\mathbf{x}(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ и управления $\mathbf{u}(k)$, $k=0, 1, \dots, N-2$, в которой отсутствуют неизвестные значения $\mathbf{x}(N)$ и $\mathbf{u}(N-1)$. Для этого сначала подставим выражение для $I_{N-1, N}$ (8.1-13) в уравнение (8.1-6), в результате чего получим

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(N-1)} \left\{ \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)] \right\} = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \sum_{k=0}^{N-2} \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) + \mathbf{x}^T(N-1) P_{N-1, N} \mathbf{x}(N-1) = \\ = \sum_{k=0}^{N-2} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)] + \underbrace{\mathbf{x}^T(N-1) (P_{N-1, N} + \mathbf{Q}) \mathbf{x}(N-1)}_{I_{N-1}}. \end{aligned} \quad (8.1-15)$$

Теперь введем сокращенное обозначение

$$P_{N-1} = P_{N-1, N} + \mathbf{Q}. \quad (8.1-16)$$

Используя его, запишем выражение для I_{N-1} в уравнении (8.1-15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_{N-1} &= I_{N-1, N} + \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-1) = \\ &= \mathbf{x}^T(N-1) (P_{N-1, N} + \mathbf{Q}) \mathbf{x}(N-1) = \mathbf{x}^T(N-1) P_{N-1} \mathbf{x}(N-1). \end{aligned} \quad (8.1-17)$$

В последней сокращенной записи учитываются вклад в минимизируемый критерий от последнего шага и вычисление соответствующего начального отклонения $\mathbf{x}(N-1)$. (Введение сокращений позволяет упростить вывод последующих соотношений.) Подставляя уравнение (8.1-16) в уравнение (8.1-15), а полученный результат в уравнение (8.1-5), получим

$$\begin{aligned} \min I = \min_{\mathbf{u}(k)} \left[\min_{\mathbf{u}(N-2)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-2} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{x}^T(N-1) P_{N-1} \mathbf{x}(N-1) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (8.1-18)$$

Здесь вместо $\min_{\mathbf{u}(N-1)}$ используется $\min_{\mathbf{u}(N-2)}$, так как в уравнение подставлены вычисленные оптимальное значение сигнала $\mathbf{u}(N-1)$ и конечное состояние $\mathbf{x}(N)$. Запишем по аналогии с уравнением (8.1-6)

выражение для минимизируемого члена

$$\min_{\mathbf{u}(N-2)} \{ \dots \} = \sum_{k=0}^{N-2} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \sum_{k=0}^{N-3} \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) + \underbrace{\min_{\mathbf{u}(N-2)} \{ \mathbf{u}^T(N-2) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-2) + \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{x}(N-1) \}}_{I_{N-2, N}}. \quad (8.1-19)$$

В этом выражении член $I_{N-2, N}$ определяет вклад в функционал от двух последних шагов оптимального процесса

$$I_{N-2, N} = \mathbf{u}^T(N-2) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-2) + \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-1) + I_{N-1, N}. \quad (8.1-20)$$

Теперь, используя уравнение состояния для предпоследнего шага

$$\mathbf{x}(N-1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) + \mathbf{B} \mathbf{u}(N-2),$$

получим

$$\begin{aligned} I_{N-2, N} &= \min_{\mathbf{u}(N-2)} \{ \mathbf{u}^T(N-2) (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B}) \mathbf{u}(N-2) + \\ &+ 2\mathbf{u}^T(N-2) \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) + \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) \} = \\ &= \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) + \\ &+ \min_{\mathbf{u}(N-2)} \{ \mathbf{u}^T(N-2) (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B}) \mathbf{u}(N-2) + \\ &+ 2\mathbf{u}^T(N-2) \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) \}. \end{aligned} \quad (8.1-21)$$

Следовательно, по аналогии с уравнением (8.1-10) оптимальный сигнал управления на шаге $(N-2)$ равен

$$\mathbf{u}^0(N-2) = -(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) = -\mathbf{K}_{N-2} \mathbf{x}(N-2), \quad (8.1-22)$$

а матрица регулятора \mathbf{K}_{N-2} определяется выражением

$$\mathbf{K}_{N-2} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A}. \quad (8.1-23)$$

Отсюда следует, что минимальное значение $I_{N-2, N}$ для двух последних шагов с учетом уравнения (8.1-21) будет равно

$$\begin{aligned} I_{N-2, N} &= \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) + \\ &+ \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) - \\ &- 2\mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} \mathbf{x}(N-2) = \\ &= \mathbf{x}^T(N-2) [\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} - \\ &- \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A}] \mathbf{x}(N-2) = \\ &= \mathbf{x}^T(N-2) [\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} - \mathbf{K}_{N-2}^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B}) \mathbf{K}_{N-2}] \mathbf{x}(N-2) = \\ &= \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{P}_{N-2, N} \mathbf{x}(N-2), \end{aligned} \quad (8.1-24)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{N-2, N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} [\mathbf{I} - \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1}] \mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{A} - \mathbf{K}_{N-2}^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{B}) \mathbf{K}_{N-2}. \end{aligned} \quad (8.1-25)$$

Теперь минимальное значение I по отношению к управлению $u(N-2)$ с использованием выражения (8.1-19) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \min_{u(N-2)} I &= \sum_{k=0}^{N-2} x^T(k) Q x(k) + \sum_{k=0}^{N-3} u^T(k) R u(k) + \\ &+ x^T(N-2) P_{N-2, N} x(N-2) = \sum_{k=0}^{N-3} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] + \\ &\underbrace{+ x^T(N-2) (P_{N-2, N} + Q) x(N-2)}_{I_{N-2}}. \end{aligned} \quad (8.1-26)$$

Если теперь снова ввести сокращенное обозначение

$$P_{N-2} = P_{N-2, N} + Q, \quad (8.1-27)$$

то вклад от последних двух шагов с учетом взвешенного значения начального отклонения $x(N-2)$ будет определяться выражением

$$\begin{aligned} I_{N-2} &= I_{N-2, N} + x^T(N-2) Q x(N-2) = \\ &= x^T(N-2) (P_{N-2, N} + Q) x(N-2) = \\ &= x^T(N-2) P_{N-2} x(N-2). \end{aligned} \quad (8.1-28)$$

Используя уравнение состояния, значение I можно представить как функцию от $x(k)$ и $u(k)$ для $k=0, \dots, N-3$ и последовательно вычислять оптимальный сигнал управления $u^0(N-3)$ и т. д.

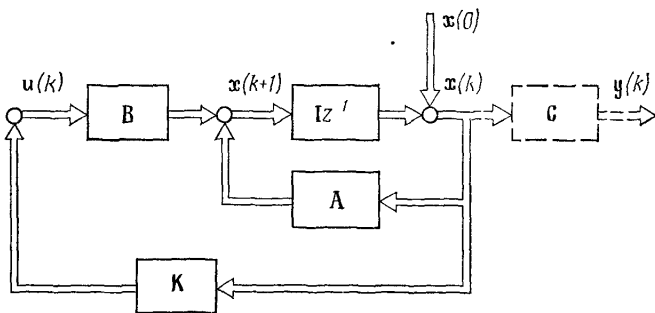


Рис. 8.1.2. Модель объекта в пространстве состояний с регулятором состояния K для управления по отклонениям начальных условий $x(0)$. Предполагается, что вектор состояния $x(k)$ измеряется полностью.

В общем получаем регулятор состояния с переменными параметрами

$$u^0(N-j) = -K_{N-j} x(N-j), \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (8.1-29)$$

который формирует пропорциональную отрицательную обратную связь по состоянию на входе объекта с помощью изменяющейся матрицы коэффициентов передачи K_{N-j} (рис. 8.1.2). Параметры

такого регулятора определяются в результате решения рекуррентных уравнений

$$\mathbf{K}_{N-j} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{A}; \quad (8.1-30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{N-j} &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{A} - \mathbf{K}_{N-j}^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{B}) \mathbf{K}_{N-j} = \\ &= \mathbf{Q} - \mathbf{K}_{N-j}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_{N-j} + [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{N-j}]^T \mathbf{P}_{N-j+1} [\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}_{N-j}] = \\ &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{N-j+1} [\mathbf{I} - \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-j+1}] \mathbf{A} \end{aligned} \quad (8.1-31)$$

с исходной матрицей $\mathbf{P}_N = \mathbf{Q}$. Последнее из приведенных уравнений является разностным матричным уравнением Риккати. Значение критерия качества (8.1-2) равно

$$\min_{u(k)} I = I_0 = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(0) \quad (8.1-32)$$

для $k=0, 1, \dots, N-1$. Следовательно, минимальное значение квадратичного критерия может быть непосредственно представлено как функция начального состояния $\mathbf{x}(0)$. Как будет показано ниже в примере, \mathbf{K}_{N-j} сходится для $j=1, 2, \dots, N$, т. е. $\mathbf{K}_{N-1}, \mathbf{K}_{N-2}, \dots, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_0$ к фиксированному конечному значению $\bar{\mathbf{K}}$ при $N \rightarrow \infty$.

$$\mathbf{K}_0 = \bar{\mathbf{K}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{K}_{N-j}.$$

Таким образом, в пределе получаем регулятор с постоянными параметрами

$$\mathbf{u}^0(k) = -\bar{\mathbf{K}} \mathbf{x}(k). \quad (8.1-33)$$

Матрица этого регулятора удовлетворяет уравнению

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A} \quad (8.1-34)$$

при $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_0$, являющемся решением стационарного матричного уравнения Риккати

$$\bar{\mathbf{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N-j} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} [\mathbf{I} - \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{A}. \quad (8.1-35)$$

Решение этого нелинейного уравнения может быть получено с помощью рекуррентного уравнения (8.1-31). Регулятор состояния с постоянными параметрами (8.1-33) наиболее пригоден для практического применения.

Из правил обращения матриц следует, что для уравнения (8.1-35) должно удовлетворяться условие

$$\det [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B}] \neq 0.$$

В то же время из-за рекуррентности вычислений или условий существования оптимума должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}] &\neq 0 \text{ для уравнения (8.1-11),} \\ \det [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{B}] &\neq 0 \text{ для уравнения (8.1-30).} \end{aligned}$$

Следовательно, члены в скобках должны быть положительно определены. Эти условия в общем случае выполняются, если матрица \mathbf{R} положительно определена. Если же допустить, что $\mathbf{R} = 0$, то необходимо, чтобы второй член последнего уравнения для $j = 1, 2, \dots, N$ и матрица \mathbf{Q} были больше нуля. Поскольку матрица \mathbf{P}_{N-1+1} априорно не известна, в общем случае необходимо, чтобы матрица \mathbf{R} была положительно определена. Для замкнутой системы из уравнений (8.1-1) и (8.1-33) имеем

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}] \mathbf{x}(k). \quad (8.1-36)$$

Соответствующее уравнению (8.1-36) характеристическое уравнение записывается в виде

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}] = 0. \quad (8.1-37)$$

Эта замкнутая система является асимптотически устойчивой, если объект (8.1-1) обладает свойством полной управляемости. Если же

Таблица 8.1.1

Вид матрицы \mathbf{P}_{N-j} в функции k при рекуррентном решении матричного уравнения Риккати для объекта III [8.5]

\mathbf{P}_{29}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
\mathbf{P}_{24}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	0,0000	1,0000	1,5000	0,0650
	0,0000	1,5000	3,2500	0,0975
	0,0000	0,0650	0,0975	0,0105
\mathbf{P}_{27}	0,9958	1,4937	1,5385	0,1449
	1,4937	3,2405	3,8078	0,2823
	1,5385	3,8077	5,6270	0,3214
	0,1449	0,2823	0,3214	0,0253
\mathbf{P}_{24}	6,6588	6,6533	5,8020	0,7108
	6,6533	7,9940	7,7599	0,8022
	5,8020	7,7599	8,9241	0,7529
	0,7108	0,8022	0,7529	0,0822
\mathbf{P}_{21}	7,8748	7,5319	6,4262	0,8132
	7,5319	8,6296	8,2119	0,8763
	6,4262	8,2119	9,2456	0,8056
	0,8132	0,8763	0,8056	0,0908
\mathbf{P}_{19}	7,9430	7,5754	6,4540	0,8184
	7,5754	8,6573	8,2296	0,8796
	6,4540	8,2296	9,2570	0,8077
	0,8184	0,8796	0,8077	0,0912
\mathbf{P}_1	7,9502	7,5796	6,4564	0,8189
	7,5796	8,6597	8,2310	0,8799
	6,4564	8,2310	9,2578	0,8079
	0,8189	0,8799	0,8079	0,0913

это не так, то неуправляемая часть системы должна иметь по крайней мере асимптотически устойчивые собственные значения [8.4]

Пример 8.1.1. В этом примере использован тестовый объект III, представляющий собой низкочастотный фильтр третьего порядка с запаздыванием, который был описан в разд. 5.4. В табл. 8.1.1 приведены коэффициенты матрицы R_{N-j} ,

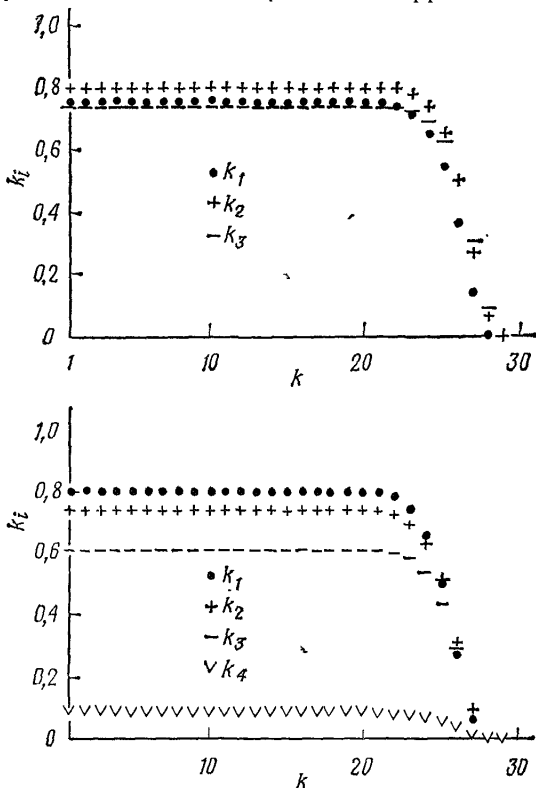


Рис. 8.1.3. Зависимость коэффициентов регулятора состояния k_{N-j}^T от $k=N-j$ для объекта III при рекуррентном решении матричного уравнения Риккати [8.5].

а на рис. 8.1.3 показана зависимость коэффициентов k_{N-j}^T от $k=N-j$ (см. также пример 8.7.1).

Рекуррентный процесс решения матричного уравнения Риккати начался с $j=0$, $R=r=1$, $N=29$ и

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такой вид матрицы Q выбран для того, чтобы в квадратичном критерии присутствовала только выходная координата $y(k)$:

$$x^T(k) Q x(k) = y^2(k)$$

(разд. 8.9.1). Коэффициенты матрицы \mathbf{P}_{N-1} и вектора \mathbf{k}_{N-1}^T мало изменяются после примерно десяти шагов, т. е. установившееся решение достигается быстро.

В этом разделе предполагалось, что вектор состояния $\mathbf{x}(k)$ может быть измерен непосредственно и полностью. Это иногда справедливо, например, для некоторых механических или электрических объектов, таких, как самолеты или электрические сети. Однако переменные состояния часто измеряются не полностью, поэтому их следует восстановить с помощью эталонной модели или наблюдателя (разд. 8.6).

8.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Полученный в предыдущем разделе регулятор состояния с постоянными параметрами для отработки отклонений начальных условий $\mathbf{x}(0)$ обладает пропорциональной характеристикой. Поэтому постоянные возмущения по переменным состояниям не могут быть скомпенсированы без статической ошибки. Для отработки постоянных возмущений регулятор состояния следует модифицировать [8.3, 8.6, 8.7, 8.4].

Предположим, что в системе присутствуют *постоянные сигналы задающей переменной* $\mathbf{w}(k)$ и *возмущения* $\mathbf{n}(k)$. Эти постоянные сигналы могут быть сформированы из определенных начальных условий $\mathbf{v}(0)$ и $\boldsymbol{\gamma}(0)$ с помощью модели задающих воздействий (рис. 8.2.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(k) + \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}(k), \\ \boldsymbol{\gamma}(k+1) &= \boldsymbol{\gamma}(k), \\ \mathbf{w}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{v}(k). \end{aligned} \quad (8.2-1)$$

Здесь размерность вектора $\boldsymbol{\gamma}(k)$ равна размерности $\mathbf{w}(k)$. Например, если требуется получить ступенчатое изменение задающей переменной $\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}_0 \mathbf{1}(k)$ для объекта пропорционального типа, используются начальные условия $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\gamma}_0$. В результате того что при этом на модель $(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C})$ задающей переменной поступает постоянный ступенчатый сигнал, на ее выходе формируется задающий сигнал $\mathbf{w}_\gamma(k)$, который отличается от ступенчатого на величину

$$\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}_\gamma(k) = \mathbf{w}_v(k).$$

Эту разность можно скомпенсировать путем задания в модели соответствующих начальных условий $\mathbf{v}(0)$. Таким образом, выбирая подходящие значения $\boldsymbol{\gamma}(0)$ и $\mathbf{v}(0)$, удается смоделировать ступенчатое изменение переменной $\mathbf{w}(k)$. Значение $\boldsymbol{\gamma}_0$ зависит от \mathbf{w}_0 и от коэффициента передачи модели $(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C})$. Если коэффициент передачи равен единице, то $\boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbf{w}_0$. Задавая другие значения $\mathbf{v}(0)$, можно получить другие сигналы $\mathbf{w}(k)$, которые при $k \rightarrow \infty$ будут сходиться к постоянному значению \mathbf{w}_0 .

Аналогично модели задающей переменной вводится модель возмущающих воздействий:

$$\begin{aligned}\eta(k+1) &= \mathbf{A}\eta(k) + \mathbf{B}\xi(k), \\ \xi(k+1) &= \xi(k), \\ \mathbf{n}(k) &= \mathbf{C}\eta(k),\end{aligned}\quad (8.2-2)$$

где размерность $\xi(k)$ равна размерности $\mathbf{n}(k)$ (рис. 8.2.1). Используя начальные условия $\xi(0)$ и $\eta(0)$, с ее помощью можно сформировать постоянный сигнал $\mathbf{n}(k)$.

Применяя другие структуры моделей с переменными состояния $\gamma(k)$ и $\xi(k)$, можно моделировать другие типы внешних сигналов. Например, линейно нарастающий сигнал первого порядка можно получить из модели следующего вида:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(k) + \mathbf{B}\gamma_2(k), \\ \gamma_2(k+1) &= \gamma_2(k) + \gamma_1(k), \\ \gamma_1(k+1) &= \gamma_1(k).\end{aligned}\quad (8.2-3)$$

Из переменных состояния модели объекта и моделей задающих и возмущающих воздействий формируются переменные состояния вектора ошибки $\mathbf{e}(k)$, так что для ошибки управления можно записать $\mathbf{e}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{y}(k) - \mathbf{n}(k) = \mathbf{C}[\mathbf{v}(k) - \mathbf{x}(k) - \eta(k)] = \mathbf{C}\mathbf{e}(k)$. (8.2-4)

Общая модель всей системы описывается уравнениями

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}(k+1) \\ \gamma(k+1) - \xi(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(k) \\ \gamma(k) - \xi(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k). \quad (8.2-5)$$

Как и в предыдущем разделе, предполагается, что все переменные состояния — $\mathbf{e}(k)$, $\gamma(k)$ и $\xi(k)$ — измеряются полностью. Теперь представим управляющую переменную в виде двух управляющих сигналов:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_1(k) + \mathbf{u}_2(k). \quad (8.2-6)$$

Если в качестве управляющего сигнала $\mathbf{u}_1(k)$ выбрать

$$\mathbf{u}_1(k) = \gamma(k) - \xi(k), \quad (8.2-7)$$

то влияние $\gamma(k)$ и $\xi(k)$ на $\mathbf{y}(k)$ будет полностью скомпенсировано. Следовательно, $\mathbf{u}_1(k)$ будет использоваться для устранения влияния начальных условий $\gamma(0)$ и $\xi(0)$, т. е. выступать в роли идеального регулятора с прямой связью. Управляющая переменная $\mathbf{u}_2(k)$ должна использоваться для отработки начальных условий

$$\mathbf{e}(0) = \mathbf{v}(0) - \mathbf{x}(0) - \eta(0) \quad (8.2-8)$$

с помощью регулятора состояния в обратной связи. Таким образом, мы уже не проводим синтеза оптимального регулятора состояния

для начальных значений системы

$$\varepsilon(k+1) = A\varepsilon(k) - B u_{\bar{2}}(k). \quad (8.2-9)$$

В данном случае нам необходимо минимизировать следующий квадратичный критерий качества:

$$I_{\varepsilon} = \varepsilon^T(N) Q \varepsilon(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\varepsilon^T(k) Q \varepsilon(k) + u_{\bar{2}}^T(k) R u_{\bar{2}}(k)]. \quad (8.2-10)$$

Однако аналогичная задача уже была решена в разд. 8.1, откуда следует (8.1-33), что оптимальный регулятор состояния с постоянными параметрами описывается уравнением

$$u_{\bar{2}}(k) = K\varepsilon(k). \quad (8.2-11)$$

В отличие от регулятора для начальных условий $x(0)$, описанного в разд. 8.1, этот регулятор состояния используется для управления системой с начальными условиями $\varepsilon(0)$.

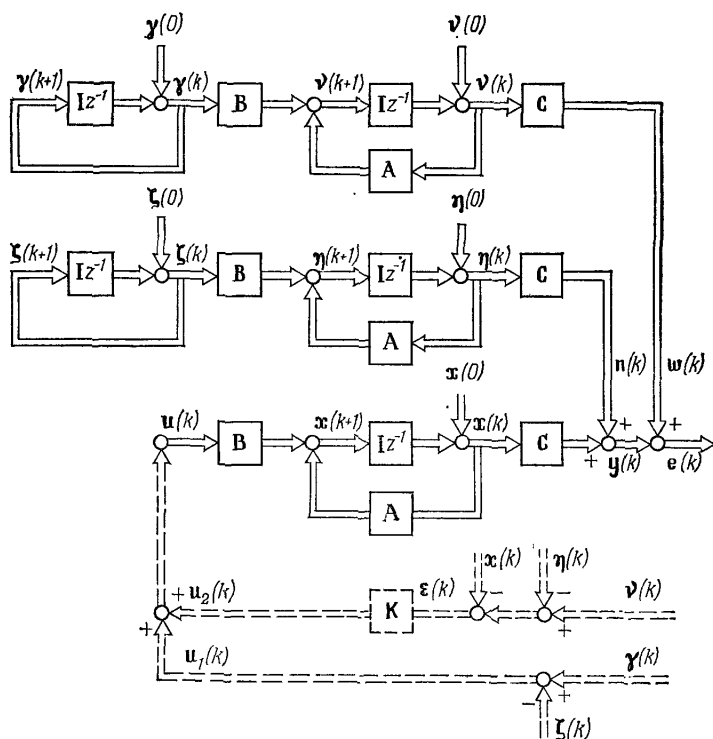


Рис. 8.2.1. Модель линейного объекта управления с моделями задающей и возмущающей переменных, позволяющими формировать постоянные значения задающего $w(k)$ и возмущающего $p(k)$ сигналов. Пунктирными линиями изображен регулятор состояния.

Таким образом, регулятор для постоянных возмущений состоит из — регулятора состояния для начальных значений $\varepsilon(0)$, формирующего управляющий сигнал $u_2(k)$;

— регулятора с прямой связью для переменных $\gamma(k)$ и $\zeta(k)$, формирующего управляющий сигнал $u_1(k)$.

Следовательно, управляющий сигнал $u(k)$ с учетом уравнений (8.2-6), (8.2-7) и (8.2-11) определяется уравнением

$$u(k) = [K \ I] \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \gamma(k) - \zeta(k) \end{bmatrix}. \quad (8.2-12)$$

Этот регулятор изображен на рис. 8.2.1 пунктирными линиями.

Для описания расширенной модели (8.2-5) введем следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} x^*(k) &= \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \gamma(k) - \zeta(k) \end{bmatrix}; & A^* &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}; \\ B^* &= \begin{bmatrix} -B \\ 0 \end{bmatrix}; & C^* &= [C \ 0], \end{aligned} \quad (8.2-13)$$

с использованием которых запишем

$$x^*(k+1) = A^*x^*(k) + B^*u(k), \quad (8.2-14)$$

$$e(k) = C^*x^*(k). \quad (8.2-15)$$

Регулятор состояния с постоянными параметрами описывается уравнением

$$u(k) = K^*x^*(k), \quad (8.2-16)$$

где

$$K^* = [K \ I]. \quad (8.2-17)$$

Если для каждой выходной переменной $y_1(k)$ имеется соответствующая задающая переменная $w_1(k)$ и возмущение $p_1(k)$, то их размерности должны удовлетворять условию

$$\dim x^* = \dim \varepsilon + \dim y = m + r.$$

Следовательно, размерность матрицы A равна $(m+r) \times (m+r)$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы с оптимальным регулятором состояния для внешних ступенчатых возмущений равно

$$\begin{aligned} \det [zI - A^* - B^*K^*] &= \det \begin{bmatrix} zI - A + BK & 0 \\ 0 & (z-1)I \end{bmatrix} = \\ &= \det [zI - A + BK] (z-1)^q = 0, \end{aligned} \quad (8.2-18)$$

если $\dim \gamma(k) = \dim \zeta(k) = \dim u_1(k) = \dim u(k) = q$.

С учетом моделей внешних возмущений замкнутая система управления с q управляющими переменными имеет q полюсов в точке $z=1$, т. е. содержит q «интеграторов», которые компен-

сируют статические ошибки. Для системы с одним входом и одним выходом характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(zI - A + bk^T)(z - 1) = 0. \quad (8.2-19)$$

Следовательно, оно имеет $(m + 1)$ корней. Заметим, что характеристическое уравнение имеет полюс $z = 1$, поскольку система разомкнута по отношению к дополнительным переменным состояниям $\gamma(k)$ и $\xi(k)$.

Другой способ нейтрализации статических ошибок, возникающих при воздействии на систему внешних возмущений и управляющих сигналов, состоит в добавлении полюса $z = 1$ в модель объекта. Для объекта с уравнением выхода

$$y(k) = Cx(k)$$

это соответствует введению дополнительных переменных состояния

$$z(k+1) = z(k) + Fy(k), \quad (8.2-20)$$

т. е. добавлению в модель суммирующих элементов или «интеграторов». Здесь F — диагональная матрица. При реализации интегрирования по методу прямоугольников диагональные элементы матрицы F можно представить в виде отношения такта квантования T_0 к постоянной интегрирования T_{11} , т. е. $f_{11} = T_0/T_{11}$. Соответствующий регулятор состояния [8.4, 8.5] теперь описывается соотношением

$$u(k) = -Kx(k) - K_1z(k). \quad (8.2-21)$$

Добавление интегрирующих элементов по сравнению с введением моделей задающей и возмущающей переменных имеет существенный недостаток: при постоянном сигнале возмущения $u_v(k)$ на выходе системы возникает статическая ошибка (гл. 4). Кроме того, постоянные интегрирования f_{11} могут выбираться произвольно, так как их значения не определяются в процессе минимизации критерия (8.1-2), используемого при синтезе регулятора. Поэтому регулятор с учетом введенных добавок перестает удовлетворять требованиям, заданным при его синтезе.

Если переменные состояния не могут быть измерены точно, что подразумевалось в этом разделе, их необходимо восстановить с помощью модели объекта. Только в этом случае могут быть реализованы все преимущества системы управления по состоянию, изображенной на рис. 8.2.1 (см. разд. 8.7.2).

8.3. РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ С ЗАДАНЫМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Динамика управляемого объекта, описываемого уравнением состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (8.3-1)$$

может быть так изменена с помощью обратной связи по вектору состояния

$$u(k) = -Kx(k), \quad (8.3-2)$$

что полюсы замкнутой системы

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) \quad (8.3-3)$$

или коэффициенты ее характеристического уравнения

$$\det[zI - A + Bk] = 0 \quad (8.3-4)$$

будут равны заданным. Рассмотрим методику получения заданного расположения полюсов в системах с обратной связью по состоянию для объектов с одним входом и одним выходом. Преобразуем уравнение состояния к канонической форме управляемости, приведенной в табл. 3.6.1:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k). \quad (8.3-5)$$

Уравнение обратной связи по состоянию имеет вид

$$u(k) = -k^T x(k) = -[k_m k_{m-1} \dots k_1] x(k). \quad (8.3-6)$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (8.3-5), получим

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-a_m - k_m) & (-a_{m-1} - k_{m-1}) & \dots & (-a_1 - k_1) \end{bmatrix} x(k). \quad (8.3-7)$$

Таким образом, соответствующее характеристическое уравнение есть

$$\begin{aligned} \det[zI - A + bk] &= \\ &= (a_m + k_m) + (a_{m-1} + k_{m-1})z + \dots + (a_1 + k_1)z^{m-1} + z^m = \\ &= \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \dots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m = 0. \end{aligned} \quad (8.3-8)$$

Из уравнения (8.3-8) следует, что коэффициенты вектора обратной связи по состоянию определяются соотношениями

$$k_i = \alpha_i - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8.3-9)$$

Коэффициенты k_1 равны нулю, если обратная связь не изменяет характеристического уравнения объекта, т. е. $\alpha_1 = a_1$. Значения k_1 возрастают, если коэффициенты α_1 замкнутой системы увеличивать в положительную сторону по сравнению с коэффициентами a_1 .

В результате значения управляющей переменной $u(k)$ становятся тем больше, чем больше разница между α_1 и a_1 , обусловленная введением регулятора. Таким образом, влияние обратной связи по состоянию на собственное движение объекта может быть легко интерпретировано.

При синтезе по заданному расположению полюсов $z_1, i=1, \dots, m$ сначала необходимо выбрать желаемые полюса замкнутой системы

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}k^T] = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m). \quad (8.3-10)$$

После этого вычисляются значения коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы α_1 и компонентов вектора состояния k_1 по уравнению (8.3-9). Случай многомерных систем рассмотрен, например, в работе [2.19] и в разд. 21.2.

Следует, однако, отметить, что рассмотренный метод задания полюсов обеспечивает лишь желаемое поведение изолированных собственных движений замкнутой системы. Что же касается их взаимного влияния и парирования внешних возмущений, то этого предложенный подход не учитывает. Поэтому в общем случае следует отдавать предпочтение тем методам синтеза, в которых управляющая и регулируемая переменные вычисляются непосредственно. Преимущество же рассмотренного метода состоит в том, что зависимость коэффициентов α_1 характеристического уравнения от изменения постоянных k_1 обратной связи представлена в явном виде. В гл. 7 было показано, что характеристическое уравнение *апериодического регулятора* есть $z^m = 0$. Из уравнения (8.3-8) следует, что в этом случае $\alpha_1 = 0$. Такой апериодический регулятор с управлением по состоянию будет рассмотрен в разд. 8.5.

8.4. МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ

В разд. 8.3 для задания расположения полюсов использовалось описание системы в канонической форме управляемости. Изменение коэффициентов k_1 вектора обратной связи непосредственно влияет на величину коэффициентов α_1 характеристического уравнения. При этом k_1 влияет только на α_1 , так что k_i и α_j при $i \neq j$ оказываются независимыми. В этом разделе будет рассмотрен метод задания полюсов в системах управления по состоянию с использованием векторно-матричного описания в диагональной форме. Поскольку в этом случае коэффициенты k_1 непосредственно влияют на собственные значения (моды) z_i , такое управление называется *модальным*. Для многомерных систем модальное управление впервые было описано в работе [8.9]. Более подробно о модальном управлении сказано в [5.17 и 8.10].

Рассмотрим линейный стационарный объект с несколькими входами и выходами

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (8.4-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \quad (8.4-2)$$

предполагая, что все собственные значения матрицы \mathbf{A} различны. Преобразуем описание объекта с использованием преобразования

(3.2-29)

$$\mathbf{x}_t(k) = \mathbf{T}\mathbf{x}(k) \quad (8.4-3)$$

к следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t(k+1) &= \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t(k) + \mathbf{B}_t\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_t\mathbf{x}_t(k). \end{aligned} \quad (8.4-4)$$

Теперь матрица системы

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} z_1 & \dots & 0 \\ \cdot & z_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & z_m \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \quad (8.4-5)$$

представлена в диагональной форме, а матрицы \mathbf{B}_t и \mathbf{C}_t определяются как

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{T}\mathbf{B}, \quad (8.4-6)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}. \quad (8.4-7)$$

Характеристическое уравнение исходной модели объекта есть

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0. \quad (8.4-8)$$

Для преобразованного описания соответствующее уравнение будет равно

$$\begin{aligned} \det[z\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}] &= \det[z\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}] = \\ &= \det \mathbf{T} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{T}^{-1} = \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \\ &= (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m) = 0. \end{aligned} \quad (8.4-9)$$

Диагональные элементы матрицы $\mathbf{\Lambda}$ являются собственными значениями матрицы \mathbf{A}_t (8.4-4). Они идентичны собственным значениям матрицы \mathbf{A} из уравнений (8.4-1). Матрица преобразования \mathbf{T} может быть определена следующим образом [5.17]. Запишем уравнение (8.4-5) в форме

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Lambda}. \quad (8.4-10)$$

Представим теперь матрицу \mathbf{T}^{-1} в виде набора векторов-столбцов

$$\mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_m], \quad (8.4-11)$$

тогда из (8.4-10) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_m] &= [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_m] \begin{bmatrix} z_1 & \dots & 0 \\ \cdot & z_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & z_m \end{bmatrix} = \\ &= [z_1\mathbf{v}_1 \quad z_2\mathbf{v}_2 \quad \dots \quad z_m\mathbf{v}_m]. \end{aligned} \quad (8.4-12)$$

Для каждого столбца можно записать

$$A\mathbf{v}_i = z_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8.4-13)$$

или
$$[z_i I - A] \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (8.4-14)$$

Матричное уравнение (8.4-14) содержит m уравнений для m неизвестных векторов \mathbf{v}_i , которые в свою очередь состоят из m элементов $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im}$. Если исключить тривиальный случай $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, то система (8.4-14) не имеет единственного решения. Для каждого значения i можно получить лишь направление вектора \mathbf{v}_i , а не его длину. Для определения длины векторов потребуем, чтобы элементы матриц \mathbf{B}_i или \mathbf{C}_i принимали значения только 0 и 1 [2.19].

Векторы \mathbf{v}_i называют *собственными векторами*. Для объектов с одним входом и одним выходом представление в пространстве состояний в диагональной форме соответствует разложению дискретной передаточной функции на элементарные составляющие по m различным собственным значениям:

$$G(z) = \mathbf{c}_i^T [zI - A_i]^{-1} \mathbf{b}_i = \frac{c_{i1}b_{i1}}{z - z_1} + \frac{c_{i2}b_{i2}}{z - z_2} + \dots + \frac{c_{im}b_{im}}{z - z_m} \quad (8.4-15)$$

Из последнего уравнения также следует, что значения коэффициентов b_{ii} и c_{ii} нельзя определить однозначно. Если, например, выбрать $b_{i1} = 1$, то значение c_{i1} может быть получено из уравнения

$$c_{ii} = [(z - z_i) G(z)]_{z=z_i}$$

(см. уравнение (3.7-3)). Матрица Λ может содержать не только действительные собственные значения z_i , но и комплексно-сопряженные. Как поступать в случае наличия комплексных собственных значений, показано, например, в работе [5.17].

Изменив в уравнении (8.4-4) вектор управления $\mathbf{u}(k)$ с помощью преобразования

$$\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k), \quad (8.4-16)$$

получим

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \Lambda \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{u}_i(k). \quad (8.4-17)$$

Теперь сформируем управление в виде обратной связи по вектору состояния

$$\mathbf{u}_i(k) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}_i(k). \quad (8.4-18)$$

В результате получим однородное векторное разностное уравнение

$$\mathbf{x}(k+1) = [\Lambda - \mathbf{K}_i] \mathbf{x}_i(k). \quad (8.4-19)$$

Если матрица обратной связи K_t также является диагональной

$$K_t = \begin{bmatrix} k_{t1} & \dots & 0 \\ \cdot & k_{t2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & k_{tm} \end{bmatrix}, \quad (8.4-20)$$

то результирующее характеристическое уравнение замкнутой системы будет иметь вид

$$\det [zI - (\Lambda - K_t)] = (z - (z_1 - k_{t1})) (z - (z_2 - k_{t2})) \dots (z - (z_m - k_{tm})) = 0. \quad (8.4-21)$$

Собственные значения z_i объекта могут быть теперь изменены независимо с помощью соответствующего выбора значений k_{ti} , поскольку матрицы в уравнениях (8.4-17) и (8.4-18) представлены в диагональной форме. Таким образом, замкнутая система состоит из m независимых контуров управления первого порядка.

Реальный вектор управления $u(k)$ вычисляется из уравнений (8.4-16) и (8.4-6):

$$u(k) = B_t^{-1} u_t(k) = B^{-1} T^{-1} u_t(k). \quad (8.4-22)$$

Поскольку в последнем уравнении необходимо обращать матрицу B , она должна быть регулярной, т. е. квадратной, и $\det B \neq 0$.

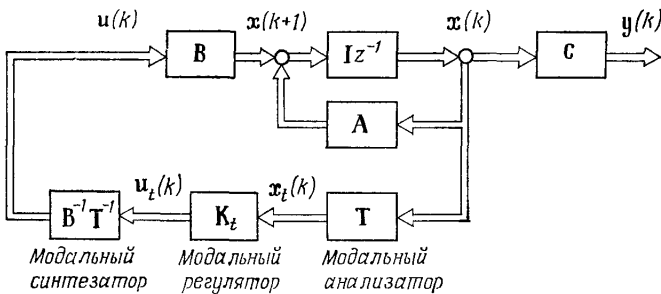


Рис. 8.4.1. Блок-схема системы с модальным управлением по состоянию.

Это означает, что m собственных значений матрицы A или Λ могут быть изменены независимо одно от другого только тогда, когда в объекте есть m различных управляющих входов. Следовательно, число управляющих переменных в этом случае должно быть равно порядку объекта.

Блок-схема системы с модальным регулятором состояния показана на рис. 8.4.1. Переменные состояния $x_t(k)$ развязаны с помощью преобразования (8.4-3); этот блок назван *модальным анализатором*. Преобразованный вектор управления $u_t(k)$ поэлементно формируется в модальном регуляторе K_t . Наконец, восстанавли-

вается реальный вектор управления $\mathbf{u}(k)$ путем обратного преобразования в *модальном синтезаторе*. Так как регулярные матрицы управления \mathbf{B} встречаются редко, рассмотренный метод модального управления не может найти широкого применения.

Если многомерный объект управления порядка m имеет p входов, т. е. размерность матрицы \mathbf{B} равна $(m \times p)$, то независимо изменены могут быть только p собственных значений с помощью диагональной матрицы \mathbf{K} размерности $(p \times p)$. Остальные $(m-p)$ собственные значения остаются неизменными [8.11], [5.17].

Рассмотрим теперь линейный объект с одним входом ($p=1$). Его преобразованное уравнение, аналогичное (8.4-3), имеет вид

$$\mathbf{x}_t(k+1) = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t(k) + b_t u(k), \quad (8.4-23)$$

$$y(k) = c_t^T \mathbf{x}_t(k), \quad (8.4-24)$$

где

$$b_t = \mathbf{T}b, \quad (8.4-25)$$

$$c_t^T = c^T \mathbf{T}^{-1}. \quad (8.4-26)$$

Для управления этим преобразованным объектом используется обратная связь по состоянию

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}_t(k) = -[k_1 k_2 \dots k_m] \mathbf{x}_t(k). \quad (8.4-27)$$

Подставляя это выражение для $u(k)$ в уравнение (8.4-23), получаем

$$\mathbf{x}_t(k+1) = [\mathbf{A} - b_t \mathbf{k}^T] \mathbf{x}_t(k) = \mathbf{F} \mathbf{x}_t(k). \quad (8.4-28)$$

Если для исходного описания выбрано преобразование, в результате которого все элементы вектора b_{tj} равны единицам, то

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (z_1 - k_1) & -k_2 & \dots & -k_m \\ -k_1 & (z_2 - k_2) & & -k_m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -k_m & -k_2 & \dots & (z_m - k_m) \end{bmatrix}. \quad (8.4-29)$$

В этом случае отдельные переменные состояния уже не будут развязаны, и собственные значения матрицы \mathbf{F} в отличие от матрицы \mathbf{A} будут изменяться взаимосвязанно. Так что применение обратной связи в соответствии с уравнением (8.4-27) не сохраняет преимуществ модального управления, о которых было сказано выше. Однако если сформировать обратную связь только по одной переменной состояния x_{tj}

$$u(k) = -k_j x_{tj}(k),$$

то может быть изменено одно собственное значение, а остальные собственные значения объекта останутся неизменными:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} z_1 \dots -k_j & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & (z_j - k_j) \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & -k_j & \dots & z_m \end{bmatrix}. \quad (8.4-30)$$

Соответствующее этой матрице характеристическое уравнение будет равно

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{F}] = (z - z_1) \dots (z - (z_j - k_j)) \dots (z - z_m). \quad (8.4-31)$$

Выше предполагалось, что собственные значения матрицы \mathbf{A} различны. Если же объект содержит кратные собственные значения, то вместо диагональной матрицы $\mathbf{\Lambda}$ следует использовать матрицу в жордановой форме [8.10].

Применение модального управления по состоянию при проектировании регуляторов позволяет только обеспечить заданное расположение полюсов системы, поэтому для этого метода остаются справедливыми замечания, приведенные в конце разд. 8.3. Отметим, однако, что модальное управление может быть с успехом применено для объектов с распределенными параметрами, имеющих несколько управляющих переменных [8.11, 3.10, 8.12].

8.5. РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ УСТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим управляемый объект порядка m с одной управляющей переменной:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k). \quad (8.5-1)$$

В разд. 3.2.2 было показано, что этот объект может быть переведен из произвольного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в нулевое конечное состояние $\mathbf{x}(N) = \mathbf{0}$ за $N = m$ шагов. Необходимая для этого последовательность значений управляющей переменной может быть вычислена с помощью уравнения (3.2-7). Она может быть также сформирована через обратную связь по состоянию:

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(k). \quad (8.5-2)$$

В результате получим

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T] \mathbf{x}(k) = \mathbf{R}\mathbf{x}(k) \quad (8.5-3)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{R}\mathbf{x}(0), \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{R}^2\mathbf{x}(0), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(N) &= \mathbf{R}^N\mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Из условия $\mathbf{x}(N) = \mathbf{0}$ следует, что

$$\mathbf{R}^N = \mathbf{0}. \quad (8.5-4)$$

Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{R}] = \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \dots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m = 0. \quad (8.5-5)$$

Из теоремы Кели—Гамильтона следует, что квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е.

$$\alpha_m \mathbf{I} + \alpha_{m-1} \mathbf{R} + \dots + \alpha_1 \mathbf{R}^{m-1} + \mathbf{R}^m = \mathbf{0}. \quad (8.5-6)$$

Уравнение (8.5-4) удовлетворяется при

$$\begin{aligned} N &= m \text{ и} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, характеристическое уравнение (8.5-6) примет вид

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{R}] = z^m = 0. \quad (8.5-7)$$

Наличие кратного полюса порядка m в точке $z=0$ является признаком системы управления с конечным временем установления переходных процессов (см. уравнение (7.1-16)).

Если объект представлен в канонической форме управляемости, как в уравнении (8.3-5), то аperiodический регулятор состояния можно получить с учетом уравнения (8.3-9), задавая $k_1 = -a_1$:

$$u(k) = [a_m a_{m-1} \dots a_1] \mathbf{x}(k). \quad (8.5-8)$$

При использовании канонической формы наблюдаемости каждая из переменных состояния x_i умножается в регуляторе состояния на a_i и заводится как обратная связь на вход объекта. При этом знак каждой такой обратной связи противоположен знаку связи по соответствующей координате состояния в модели объекта (см. рис. 3.6.3). Поэтому по первой переменной состояния последовательно m раз формируются нулевые значения, которые на каждом такте присваиваются последующей переменной состояния (сдвигаются через элементы задержки) до тех пор, пока при $k=m$ все переменные состояния не станут равными нулю [2.19].

Аperiodический регулятор AP (v), описанный в разд. 7.1, приводит объект из произвольного начального состояния $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$

за m тактов к постоянному значению выходной координаты

$$y(m) = y(m+1) = \dots = y(\infty)$$

при постоянном значении входного сигнала

$$u(m) = u(m+1) = \dots = u(\infty).$$

Поэтому такой регулятор называют «апериодическим регулятором выхода».

Апериодический регулятор, рассмотренный в этом разделе, приводит объект из произвольного начального состояния $x(0) \neq 0$ к результирующему состоянию $x(m) = 0$. Следовательно, его можно назвать «апериодическим регулятором состояния».

Поскольку обе замкнутые системы имеют одинаковые характеристические уравнения $z^m = 0$, они одинаково обрабатывают одни и те же возмущения по начальным условиям $x(0)$, так как реакция на такое возмущение зависит только от вида характеристического уравнения. Следовательно, апериодический регулятор АР (v) также приводит систему в нулевое состояние $x(m) = 0$ за m шагов для любых начальных условий $x(0)$.

8.6. НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ

Поскольку все переменные состояния $x(k)$ для большинства объектов не могут быть непосредственно измерены, их следует определять с использованием измеряемых величин. Рассмотрим

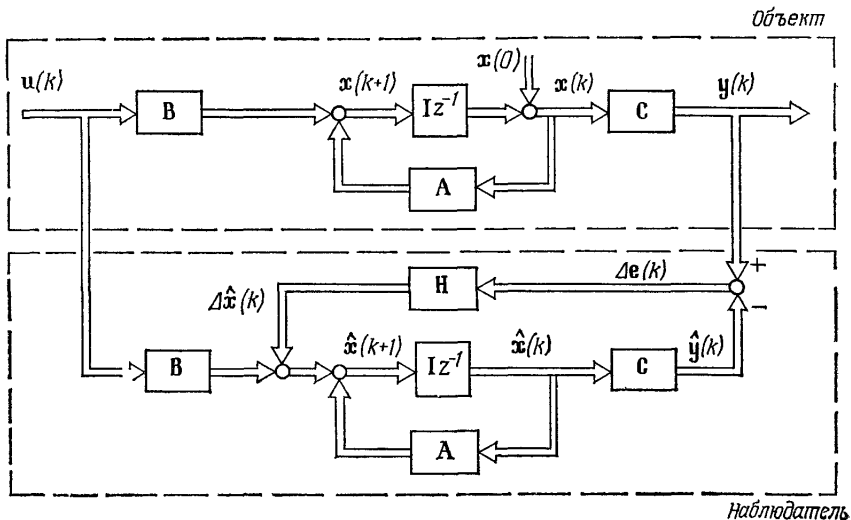


Рис. 8.6.1. Динамический объект с наблюдателем состояния.

динамический объект

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\quad (8.6-1)$$

Предположим, что в объекте точно могут быть измерены только вектор входа $u(k)$ и вектор выхода $y(k)$, а все переменные состояния $x(k)$ наблюдаемы. Включим параллельно объекту модель, имеющую такую же структуру (рис. 8.6.1). Сигнал коррекции состояния $\Delta \hat{x}(k)$ формируется путем введения обратной связи по сигналу ошибки между выходными координатами модели и объекта

$$\Delta e(k) = y(k) - \hat{y}(k), \quad (8.6-2)$$

умноженному на матрицу H . Когда процесс сойдется, состояния модели будут повторять состояния объекта. Такая модель называется *наблюдателем Льюинбергера* [8.13], [8.14]. Если используется полная модель объекта, то наблюдатель называется *эквивалентным*.

Постоянная матрица обратной связи наблюдателя H должна выбираться так, чтобы вектор состояния модели $\hat{x}(k)$ асимптотически сходил к $x(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Из рис. 8.6.1 следует, что уравнения наблюдателя имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + H\Delta e(k) = \\&= A\hat{x}(k) + Bu(k) + H[y(k) - C\hat{x}(k)].\end{aligned}\quad (8.6-3)$$

Ошибка состояния равна

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1). \quad (8.6-4)$$

Из уравнений (8.6-1) и (8.6-3) получим

$$\tilde{x}(k+1) = [A - HC]\tilde{x}(k). \quad (8.6-5)$$

Таким образом, мы имеем однородное разностное уравнение. Ошибка по переменным состояния зависит только от начального значения ошибки $\tilde{x}(0)$ и не зависит от входного сигнала $u(k)$. Для того чтобы процесс сходил к нулю, необходимо, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}(k) = 0,$$

т. е. уравнение (8.6-5) должно описывать асимптотически устойчивый процесс. Следовательно, характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}\det[zI - A + HC] &= (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m) = \\&= \gamma_m + \gamma_{m-1}z + \dots + z^m = 0\end{aligned}\quad (8.6-6)$$

должно иметь корни внутри единичной окружности $|z_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, т. е. устойчивые корни. Это условие может быть выполнено при соответствующем выборе матрицы H регуля-

тора. Для выбора этой матрицы можно использовать методику выбора матрицы регулятора состояния. Поскольку

$$\det \mathbf{W} = \det \mathbf{W}^T,$$

можно записать

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C}] = \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}^T + \mathbf{C}^T\mathbf{H}^T]. \quad (8.6-7)$$

Из сравнения последнего уравнения с характеристическим уравнением регулятора состояния для соответствующего объекта (см. уравнение (8.1-37)) следует, что необходимо модифицировать уравнения для синтеза регулятора состояния. Для этого произведем следующую замену:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{H}^T. \quad (8.6-8)$$

Вместо объекта

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

с обратной связью

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

введем для определения полюсов наблюдателя «транспонированный дополнительный объект»

$$\xi(k+1) = \mathbf{A}^T\xi(k) + \mathbf{C}^T\vartheta(k) \quad (8.6-9)$$

с обратной связью

$$\vartheta(k) = -\mathbf{H}^T\xi(k), \quad (8.6-10)$$

для которого могут быть использованы уравнения синтеза регулятора состояния. Теперь матрицу \mathbf{H} наблюдателя можно определить различными способами, например следующими:

а) Определение характеристического уравнения в соответствии с разд. 8.3.

Для скалярного входа $u(k)$ и выхода $y(k)$, а следовательно, для вектора \mathbf{h} (вместо матрицы \mathbf{H}) уравнение наблюдателя будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T]\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}y(k). \quad (8.6-11)$$

Здесь удобно применить каноническую форму наблюдаемости вместо канонической формы управляемости, использованной в разд. 8.3. Таким образом,

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & (-a_m - h_m) \\ 1 & 0 & \dots & (-a_{m-1} - h_{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & (-a_1 - h_1) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{b}u(k) + \begin{bmatrix} h_m \\ h_{m-1} \\ \vdots \\ h_1 \end{bmatrix} y(k). \quad (8.6-12)$$

Аналогично уравнению (8.3-9) в данном случае получим

$$h_i = \gamma_i - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8.6-13)$$

Здесь γ_i — коэффициенты желаемого характеристического уравнения (8.6-6), которые следует задать.

б) Конечное время установления.

Задав

$$h_i = -a_i, \quad (8.6-14)$$

получим регулятор с минимальным конечным временем установления, обладающий апериодическим характером переходных процессов (см. разд. 8.5).

в) Минимизация квадратичного критерия качества.

В уравнении (8.6-8) параметры вектора \mathbf{h} могут быть выбраны из условия минимизации квадратичного критерия качества

$$I_B = \xi^T(N) \mathbf{Q}_b \xi(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\xi^T(k) \mathbf{Q}_b \xi(k) + \mathbf{v}^T(k) \mathbf{R}_b \mathbf{v}(k)], \quad (8.6-15)$$

как это было описано в разд. 8.1. Результирующие рекуррентные уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{N-j}^T &= [\mathbf{R}_b + \mathbf{C} \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{C}^T]^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{A}^T, \\ \mathbf{P}_{N-j} &= \mathbf{Q}_b + \mathbf{A} \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{A}^T - \mathbf{H}_{N-j} [\mathbf{R}_b + \mathbf{C} \mathbf{P}_{N-j+1} \mathbf{C}^T] \mathbf{H}_{N-j}^T \end{aligned} \quad (8.6-16)$$

получены на основании уравнений (8.1-30) и (8.1-31).

Таким образом, характеристики наблюдателя, а следовательно, и характеристики его собственных движений могут быть выбраны различными способами.

При практической реализации наблюдателей наличие шумов, присутствующих в выходной переменной, ограничивает теоретически достижимое время установления переходных процессов. Рассмотренные выше наблюдатели предназначались для получения всех переменных состояния $\hat{\mathbf{x}}(k)$. Однако некоторые из переменных состояния объекта могут быть определены непосредственно, например, они могут содержаться в выходной переменной $\mathbf{y}(k)$. В этом случае можно использовать наблюдатель пониженного порядка (см. разд. 8.8). Из рис. 8.6.1 видно, что переменные состояния наблюдателя отслеживают состояния объекта без задержки по сигналу $\mathbf{u}(k)$. Однако они будут запаздывать по начальным условиям $\mathbf{x}(0)$ и возмущениям по выходной координате $\mathbf{y}(k)$, что приведет к появлению ошибок в наблюдаемых состояниях.

8.7. РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ С НАБЛЮДАТЕЛЯМИ

При построении регуляторов состояния в разд. 8.1÷8.5 предполагалось, что все переменные состояния объекта могут быть измерены точно. Однако для реальных объектов это условие не

выполняется, и для формирования закона управления приходится вместо истинных переменных состояния объекта $x(k)$ (см. рис. 8.1-33)) использовать переменные состояния, восстановленные с

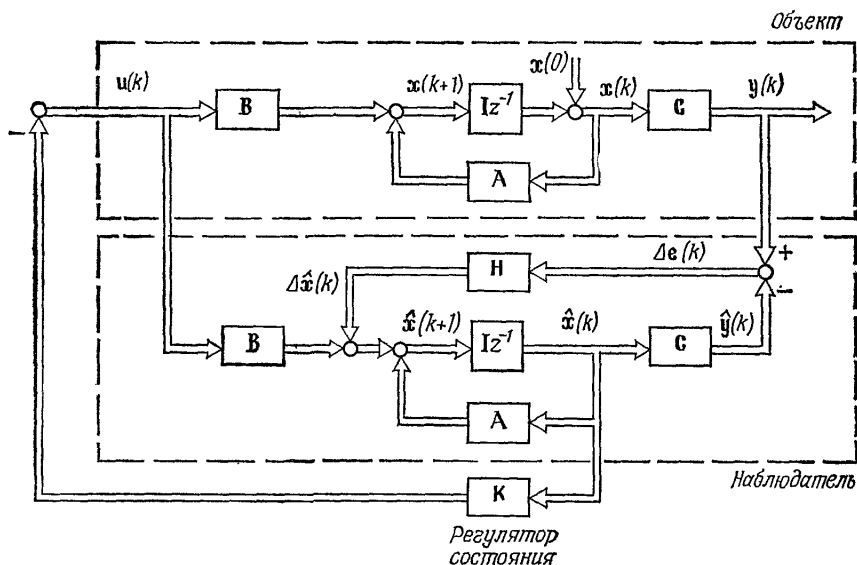


Рис. 8.7.1. Регулятор состояния с наблюдателем для начальных условий $x(0)$.

помощью наблюдателя. Таким образом,

$$u(k) = -K\hat{x}(k). \quad (8.7-1)$$

Соответствующая блок-схема системы показана на рис. 8.7.1.

8.7.1. Наблюдатель для начальных условий

Уравнения состояния замкнутой системы управления следуют из уравнений (8.1-1), (8.6-3) и (8.7-1):

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \quad (8.7-2)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (8.7-3)$$

где векторы состояния $x(k)$ и $\hat{x}(k)$ оказываются взаимосвязанными. На основании (8.1-36) запишем уравнение свободного движения объекта с обратной связью по состоянию без наблюдателя

$$x(k+1) = [A - BK]x(k).$$

Свободное движение наблюдателя (8.6-5) описывается уравнением

$$x(k+1) - \hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k+1) = [A - HC]\tilde{x}(k).$$

Для сравнения с этими уравнениями уравнения (8.7-2) используем следующее преобразование состояния:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (8.7-4)$$

откуда

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{T}.$$

В результате получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{HC} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^*} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}, \quad (8.7-5)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}. \quad (8.7-6)$$

Собственное движение этой системы определяется характеристическим уравнением

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*] = \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{HC}] = 0. \quad (8.7-7)$$

Следовательно, полный набор полюсов системы управления с регулятором состояния и наблюдателем будет состоять из полюсов замкнутой системы управления без наблюдателя и полюсов наблюдателя. Таким образом, полюса системы и полюса наблюдателя могут быть определены независимо, поскольку они не влияют друг на друга. Это следует из так называемой *теоремы разделения*. При этом, однако, следует учитывать, что временное поведение переменных состояния $\mathbf{x}(k)$ зависит от свойств наблюдателя, что ясно видно из уравнения (8.7-5). Наблюдатель обладает собственной динамикой и поэтому вносит дополнительные задержки в систему управления. Если используется эквивалентный наблюдатель, то из уравнения (8.7-7) следует, что контур управления с объектом порядка m имеет $2m$ полюсов и соответственно его порядок равен $2m$.

Влияние задержек, обусловленных введением наблюдателя, ясно видно при использовании апериодического регулятора состояния (разд. 8.3), объединенного с апериодическим наблюдателем (8.6-14). Характеристическое уравнение такой системы будет равно

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*] = z^m z^m = z^{2m}. \quad (8.7-8)$$

Следовательно, установившееся состояние после отработки ненулевых начальных условий будет достигнуто только через $2m$ тактов работы системы, а не через m тактов, как при использовании апериодического регулятора, описанного в разд. 8.5. В этом случае простой апериодический регулятор, о котором шла речь в гл. 6,

оказывается более быстрым, чем регулятор состояния с наблюдателем. В разд. 8.7.2 и 8.8 показано, как можно частично скомпенсировать задержки, обусловленные введением наблюдателя.

8.7.2. Наблюдатель для внешних возмущений

В разд. 8.2 было описано, как можно сформировать постоянные внешние возмущения с помощью начальных условий в расширенных моделях состояния. Для того чтобы управлять постоянными возмущениями, вектор управляющих переменных $u(k)$, определяемых уравнением (8.2-12), должен формироваться из вектора состояния $\varepsilon(k)$ в регуляторе состояния и из векторов состояния $\gamma(k) - \zeta(k)$ в пропорциональном регуляторе с прямой связью. Однако, поскольку в этом случае эти переменные состояния не могут быть измерены, их следует восстановить с помощью наблюдателя. В дальнейшем, как и в предыдущем разделе, будем считать, что входные $u(k)$ и выходные переменные $y(k)$ измеряются точно. Расширенный вектор состояния $x^*(k)$ полной системы, описываемый уравнениями (8.2-14) и (8.2-15) с учетом введенных в (8.2-13) обозначений, содержит все переменные состояния объекта и моделей возмущений. Уравнением наблюдателя для такого вектора состояния будет

$$\hat{x}^*(k+1) = A^* \hat{x}^*(k) + B^* u(k) + H^* [e(k) - C^* \hat{x}^*(k)]. \quad (8.7-9)$$

Для объектов с m переменными состояния и r выходами размерность матрицы обратной связи наблюдателя H равна $(m+r) \times r$. Ее можно определить с помощью методов, описанных в разд. 8.6.

Из уравнения (8.2.16) следует, что уравнение регулятора, использующего наблюдатель, имеет вид

$$u(k) = K^* \hat{x}^*(k). \quad (8.7-10)$$

На рис. 8.7.2 представлена блок-схема системы для случая постоянных значений сигналов задающей переменной. Блок-схема, приведенная на рис. 8.7.3, соответствует описанию системы с учетом сокращенных обозначений из соотношений (8.2-13). При изменении возмущающей $p(k)$ или задающей переменной $w(k)$ неизвестные переменные состояния $\hat{x}^*(k)$ сначала определяются с помощью наблюдателя, в результате чего принятая модель возмущения или задающего воздействия точно воспроизводит сигналы $p(k)$ или $w(k)$ на своем выходе.

Из рис. 8.7.2 видно, что

$$\begin{aligned} u_1(k) &= \hat{y}(k), \\ \hat{y}(k+1) &= \hat{y}(k) + H^*_{(r \times r)} \Delta e(k), \end{aligned} \quad (8.7.11)$$

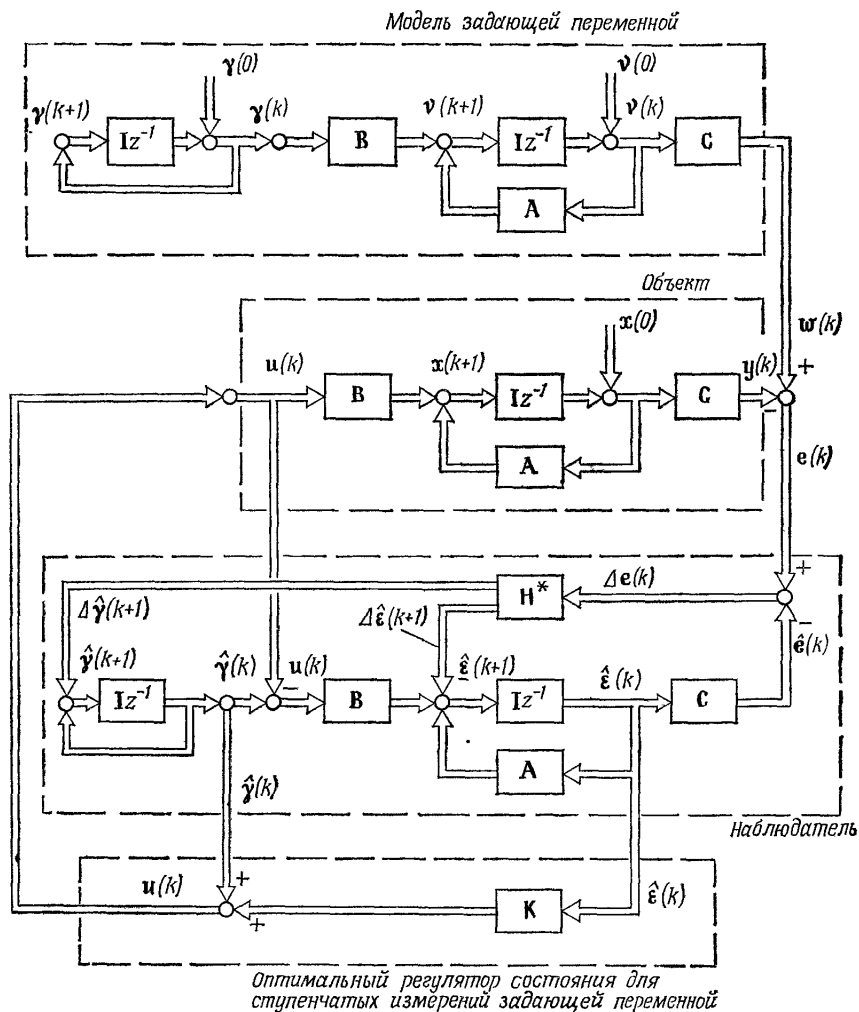


Рис. 8.7.2. Регулятор состояния с наблюдателем (для ступенчатых изменений задающей переменной). Сравни с рис. 8.2.1.

где матрица $\mathbf{H}_{(r \times r)}^*$ является соответствующим блоком матрицы \mathbf{H}^* . Для системы с одним выходом ($r = 1$) из уравнения (8.7-11) следует, что

$$c_1(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} h_{m+1} \Delta e(z), \quad (8.7-12)$$

т. е. наличие наблюдаемой переменной состояния $\hat{\psi}(k)$ приводит к формированию обратной связи по $(m+1)$ -й переменной состояния

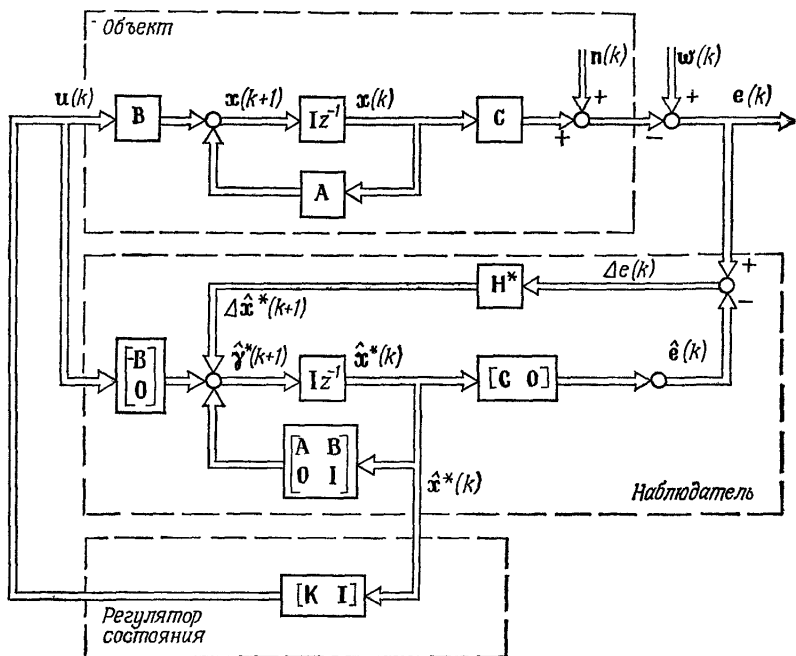


Рис. 8.7.3. Регулятор состояния с наблюдателем для постоянных значений задающей переменной $w(k)$ и возмущения $p(k)$.

и появлению дополнительного компенсирующего элемента управления $u_1(k)$, обладающего интегрирующей характеристикой по отношению к сигналу ошибки $\Delta e(k)$. При введении переменной состояния $\gamma(k)$ (или $\zeta(k)$) в наблюдателе появляется элемент, обладающий «интегрирующими свойствами», что приводит к отсутствию статических ошибок. Соответствующая постоянная интегрирования равна коэффициенту обратной связи h_{m+1} наблюдателя. Значение этой постоянной определяется автоматически при синтезе наблюдателя и поэтому удовлетворяет требованиям, налагаемым данным методом синтеза регуляторов состояния.

Рассмотрим теперь свободное движение гипотетического расширенного объекта (8.2-14) с расширенным наблюдателем (8.7-9) и регулятором состояния (8.7-10). По аналогии с уравнениями (8.7-5) и (8.7-6) запишем

$$\begin{bmatrix} x^*(k+1) \\ \tilde{x}^*(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* + B^*K^* & -B^*k^* \\ 0 & A^* - H^*C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(k) \\ \tilde{x}^*(k) \end{bmatrix}, \quad (8.7-13)$$

$$y(k) = [C^* \ 0] \begin{bmatrix} x^*(k) \\ \tilde{x}^*(k) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det [zI - A^* - B^*K^*] \det [zI - A^* + H^*C^*] = 0. \quad (8.7-14)$$

Из последнего уравнения видно, что полюса регулятора и наблюдателя гипотетической системы оказываются независимыми. Поведение замкнутой системы, состоящей из объекта (8.6-1) с расширенным наблюдателем (8.7-9) и регулятором (8.7-10), описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}^*(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK^* \\ -H^*C^* & (A^* + B^*K^* - H^*C^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}^*(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H^* \end{bmatrix} \times \\ \times (w(k) - n(k)). \quad (8.7-15)$$

Таким образом, после применения z-преобразования

$$[zI - A] x(z) = BK^* \hat{x}^*(z), \quad (8.7-16)$$

$$[zI - (A^* + B^*K^* - H^*C^*)] \hat{x}^*(z) = -H^*C^* x(z) + H^* (w(z) - n(z)) \quad (8.7-17)$$

и исключения $x^*(k)$ получим

$$\begin{aligned} [zI - A + BK^* [zI - (A^* + B^*K^* - H^*C^*)]^{-1} H^*C^*] x(z) = \\ = BK^* [zI - (A^* + B^*K^* - H^*C^*)]^{-1} H^* (w(z) - n(z)). \end{aligned} \quad (8.7-18)$$

Учитывая уравнение выхода $y(z) = Cx(k)$, можно вычислить передаточные функции по задающей или возмущающей переменной. В обоих случаях полюса замкнутой системы определяются из уравнения

$$\det [zI - A + BK^* [zI - (A^* + B^*K^* - H^*C^*)]^{-1} H^*C^*] = 0. \quad (8.7-19)$$

Теперь полюса регулятора и наблюдателя не являются независимыми, и динамика наблюдателя влияет на характер вынужденного движения всей системы как по задающей, так и по возмущающей переменной.

Следует отметить, что регулятор состояния с наблюдателем может быть спроектирован так, что динамика наблюдателя не будет влиять на вынужденное движение системы по задающей переменной. В этом случае точка входа задающей переменной $w(k)$ переносится за наблюдатель и регулятор состояния, т. е. вводится опережение по сигналу $u(k)$ [2.19]. Однако при такой структуре системы отсутствует непосредственное сравнение сигналов регулируемых и задающих переменных, параметры элементов опережения зависят от параметров объекта управления, и могут возникнуть статические ошибки, если параметры объекта известны неточно или если они изменяются во времени. При методе синтеза, описанном выше, эти недостатки отсутствуют, так как ошибки управления $e(k)$ формируются перед наблюдателем

и регулятором путем непосредственного сравнения регулируемых и задающих переменных. Поэтому в системе не может возникнуть статических ошибок при ступенчатом изменении внешних возмущений из-за наличия полюса в точке $z=1$. Задержки, обусловленные наличием наблюдателя, могут быть частично скомпенсированы, как это будет показано ниже.

На рис. 8.7.4 приведены переходные процессы по регулируемой и управляющей координате для объекта III с регулятором состояния для внешних возмущений при ступенчатом изменении возмущающего сигнала $p(k)$. Как видно из рисунка, статическая

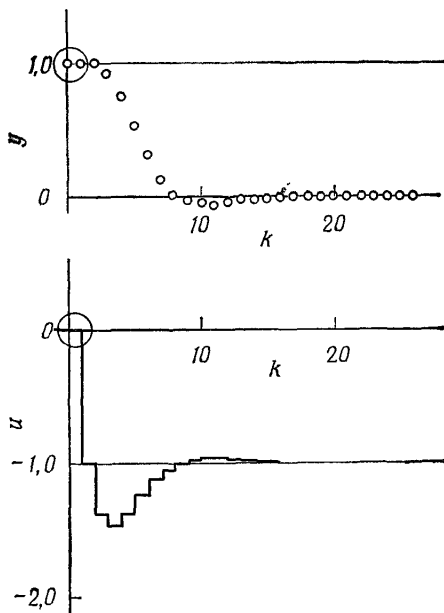


Рис. 8.7.4. Изменение регулируемой и управляющей переменных для объекта III с регулятором состояния для внешних возмущений. Ступенчатое изменение возмущения $p(k)$ [8.5].

ошибка отсутствует. Управляющая переменная, однако, начинает изменяться только после истечения одного тактового интервала. Эта задержка возникает из-за того, что изменяющийся сигнал ошибки регулирования пропускается через элемент задержки z^{-1} в регуляторе, прежде чем сформируется необходимый сигнал управляющей переменной (см. рис. 8.7.2). Таким образом, применение наблюдателей в отличие от параметрически оптимизируемых или компенсационных регуляторов приводит к появлению нежелательной задержки сигнала управляющей переменной. Эта начальная задержка, однако, может быть исключена. Так, наблюдатель на рис. 8.7.2 восстанавливает все переменные состояния, хотя одна переменная состояния может быть измерена непосредственно, если она совпадает с выходной переменной $\hat{y}(k)$. Это условие выполняется при описании системы в пространстве состояний в канонической форме наблюдаемости (см. рис. 3.6.3). В этом случае вместо задержанного элемента управляющей переменной

$$u_m(k) = k_m \hat{x}_m(k) = k_m \hat{y}(k)$$

используется незадержанный (реальный) сигнал

$$u'_m(k) = k_m u(k) \quad (8.7-20)$$

(см. рис. 8.7.5 и 8.7.6). Реальный сигнал выходной переменной $y(k)$ может быть также использован при построении наблюдателя пониженного порядка (см. разд. 8.8).

Пример 8.7.1. В качестве примера рассчитаем регулятор состояния, описанный в разд. 8.2, с наблюдателем для внешних возмущений, описанным

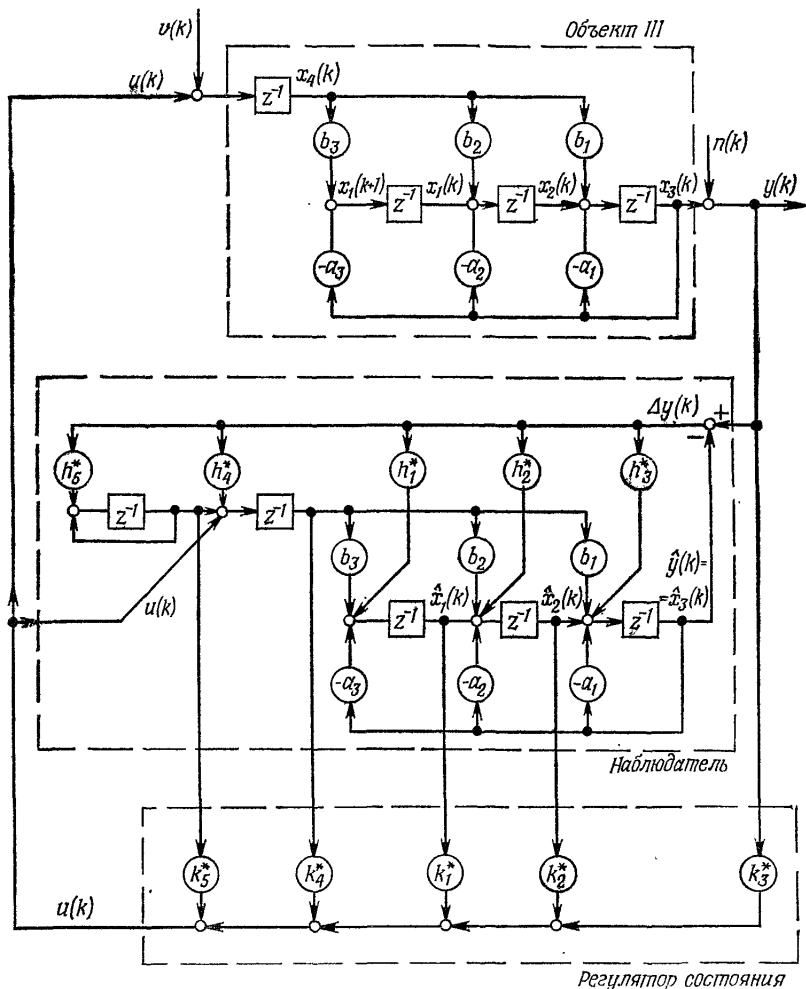


Рис. 8.7.5. Блок-схема объекта III и регулятора состояния с наблюдателем для внешних возмущений и компенсацией начальной задержки.

в разд. 8.7.2, для объекта III (см. разд. 5.4.1). Описание объекта III в пространстве состояний представим в канонической форме наблюдаемости. Так как процесс обладает запаздыванием $d=1$, то из уравнений (3.2-40) и (3.2-41)

следует, что

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 & b_3 \\ 1 & 0 & -a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & -a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

или

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A_d x_d(k) + b_d u(k), \\ y(k) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

или

$$y(k) = c_d^T x_d(k).$$

Блок-схема всей системы приведена на рис. 8.7.5. Структура наблюдателя для ступенчатых изменений внешних переменных $w(k)$ или $p(k)$ задается уравнениями (8.7-9) и (8.2-13):

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 & b_3 & | & 0 \\ 1 & 0 & -a_2 & b_2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & b_1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}, \quad b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ c^{*\Gamma} &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], \\ h^{*\Gamma} &= [h_1^* \ h_2^* \ h_3^* \ h_4^* \ | \ h_5^*]. \end{aligned}$$

Коэффициенты вектора обратных связей h^* наблюдателя вычислены в результате минимизации квадратичного критерия качества (8.6-15) для наблюдателя, представленного в форме (8.6-9) и (8.6-10), с использованием рекуррентного решения матричного уравнения Риккати (8.6-16). Для весовой матрицы Q_B и коэффициента Γ_B , заданных в следующем виде:

$$Q_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_B = 5,$$

получено следующее решение для вектора обратных связей наблюдателя

$$h^{*\Gamma} = [0,061 \quad -0,418 \quad 0,984 \quad 1,217 \quad 1,217].$$

При расчете регулятора состояния в соответствии с уравнениями (8.2-17), (8.2-11) или (8.1-33) в результате рекуррентного решения матричного уравнения Риккати в соответствии с уравнениями (8.1-30) и (8.1-31) весовая матрица Q для переменных состояния (уравнение (8.9-4)) была выбрана так, что только регулируемая переменная имела единичный весовой коэффициент, т. е.

$$Q = c_d c_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При задании весового коэффициента при управляющей переменной $r = 0,043$ получен следующий вектор обратных связей регулятора:

$$k^{*r} = [4,828 \quad 5,029 \quad 4,475 \quad 0,532 \quad 1,000],$$

а для $r = 0,18$

$$k^{*r} = [2,526 \quad 2,445 \quad 2,097 \quad 0,263 \quad 1,000]$$

На рис. 8.7.6 показаны переходные процессы в системе по регулируемой и управляющей переменным

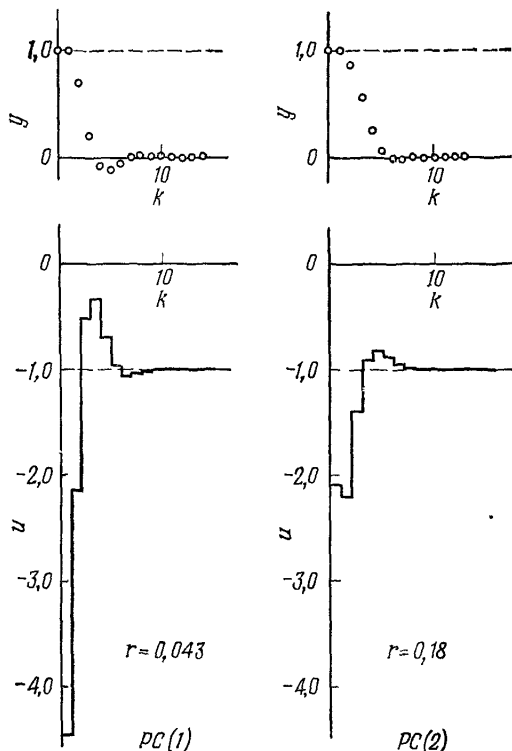


Рис. 8.7.6. Переходные процессы по регулируемой и управляющей переменным для объекта III с регулятором состояния для внешних возмущений и модифицированным наблюдателем для компенсации начальной задержки. Ступенчатое изменение возмущения $p(k)$ [8.5].

За один такт для этого объекта, суммарный порядок которого $m+d=4$, должны быть просчитаны алгоритмы, предназначенные для вычисления

- ошибки на выходе наблюдателя.

$$\Delta e(k-1) = e(k-1) - \hat{x}_3(k-1);$$

- оценки переменных состояния:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k) &= -a_3 \hat{x}_3(k-1) + b_3 \hat{x}_4(k-1) + h_1^* \Delta e(k-1), \\ \hat{x}_2(k) &= \hat{x}_1(k-1) - a_2 \hat{x}_3(k-1) + b_2 \hat{x}_4(k-1) + h_2^* \Delta e(k-1), \\ \hat{x}_3(k) &= \hat{x}_2(k-1) - a_1 \hat{x}_3(k-1) + b_1 \hat{x}_4(k-1) + h_3^* \Delta e(k-1), \\ \hat{x}_4(k) &= \hat{x}_5(k-1) + u(k-1) + h^* \Delta e(k-1), \\ \hat{x}_5(k) &= \hat{x}_5(k-1) + h_5^* \Delta e(k-1), \end{aligned}$$

● управляющей переменной:

— без компенсации задержки z^{-1} в наблюдателе для $y(k)$

$$u(k) = k_1^* \hat{x}_1(k) + k_2^* \hat{x}_2(k) + k_3^* \hat{x}_3(k) + k_4^* \hat{x}_4(k) + k_5^* \hat{x}_5(k),$$

— с компенсацией задержки z^{-1} в наблюдателе для $y(k)$

$$u(k) = k_1^* \hat{x}_1(k) + k_2^* \hat{x}_2(k) + k_3^* y(k) + k_4^* \hat{x}_4(k) + k_5^* \hat{x}_5(k).$$

Таким образом, на каждом такте необходимо выполнить 15 операций умножения и 16 операций сложения. При подсчете числа операций было учтено, что $k_5^* = 1$. При реализации алгоритма управления на цифровом вычислителе к указанным операциям необходимо добавить 8 операций сдвига.

8.8. НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Эквивалентный наблюдатель, описанный в разд. 8.6, восстанавливает все переменные состояния $x(k)$. Однако, если некоторые переменные состояния могут быть непосредственно измерены, вычислять их нет необходимости. Например, в объекте m -го порядка с одним входом и одним выходом одна переменная состояния может быть получена на основании измерения выходной переменной $y(k)$, так что только $(m-1)$ переменная состояния должна быть восстановлена с помощью наблюдателя. Наблюдатель, порядок которого меньше порядка модели объекта, называется наблюдателем пониженного порядка (см. [8.13], [8.15]). Ниже описан метод построения наблюдателя пониженного порядка, изложенный в работах [8.15] и [2.19]. Пусть объект описывается уравнениями

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (8.8-1)$$

$$y(k) = Cx(k). \quad (8.8-2)$$

Размерность векторов в уравнениях равна

$$x(k) \rightarrow (m \times 1),$$

$$u(k) \rightarrow (p \times 1),$$

$$y(k) \rightarrow (r \times 1).$$

При r независимых измеримых выходных переменных $y(k)$ можно непосредственно вычислить r переменных состояния. Следовательно, вектор состояния $x(k)$ можно разделить на измеряемую $x_b(k)$ и наблюдаемую $x_a(k)$ части:

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ x_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k), \quad (8.8-3)$$

$$y(k) = [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix}. \quad (8.8-4)$$

Заменим измеряемый вектор состояния $x_b(k)$ вектором выходных переменных $y(k)$. В этом случае вектор состояния v определяется

с помощью линейного преобразования:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (8.8-5)$$

Из уравнения (8.8-4) следует, что $\mathbf{T}_{21} = \mathbf{C}_1$ и $\mathbf{T}_{22} = \mathbf{C}_2$. Поскольку $\mathbf{x}_a(k)$ не изменяется, $\mathbf{T}_{11} = \mathbf{I}$, а так как $\mathbf{x}_b(k)$ не зависит от $\mathbf{x}_a(k)$, то $\mathbf{T}_{12} = \mathbf{0}$. Таким образом, матрица преобразования имеет вид

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.8-6)$$

а преобразованное уравнение объекта примет вид

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{A}_t \mathbf{v}(k) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}(k), \quad (8.8-7)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_t \mathbf{v}(k). \quad (8.8-8)$$

Из уравнения (3.2-32) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \\ \mathbf{B}_t &= \mathbf{T}\mathbf{B}, \\ \mathbf{C}_t &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]. \end{aligned} \quad (8.8-9)$$

Перепишем уравнение (8.8-7) с учетом блочной структуры матрицы из уравнения (8.8-3):

$$\mathbf{x}_a(k+1) = \mathbf{A}_{t11}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{A}_{t12}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_{t1}\mathbf{u}(k), \quad (8.8-10)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_{t21}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{A}_{t22}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_{t2}\mathbf{u}(k). \quad (8.8-11)$$

Запишем на основании (8.6-3) уравнение эквивалентного наблюдателя ($m-r$)-го порядка для объекта, описываемого уравнением (8.8-10):

$$\hat{\mathbf{x}}_a(k+1) = \mathbf{A}_{t11}\hat{\mathbf{x}}_a(k) + \mathbf{A}_{t12}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_{t1}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}\mathbf{e}_t(k). \quad (8.8-12)$$

Выходной сигнал ошибки эквивалентного наблюдателя полного порядка m , определяемый уравнением (8.6-2), представляет собой разность между выходными сигналами наблюдателя и объекта. Однако, поскольку наблюдатель пониженного порядка не вычисляет явно весь вектор $\hat{\mathbf{y}}(k)$, а вектор $\mathbf{y}(k)$ не содержит информации о $\hat{\mathbf{x}}_a(k)$, следует переопределить вектор ошибки $\mathbf{e}_t(k)$. Для этого можно использовать уравнение (8.8-11), поскольку именно оно определяет ошибку $\mathbf{e}_t(k)$, пока $\hat{\mathbf{x}}_a(k)$ не соответствует измеряемым переменным $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{y}(k+1)$ и $\mathbf{u}(k)$:

$$\mathbf{e}_t(k) = \mathbf{y}(k+1) - \underbrace{\mathbf{A}_{t21}\hat{\mathbf{x}}_a(k) + \mathbf{A}_{t22}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_{t2}\mathbf{u}(k)}_{\hat{\mathbf{y}}(k+1)}. \quad (8.8-13)$$

На основании уравнений (8.8-12) и (8.8-13) запишем уравнение наблюдателя

$$\hat{x}_a(k+1) = A_{t11}\hat{x}_a(k) + A_{t12}y(k) + B_{t1}u(k) + H[y(k+1) - A_{t22}y(k) - B_{t2}u(k) - A_{t21}\hat{x}_a(k)]. \quad (8.8-14)$$

Соответствующая блок-схема приведена на рис. 8.8.1. Входящее в уравнение (8.8-14) значение $y(k+1)$ в момент времени k

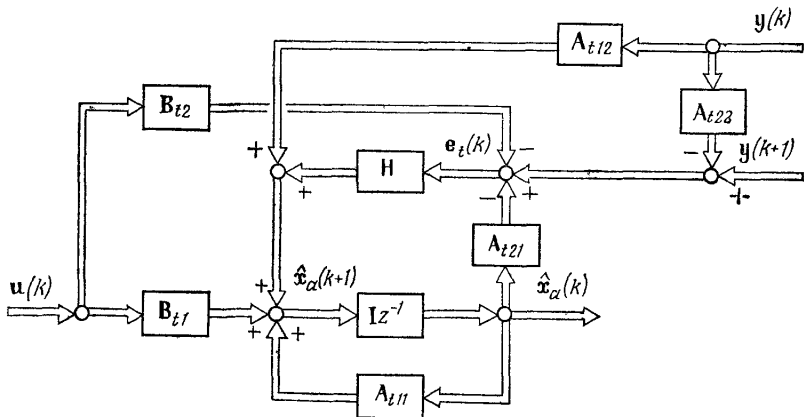


Рис. 8.8.1. Блок-схема наблюдателя пониженного порядка, описываемого уравнением (8.8-14).

неизвестно. Из рис. 8.8.1 видно, что выходной сигнал $\hat{x}_a(k)$ не изменится, если связь

$$\hat{x}_a(z) = H z^{-1} y(z)$$

будет заменена на

$$\hat{x}_a(z) = H y(z).$$

Однако в этом случае нам придется ввести новый вектор переменных состояния наблюдателя

$$\hat{\mu}(k) = \hat{x}_a(k) - H y(k). \quad (8.8-15)$$

С учетом вышесказанного уравнение наблюдателя пониженного порядка (рис. 8.8.2) будет иметь вид

$$\hat{\mu}(k+1) = A_{t11}\hat{\mu}(k) + [A_{t12} + A_{t11}H]y(k) + B_{t1}u(k) + H[-A_{t21}H y(k) - A_{t22}y(k) - B_{t2}u(k) - A_{t21}\hat{\mu}(k)]$$

или

$$\hat{\mu}(k+1) = [A_{t11} - H A_{t21}] \hat{\mu}(k) + [A_{t12} - H A_{t22} + A_{t11}H - H A_{t21}H] y(k) + [B_{t1} - H B_{t2}] u(k) \quad (8.8-16)$$

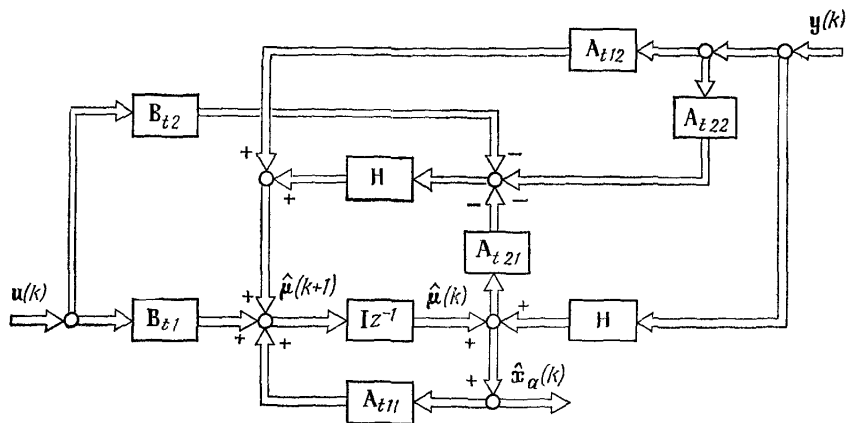


Рис. 8.8.2. Модифицированная блок-схема наблюдателя пониженного порядка, описываемого уравнением (8.8-15).

Подлежащие восстановлению переменные состояния $\hat{x}_a(k)$ формируются так:

$$\hat{x}_a(k) = \hat{\mu}(k) + \mathbf{H}y(k). \quad (8.8-17)$$

Таким образом, полный вектор состояния определяется уравнением

$$\hat{v}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_a(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu}(k) \\ y(k) \end{bmatrix}. \quad (8.8-18)$$

Учитывая, что ошибка наблюдателя по переменным состояния равна

$$\tilde{x}_a(k+1) = x_a(k+1) - \hat{x}_a(k+1), \quad (8.8-19)$$

из уравнений (8.8-10) и (8.8-13) получим, что

$$\tilde{x}_a(k+1) = [\mathbf{A}_{t11} - \mathbf{H}\mathbf{A}_{t21}] \tilde{x}_a(k). \quad (8.8-20)$$

В отличие от эквивалентного наблюдателя в это однородное разностное уравнение вместо матрицы объекта \mathbf{A} входит блок \mathbf{A}_{t11} преобразованной матрицы объекта, соответствующий вектору состояния x_a , а вместо матрицы выхода \mathbf{C} входит блок \mathbf{A}_{t21} преобразованной матрицы объекта, определяющий связь между $x_a(k)$ и $y(k+1)$ в соответствии с уравнением (8.8-11).

Характеристическим уравнением наблюдателя пониженного порядка является следующее:

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{t11} + \mathbf{H}\mathbf{A}_{t21}] = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{m-r}) = 0. \quad (8.8-21)$$

Полюса наблюдателя можно задать с использованием методики, изложенной в разд. 8.6.

Преимущества наблюдателя пониженного порядка по сравнению с эквивалентным наблюдателем (разд. 8.6) состоят в уменьшении порядка его уравнений (на величину r — числа непосредственно измеряемых выходных переменных) и использовании текущих значений выходных переменных $y(k)$, что позволяет исключить задержки, о которых было сказано в разд. 8.7. Эти преимущества, однако, компенсируются существенным увеличением числа необходимых вычислений. Более того, добавляется дополнительное уравнение (8.8-17) для вычисления подлежащих восстановлению переменных состояния. При цифровой реализации на ЭВМ наблюдатель пониженного порядка обычно оказывается предпочтительнее только тогда, когда непосредственно измеряется достаточно много переменных состояния объекта. Во всех других случаях, например для объектов с одним входом и выходом, лучше использовать эквивалентный наблюдатель, модифицированный в соответствии с рекомендациями разд. 8.7, так как его проще рассчитывать, а потенциальное уменьшение числа межтактовых вычислений при понижении порядка такого наблюдателя относительно мало.

8.9. ВЫБОР ВЕСОВЫХ МАТРИЦ И ТАКТА КВАНТОВАНИЯ

Если регулятор состояния проектируется не для конечного времени установления (апериодического характера процессов), то приходится выбирать достаточно большое число их свободных параметров по сравнению с другими структурно оптимизируемыми регуляторами. При синтезе регуляторов без оптимизации квадратичного критерия качества приходится задавать либо коэффициенты характеристического уравнения (разд. 8.3), либо собственные значения замкнутой системы (разд. 8.4). Квадратично оптимальные регуляторы состояния требуют выбора весовых матриц: матрицы \mathbf{Q} для переменных состояния и матрицы \mathbf{R} для управляющих переменных. Для синтеза наблюдателей также необходимо выбрать свободные параметры, которые опять же являются либо коэффициентами характеристического уравнения, либо весовыми матрицами \mathbf{Q}_b и \mathbf{R}_b квадратичного критерия качества (разд. 8.6). К тому же на процесс синтеза наблюдателей влияют параметры принятых моделей внешних воздействий (разд. 8.2), а также величина такта квантования (что относится и к регуляторам). Возможность выбора такого относительно большого числа свободных параметров при синтезе регуляторов состояния, с одной стороны, позволяет достаточно полно учесть характеристики объекта и требования к качеству управления, а с другой стороны, допускает определенный произвол при задании столь большого числа параметров. Поэтому расчет регуляторов состояния редко выполняется за один прием, а чаще проводится итеративно с использованием оценок качества процессов регулирования (изложенных в гл. 4),

полученных на очередном этапе синтеза системы. Однако при наличии некоторого опыта проектирования число свободных параметров может быть сокращено.

8.9.1. Весовые матрицы для регуляторов состояния и наблюдателей

При проектировании регуляторов состояния на основе критерия качества (8.1-2) вес каждой управляющей переменной можно задать независимо, так что матрица \mathbf{R} может быть представлена в диагональной форме:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & r_p & \end{bmatrix}. \quad (8.9-1)$$

Для того чтобы матрица \mathbf{R} была положительно определена, ее элементы r_i , $i=1, 2, \dots, p$ должны быть положительными. В особых случаях, допускающих положительную полуопределенность матрицы \mathbf{R} , некоторые из элементов r_i могут быть нулевыми (см. разд. 8.1).

Веса отдельных переменных состояния в большинстве случаев также задаются с помощью диагональной матрицы \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & q_r & \end{bmatrix}. \quad (8.9-2)$$

Матрица \mathbf{Q} должна быть положительно определена, откуда следует, что $q_i > 0$ для $i=1, 2, \dots, r$ (см. разд. 8.1).

Если требуется, чтобы диагональная матрица \mathbf{Q} содержала весовые ненулевые элементы только для выходных переменных $y(k)$ (как в случае параметрически оптимизируемых регуляторов, проектируемых на основе квадратичного критерия качества (5,2-6)), то из уравнения (8.1-2) получим

$$\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) = \mathbf{y}^T(k) \mathbf{L} y(k),$$

откуда с учетом уравнения (8.1-3) можно записать

$$\mathbf{y}^T(k) \mathbf{L} y(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{x}(k).$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{L} \mathbf{C}. \quad (8.9-3)$$

Следовательно, для объектов с одним входом и одним выходом выполняются соотношения

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{c}\mathbf{c}^T. \quad (8.9-4)$$

Заметим, что при синтезе регуляторов состояния параметр \mathbf{r} является весовым коэффициентом при управляющей переменной $u^2(k)$, а в уравнении (5.2-6) — при $\Delta u^2(k) = [u(k) - u(\infty)]^2$. Однако для объектов пропорционального типа с регулятором состояния $u(\infty) = 0$, откуда следует, что $u(k) = \Delta u(k)$, так что принципиального различия между ними нет.

При синтезе наблюдателей с использованием квадратичного критерия качества (8.6-15) для транспонированной системы (8.6-9) и (8.6-10) весовые матрицы \mathbf{Q}_b и \mathbf{R}_b могут быть заданы по аналогии с методами синтеза регуляторов состояния. В общем случае, однако, можно спроектировать наблюдатель, который оказывается более «быстрым» по сравнению с объектом. Для этого достаточно, чтобы элементы матрицы \mathbf{R}_b были меньше элементов матрицы \mathbf{Q}_b .

8.9.2. Выбор такта квантования

При выборе подходящего такта квантования T_0 можно воспользоваться преимуществом, которое присуще предложенному методу синтеза по сравнению с рассмотренными ранее. Оно состоит в аналитической зависимости оптимального значения квадратичного критерия качества от параметров объекта управления. Из уравнения (8.1-32) получим

$$I_{\text{opt}}(T_0) = \mathbf{x}^T(0) \cdot \mathbf{P}_0(T_0) \mathbf{x}(0),$$

где $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$ — стационарное решение матричного уравнения Риккати (8.1-31). Однако получение аналитического соотношения, позволяющего установить связь между значением критерия качества и тактом квантования, оказывается сложной задачей [8.16].

Можно показать, что при малых значениях такта квантования T_0 значение $I_{\text{opt}}(T_0)$ монотонно возрастает с увеличением T_0 , если объект является полностью управляемым. Последнее условие выполняется для объектов с действительными корнями и нарушается для объектов с комплексно-сопряженными корнями, если значение такта квантования близко к величине полупериода соответствующих собственных колебаний [8.16]. В общем случае наименьшие значения критерия достигаются при $T_0 = 0$, т. е. для непрерывных регуляторов состояния. Для дискретных регуляторов при значениях T_0 , близких к нулю, значение критерия мало отличается от непрерывного случая. И только для больших тактов квантования качество управления существенно ухудшается.

На основании имеющегося опыта можно рекомендовать выбирать такт квантования для регуляторов состояния в соответствии с рекомендациями, приведенными в разд. 5.5 и 7.3.

Для регуляторов состояния, так же как и для регуляторов с конечным временем установления, существует связь между требуемыми изменениями управляющей переменной и тактом квантования, если необходимо обеспечить отработку возмущающего воздействия за конечный период времени. Если задан допустимый диапазон изменения управляющей переменной, его следует учитывать при выборе величины такта квантования [2.19].

Регуляторы для объектов с большим запаздыванием

Методы синтеза регуляторов, описанные в предыдущих главах, позволяют непосредственно учитывать реальные запаздывания, присутствующие в объекте управления. Это осуществляется достаточно легко, так как запаздывание просто вводится в модель объекта, представленную в дискретной форме, что является еще одним преимуществом дискретного представления по сравнению с описанием объекта в классе непрерывных сигналов. В связи с этим регуляторы для объектов с запаздыванием могут быть непосредственно синтезированы с использованием ранее изложенных методов. Управление объектами с запаздыванием, малым по сравнению с их другими динамическими характеристиками, уже рассматривалось в некоторых примерах. Малое запаздывание или является допустимой аппроксимацией малых постоянных времени объекта управления, или соответствует действительно присутствующим в объекте задержкам в передаче сигналов. Если же запаздывание велико по сравнению с другими динамическими характеристиками объекта, то здесь возможно несколько особых случаев, о которых речь пойдет ниже. Следует подчеркнуть, что большие значения запаздывания необходимо рассматривать исключительно как наличие задержек в передаче сигналов. В общем случае объекты управления с запаздыванием можно разделить на два класса: объекты, характеризующиеся только задержкой в передаче сигналов, т. е. объекты с чистым запаздыванием, и объекты, обладающие запаздыванием и собственной динамикой.

9.1. МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Объекты с характеристикой чистого запаздывания, время которого равно $T_t = dT_0$, можно описать дискретной передаточной функцией

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = bz^{-d}, \quad d = 1, 2 \dots \quad (9.1-1)$$

или разностным уравнением

$$y(k) = bu(k-d). \quad (9.1-2)$$

Здесь T_t — время запаздывания, кратное такту квантования T_0 . Объекты с запаздыванием и собственной динамикой имеют передаточную функцию

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d} \quad (9.1-3)$$

или описываются соответствующим разностным уравнением типа (3.4-13). Уравнение (9.1-1) может быть получено из (9.1-3) либо с помощью замены коэффициентов $d' = d - 1$, $b_1 = b$, $b_2 = \dots =$

$= b_m = 0$ и $a_1 = \dots = a_m = 0$:

$$G_P(z) = b_1 z^{-1} z^{-d'} = b z^{-d}, \quad (9.1-4)$$

либо в результате прямой подстановки $d = 0$ в z^{-d} , $m = d$ в $B(z^{-1})$, $b_m = b_d = b$, $b_1 = \dots = b_{m-1} = 0$ и $a_1 = \dots = a_m = 0$:

$$G_P(z) = b_m z^{-m} = b z^{-d}. \quad (9.1-5)$$

Представление объектов с одним входом и одним выходом в пространстве состояний дает возможность использовать различные способы описания запаздывания (см. разд. 3.2.3).

● Запаздывание по входу:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k-d), \\ y(k) &= c^T x(k). \end{aligned} \quad (9.1-6)$$

● Запаздывание, включенное в матрицу системы A [см. уравнение (3.6-41)]:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), \\ y(k) &= c^T x(k). \end{aligned} \quad (9.1-7)$$

● Запаздывание по выходу:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), \\ y(k) &= c^T x(k-d) \quad \text{или} \quad y(k+d) = c^T x(k). \end{aligned} \quad (9.1-8)$$

Во всех рассмотренных случаях матрица A может быть представлена в различных канонических формах (см. разд. 3.6). В уравнениях (9.1-6) и (9.1-8) матрица A имеет размерность $m \times m$, а в уравнении (9.1-7) — $(m+d) \times (m+d)$. Таким образом, введение запаздывания в матрицу A системы приводит к появлению d дополнительных переменных состояния. Характеристики объекта относительно входа/выхода не зависят от формы представления запаздывания, однако с точки зрения синтеза это имеет существенное значение, поскольку влияет на структуру и параметры синтезируемых регуляторов. Способ введения запаздывания (по входу или по выходу) зависит от технологической структуры реального объекта и в общем случае может быть достаточно просто обоснован.

Для объектов с чистым запаздыванием введение запаздывания в матрицу соответствующей системы разностных уравнений, представленной в канонической форме управляемости, приведет к описанию объекта в виде (3.6-36) с вектором состояния $x(k)$ размерности d . В противоположность этому в уравнениях (9.1-6) и (9.1-8) в рассматриваемом случае $A = a = 0$, а d следует заменить на $d' = d - 1$. Следовательно, описание объекта в пространстве состояний в этом случае теряет смысл. Заметим, что задержки могут возникать как на входе, так и между переменными состояния модели объекта. В непрерывном случае этому соответствует векторное дифференци-

альное уравнение вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t - T_{1A}) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

В дискретном случае, однако, такая система с запаздыванием может быть описана уравнением (9.1-7) путем соответствующего расширения вектора состояния и матрицы системы.

9.2. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Существует большое число работ, связанных с проектированием *непрерывных* регуляторов для объектов с запаздыванием (см. [9.1] — [9.7] и [9.14]). В них детально рассмотрены как параметрически оптимизируемые регуляторы пропорционального и интегрального типа, так и регуляторы-предикторы, предложенные в работе Ресвика [9.1]. В последних модель объекта с запаздыванием включена в обратную связь регулятора, в результате чего удается получить наименьшее время установления переходных процессов. Недостатки таких регуляторов-предикторов и их модификаций (см. [5.14]) состоят в их относительно высокой эксплуатационной стоимости и высокой чувствительности к несоответствию реального и заложенного при синтезе времени запаздывания. В общем случае для управления объектами с запаздыванием рекомендуется использовать пропорционально-интегральные регуляторы, динамические характеристики которых являются аппроксимацией регуляторов-предикторов. Однако применение цифровых вычислителей позволяет существенно снизить их эксплуатационную стоимость. Поэтому мы ниже снова рассмотрим *дискретное* управление объектами с (большим) запаздыванием.

9.2.1. Объекты с большим запаздыванием и дополнительной динамикой

Для управления объектами с большим запаздыванием пригодны параметрически оптимизируемые регуляторы, описанные в гл. 5, которые представлены в форме, позволяющей сформировать управление для конечного времени установления переходных процессов (гл. 7), а также регуляторы состояния, описанные в гл. 8. При этом структура параметрически оптимизируемых регуляторов типа iПР-j остается той же, однако их параметры могут существенно измениться. Аperiodические регуляторы AP(v) и AP(v+1) для объектов с запаздыванием уже были рассмотрены ранее. Для регуляторов состояния способ введения запаздывания в векторно-матричную модель объекта управления играет существенную роль. Этот раздел содержит дополнения к методам синтеза регуляторов, изложенным выше.

Регулятор-предиктор (РПР)

Сначала рассмотрим дискретный регулятор-предиктор [9.1], который был специально разработан для объектов с запаздыванием. В указанной работе параллельно объекту с передаточной функцией $G_p(z)$ был включен элемент параллельной передачи $G_{ER}(z)$, в результате чего общая передаточная функция получилась равной коэффициенту передачи объекта K_p . Вместо элемента параллельной передачи $G_{ER}(z)$ было предложено использовать внутреннюю обратную связь регулятора $G_R(z)$ [5.14]. При $G_R \rightarrow \infty$ из уравнения (6-4) получим компенсационный регулятор, с которым передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$G_w(z) = \frac{1}{K_p} G_p(z) = \frac{1}{K_p} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d}. \quad (9.2-1)$$

Эта передаточная функция замкнутой системы затем приравнивалась передаточной функции объекта с единичным коэффициентом передачи, что вполне допустимо для объектов с запаздыванием. Из этого условия с учетом уравнений (6-4) и (9.2-1) далее получена передаточная функция регулятора-предиктора:

$$\begin{aligned} G_R(z) &= \frac{1}{K_p - G_p(z)} = \frac{A(z^{-1})}{K_p A(z^{-1}) - B(z^{-1}) z^{-d}} = \\ &= \frac{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{K_p + K_p a_1 z^{-1} + \dots + (K_p a_{1+d} - b_1) z^{-(1+d)} + \dots - b_m z^{-(m+d)}}. \end{aligned} \quad (9.2-2)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы, следующее из (9.2-1), равно

$$z^d z^m A(z^{-1}) = z^d [z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m] = 0, \quad (9.2-3)$$

т. е. характеристические уравнения объекта и замкнутой системы оказываются идентичными. Следовательно, регулятор-предиктор может использоваться только для асимптотически устойчивых объектов. Для уменьшения высокой чувствительности регулятора Ресвика (см. разд. 9.2.2) к изменению времени запаздывания Смит предложил модификацию регулятора [9.2] — [9.4], [9.15], для которого передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$G_w(z) = \frac{1}{K_p} G_p(z) \cdot G'(z). \quad (9.2-4)$$

В эту передаточную функцию входит дополнительный элемент задержки $G'(z)$. Таким образом, модифицированный регулятор-предиктор описывается передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{G'(z)}{K_p - G_p(z) \cdot G'(z)}. \quad (9.2-5)$$

Обычно задержка $G'(z)$ выбирается равной одному такту.

Регулятор состояния (РС)

Если запаздывание d не включено в матрицу системы \mathbf{A} [см. уравнение (9.1-7)], а представлено лишь задержкой по входу $u(k-d)$ или задержкой по переменным состояния $x(k-d)$, что соответствует уравнениям (9.1-6) и (9.1-8), преимущество регулятора состояния, заключающееся во введении обратных связей по всем переменным состояния, не может быть реализовано. При синтезе регуляторов состояния для объектов с запаздыванием его следует вводить в матрицу системы \mathbf{A} , если переменные состояния могут быть непосредственно измерены. Хотя при этом для большого времени запаздывания размерность $(m+d) \times (m+d)$ матрицы \mathbf{A} становится большей, алгоритм синтеза регулятора состояния не изменяется. Как можно видеть из уравнений (3.6-39) и (3.6-40), изменяются лишь \mathbf{A} , \mathbf{b} и \mathbf{c} по сравнению с обычными дискретными моделями объектов.

В структурно оптимизируемых регуляторах относительно входа/выхода для объектов с запаздыванием порядок числителя передаточной функции зависит только от порядка объекта m . Он равен m для регуляторов АР (v) и РПР, а для регулятора с минимальной дисперсией РМД- d равен $(m-1)$ (см. гл. 14). Запаздывание влияет только на порядок числителя, который будет равен $(m+d)$ или $(m+d-1)$ соответственно.

Таблица 9.2.1

Ненулевые параметры аperiodических регуляторов, регуляторов-предикторов и регуляторов с минимальной дисперсией (гл. 14) для объектов порядка $m \geq 1$ с запаздыванием d

	q_0	$q_1 \dots$	q_{m-1}	q_m	p_0	$p_1 \dots$	$p_{1+d} \dots$	p_{m+d-1}	p_{m+d}
АР (v)	×	×	×	×	×	—	×	×	×
РПР	×	×	×	×	×	×	×	×	×
РМД- d	×	×	×	—	×	×	×	×	—

9.2.2. Объекты с чистым запаздыванием

Регуляторы вход/выход (аperiodические, предикторы и ПИ-регуляторы)

Передаточная функция структурно оптимизируемого регулятора вход/выход для объектов, обладающих только чистым запаздыванием

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = bz^{-d} \quad (9.2-6)$$

получена из описания регулятора для объектов с m элементами задержки и запаздыванием d с использованием уравнений (9.1-4)

или (9.1-5). Аperiodические регуляторы AP (v) и регуляторы-предикторы РПР, относящиеся к компенсационным регуляторам, имеют одну и ту же передаточную функцию

$$G_R(z) = \frac{1}{b} \frac{1}{1-z^{-d}} \quad (9.2-7)$$

или соответствующее разностное уравнение

$$u(k) = u(k-d) + q_0 e(k), \quad (9.2-8)$$

где $q_0 = 1/b$. Текущее значение управляющей переменной $u(k)$ вычисляется из управляющей переменной $u(k-d)$, задержанной на время запаздывания, и ошибки управления $e(k)$. Переходный процесс компенсационного регулятора, описываемого уравнением

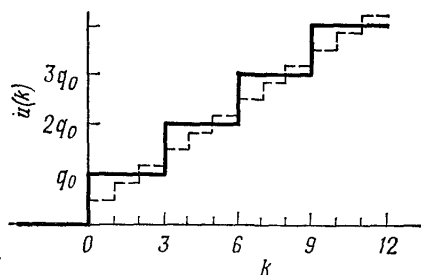


Рис. 9.2.1. Переходный процесс компенсационного регулятора $u(k) = u(k-d) + q_0 e(k)$ для $d=3$. Пунктирная линия — аппроксимация ПИ-регулятором, описываемым уравнением (9.2-9).

(9.2-7), приведен на рис. 9.2.1. В начале этой главы уже отмечалось, что регулятор для объектов с запаздыванием может быть аппроксимирован ПИ-регулятором, как показано на рис. 9.2.1.

В этом случае получаем алгоритм управления

$$u(k) = u(k-1) + q'_0 e(k) + q'_1 e(k-1)$$

с параметрами

$$q'_0 = q_0/2 = 1/2b,$$

$$q'_1 = q_0 \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{2b} \frac{(d-2)}{d}.$$

(9.2-9)

Характеристические коэффициенты алгоритма, введенные в разд. 5.2.1, будут равны $K = q'_0 = \frac{1}{2b}$ — коэффициент передачи; $c_1 =$

$= \frac{q'_0 + q'_1}{q'_0} = \frac{2}{d}$ коэффициент интегрирования. Запишем теперь ха-

рактеристическое уравнение результирующей системы с обратной связью при точном и неточном задании времени запаздывания. Это позволит оценить чувствительность замкнутой системы по отношению к запаздыванию. Для компенсационного регулятора с точно заданным запаздыванием имеем

$$1 + G_R(z) G_P(z) = z^d = 0. \quad (9.2-10)$$

Это характеристическое уравнение совпадает с характеристическим уравнением объекта. Из него можно определить чувствительность регулятора к неточному заданию времени запаздывания. Если регулятор, синтезированный для запаздывания d , используется для управления объектом с запаздыванием $d+1$, т. е. заданное запаздывание оказалось меньшим, то характеристическое уравнение замкнутой системы будет иметь вид

$$z^{d+1} - z + 1 = 0. \quad (9.2-11)$$

Для $d \geq 1$ его корни расположены на единичной окружности или вне ее, что ведет к развитию неустойчивости (см. табл. 9.2.2). Если же запаздывание в объекте равно $d-1$, получим

$$z^d + z - 1 = 0. \quad (9.2-12)$$

В этом случае неустойчивость возникает при $d \geq 2$ (табл. 9.2.2). В табл. 9.2.3 приведены наибольшие значения неустойчивых корней для значений d , равных 1, 2, 5, 10 и 20. Для очень больших запаздываний замкнутая система с компенсационным регулятором становится настолько чувствительной к изменению даже на один такт запаздывания в объекте, что всегда возникает неустойчивость. Следовательно, такой регулятор можно применять только в тех случаях, когда запаздывание известно точно.

При использовании ПИ-регулятора (2ПР-2) характеристическое уравнение будет равно

$$z^{d+1} - z^d + bq_0'z + q_1'b = 0 \quad (9.2-13)$$

или, используя параметры (9.2-9),

$$2z^{d+1} - 2z^d + z - \frac{d-2}{d} = 0. \quad (9.2-14)$$

Если запаздывание в объекте изменяется с d на $d+1$, то имеем

$$2z^{d+2} - 2z^{d+1} + z - \frac{d-2}{d} = 0. \quad (9.2-15)$$

При замене d на $d-1$ получим

$$2z^d - 2z^{d-1} + z - \frac{d-2}{d} = 0. \quad (9.2-16)$$

В табл. 9.2.4 приведены значения соответствующих корней. Если исключить случай $d=1$, неустойчивости не возникает. Следовательно, система с ПИ-регулятором менее чувствительна к изменению запаздывания в объекте. Только при использовании ПИ-регулятора, синтезированного для $d=1$, возникает неустойчивость при запаздывании в объекте $d=2$. Более того, можно заметить, что большие значения корней характеристического уравнения соответствуют большим значениям запаздывания в объекте, превышающим выбранное для расчета регулятора. Поскольку при этом

Таблица 9.2.2

Значения модулей $|z_i|$ корней характеристических уравнений (9.2-10), (9.2-11) и (9.2-12) для объектов с чистым запаздыванием с регулятором $G_R(z) = 1/(1-z-d)$

Объект	d=1	d=2	d=5
$z-d$	0	0	0
$z-(d+1)$	<u>1,0</u>	<u>1,325</u> 0,869	<u>1,126</u> 1,126
$z-(d-1)$	0,5	<u>1,62</u> 0,618	<u>1,151</u> 1,151
			<u>1,050</u> 1,050
			<u>0,755</u> 0,755
			0
			0
			0,846

Таблица 9.2.4

Значения модулей $|z_i|$ корней характеристических уравнений (9.2-14), (9.2-15) и (9.2-16) для объектов с чистым запаздыванием с ПИ-регулятором (9.2-9)

Объект	d=1	d=2	d=5
$z-d$	0,707	0,707	0,886
$z-(d+1)$	<u>1,065</u> 1,065	0,941 0,941	0,923 0,923
$z-(d-1)$	0,333	0,500	0,796 0,796
			0,829 0,829
			0,858 0,858
			0,760 0,760
			0,701 0,701
			0,856 0,856

Таблица 9.2.3

Наибольшие значения модулей $|z_i|$ корней характеристического уравнения для объекта с чистым запаздыванием с регулятором $G_R(z) = 1/(1-z^{-d})$

Объект	d=1	d=2	d=5	d=10	d=20
z^{-d}	0	0	0	0	0
$z^{-(d+1)}$	<u>1,0</u>	<u>1,320</u>	<u>0,126</u>	<u>1,068</u>	<u>1,034</u>
$z^{-(d-1)}$	0,5	<u>1,618</u>	<u>1,151</u>	<u>1,076</u>	<u>1,036</u>

Таблица 9.2.5

Наибольшие значения модулей $|z_i|_{\max}$ корней характеристического уравнения для объекта с чистым запаздыванием с ПИ-регулятором (9.2-9)

Объект	d=1	d=2	d=5	d=10	d=20
z^{-d}	0,707	0,707	0,886	0,938	0,970
$z^{-(d+1)}$	<u>1,065</u>	0,941	0,923	0,951	0,974
$z^{-(d-1)}$	0,333	0,500	0,796	0,923	0,967

происходит приближение к пределу устойчивости, лучше синтезировать ПИ-регулятор для времени запаздывания, заведомо превышающего запаздывание в объекте. В разд. 14.3 рассмотрены регуляторы для объектов с чистым запаздыванием и стохастическими возмущениями, проектируемые на основании принципа минимальной дисперсии.

Регулятор состояния

Если запаздывание включено в матрицу системы, как в уравнениях (9.1-7) и (3.6-41), и предполагается, что все переменные состояния измеряются непосредственно, то характеристическое уравнение для объекта с чистым запаздыванием и регулятором состояния (8.3-8) будет равно

$$\det [zI - A + bk^T] = k_d + k_{d-1}z + \dots + k_1z^{d-1} + z^d = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_d) = 0 \quad (9.2-17)$$

Для того чтобы это характеристическое уравнение было тем же, что и для компенсационных регуляторов вход/выход, т. е. $z^d=0$,

все d коэффициентов пропорциональных обратных связей должны быть равны нулю, т. е. $k_i=0$ для $i=1, \dots, d$. Смысл состоит в том, чтобы разомкнутый объект с запаздыванием при сокращении числа обратных связей по состоянию имел наименьшее время установления для начальных значений $x(0)$, соответствующее процессу с конечным временем установления $z^d=0$. Если же не сокращать число обратных связей, полюса z_1 из уравнения (9.2-17) могут быть не равны нулю. Поскольку переменные состояния для запаздывания, введенные в модель объекта (3.6-41), в общем случае не могут быть измерены непосредственно, их следует восстанавливать или оценивать. Теперь возникает вопрос, имеют ли регуляторы состояния с наблюдателями (разд. 8.6, 8.7) или с устройствами оценки (разд. 22.3, 15.2 и 15.3) преимущества перед регуляторами вход/выход, рассмотренными выше. Ответ на этот вопрос, основанный на результатах моделирования, дается в следующих разделах.

9.3. СРАВНЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для сравнения качества управления и чувствительности к неточному заданию времени запаздывания различных алгоритмов управления и регуляторов для объектов с большим запаздыванием было проведено моделирование процессов регулирования на ЭВМ с помощью пакета программ CADCA, описанного в гл. 29 [30.1]. При моделировании использовались два типа объектов: объект с чистым запаздыванием

$$G_p(z^{-1}) = \frac{y(z)}{u(z)} = z^{-d} \quad \text{при } d=10 \quad (9.3-1)$$

и низкочастотный объект III (см. уравнение (5.4-4) и Приложение) с запаздыванием $d=10$

$$G_p(z^{-1}) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} z^{-d}. \quad (9.3-2)$$

Соответствующие переходные процессы при единичном ступенчатом воздействии в момент времени $k=0$ изображены на рис. 9.3.1 и 9.3.2. Значения среднеквадратической ошибки управления

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M e_w(k)} \quad (9.3-3)$$

и среднеквадратического отклонения управляющей переменной

$$S_u = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M [u(k) - u(\infty)]^2} \quad (9.3-4)$$

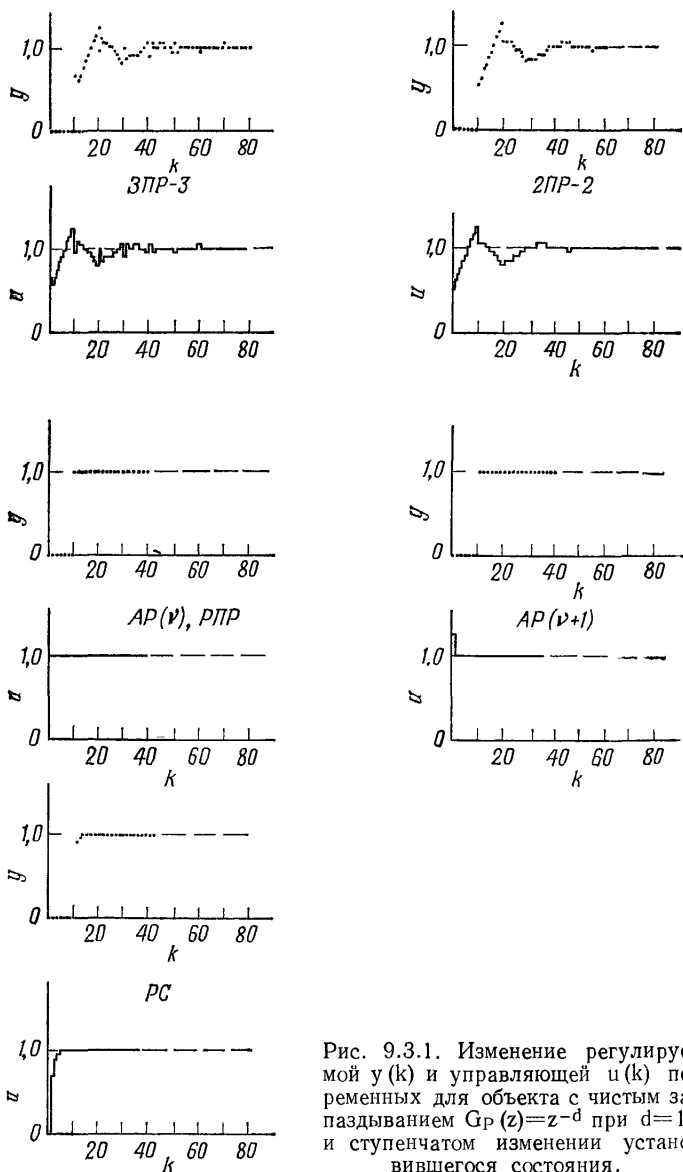


Рис. 9.3.1. Изменение регулируемой $y(k)$ и управляющей $u(k)$ переменных для объекта с чистым запаздыванием $G_P(z) = z^{-d}$ при $d=10$ и ступенчатом изменении установившегося состояния.

приведены на рис. 9.3.3 для $M=100$ и различных значений запаздывания d_E , принятых при синтезе: точное соответствие $d_E = d = 10$; ошибка в меньшую сторону — $d_E = 8$ и $d_E = 9$; ошибка в большую сторону — $d_E = 11$ и $d_E = 12$. В таблицу 9.3.1 сведены

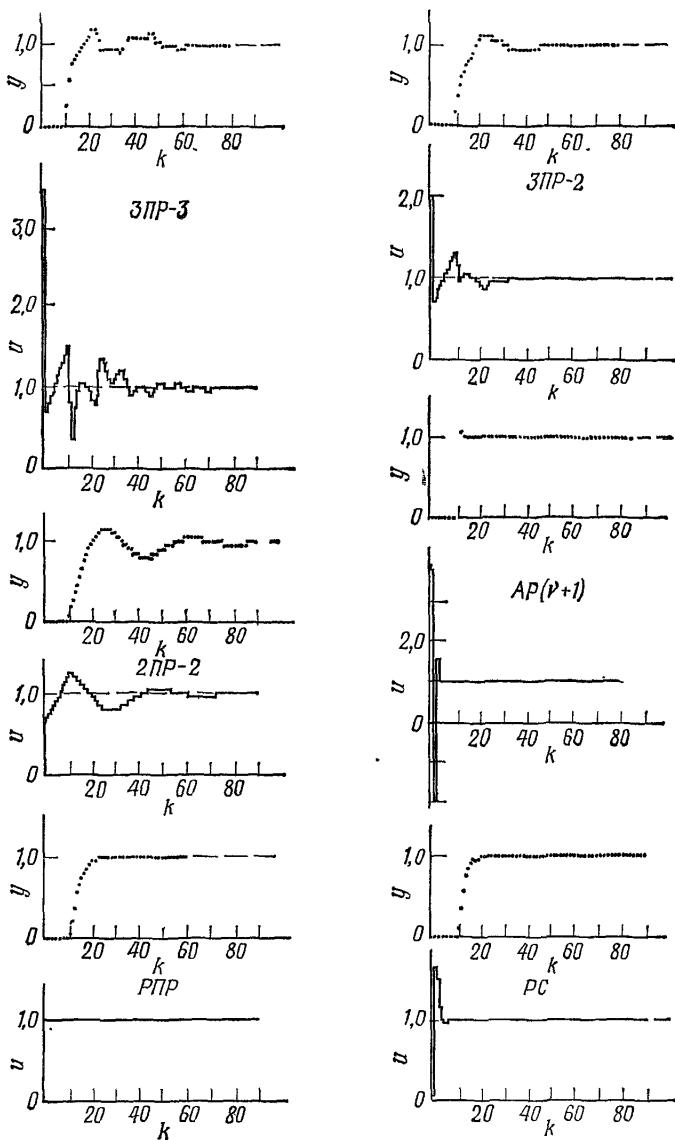


Рис. 9.3.2. Изменение регулируемой $y(k)$ и управляющей $u(k)$ переменных для объекта III с запаздыванием $d=10$, $G_P(z)=B(z^{-1})z^{-d}/A(z^{-1})$ при ступенчатом изменении установившегося состояния.

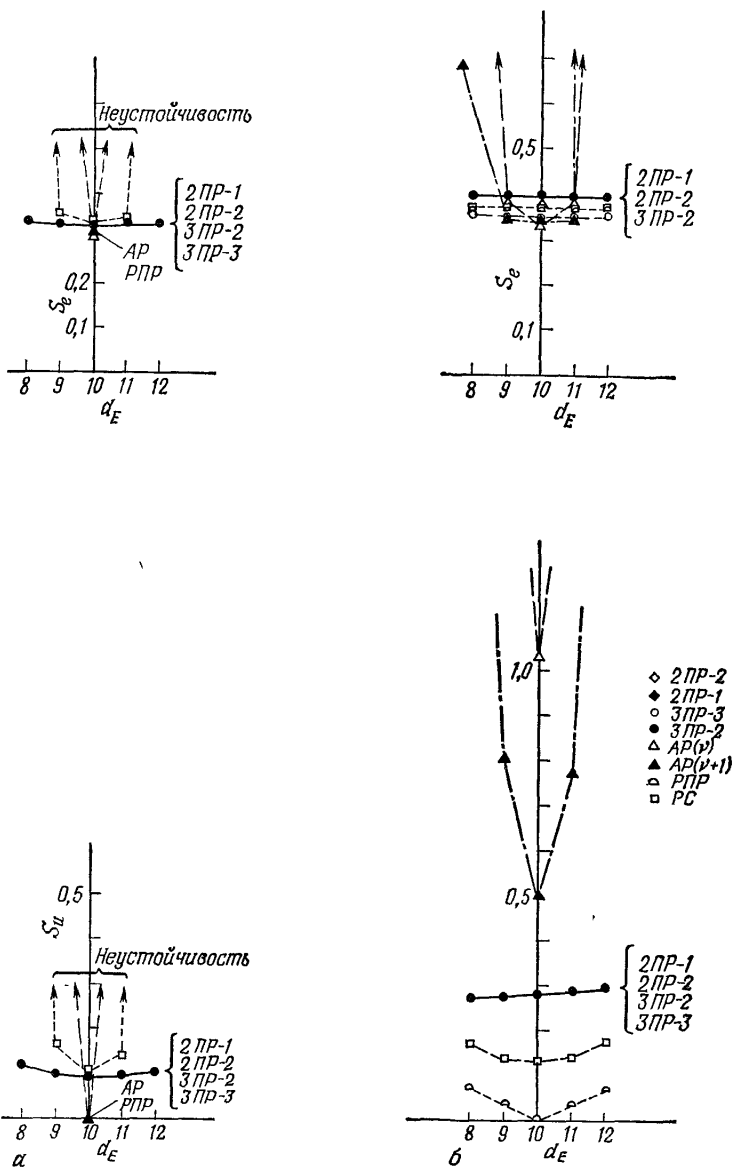


Рис. 9.3.3. Зависимость параметров управления S_e и S_u от величины запаздывания d_E , использованного при синтезе, для:

a — объекта с чистым запаздыванием z^{-d} при $d=10$; b — объекта III с запаздыванием $d=10$.

Таблица 9.3.1

**Параметры регуляторов для исследуемых объектов с большим
временем запаздывания**

Параметры регулятора	$G_p = z^{-d}$ $d=10$		$G_p = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d}$ (Объект III с $d=10$)		
	ЗПР-3 ($r=0$)	2ПР-2 ($r=0$)	ЗПР-3 ($r=0$)	ЗПР-2	2ПР-2 ($r=0$)
q_0	0,6423	0,5198	3,4742	2,0000	0,6279
q_1	-0,6961	-0,4394	-6,2365	-3,3057	-0,5714
q_2	0,1372	0	2,8483	1,3749	0
K	0,5052	0,5198	0,6258	0,6251	0,6280
c_D	0,2725	0	4,5515	2,1993	0
c_1	0,1651	0,1547	0,1373	0,1106	0,0921
	AP ($v+1$)	AP (v)	AP ($v+1$)	AP (v)	РПР
q_0	1,25	1	3,8810	9,5238	1
q_1	-0,25	0	-0,1747	-14,2762	-1,4990
q_2	0	0	-5,7265	6,7048	0,7040
q_3	0	0	3,5845	0,9524	-0,1000
q_4	0	0	-0,5643	0	0
p_0	1	1	1	1	1,0000
p_1	0	0	0	0	-1,4990
p_2	0	0	0	0	0,7040
p_3	0	0	0	0	-0,1000
p_4	0	0	0	0	0
p_d	0	-1,25	0	0	0
p_{d+1}	0	0	-0,2523	-0,6190	0,0650
p_{d+2}	0	0	-0,5531	-0,4571	0,0480
p_{d+3}	0	0	-0,2398	0,0762	-0,0451
p_{d+4}	0	0	0,0451	0	-
	PC ($r=1$) *		PC ($r=1$) *		-
k_1	0		0,0680		
k_2	0		0,0473		
k_3	0		0,0327		
k_4	0		0,0807		
k_5	0		0,0691		

Продолжение

Параметры регулятора	$G_p = z^{-d}$ $d=10$		$G_p = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d}$ (Объект III с $d=10$)		
	ЗПР-3 ($r=0$)	2ПР-2 ($r=0$)	ЗПР-3 ($r=0$)	ЗПР-2	2ПР-2 ($r=0$)
	РС ($r=1$) *)		РС ($r=1$) *)		
k_6	0		0,0551		
k_7	0		0,0420		
k_8	0		0,0311		
k_9	0		0,0226		
k_{10}	0		0,0161		
k_{11}	1,0		0,0114		
k_{12}	—		0,0080		
k_{13}	—		0,0056		
k_{14}	—		1,0		
					*) $r_b = 5$; Q_b из при- мера 8.7.1

значения параметров регуляторов для $d_E = d = 10$. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

● Объекты с чистым запаздыванием

Для объектов с чистым запаздыванием ПИ-регулятор 2ПР-2, относящийся к классу регуляторов с параметрически оптимизируемыми алгоритмами управления, обладает несколько лучшим качеством управления по сравнению с ПИД-регулятором ЗПР-3, поскольку характеризуется меньшей колебательностью регулируемой и управляющей переменных. Коэффициент передачи в обоих случаях равен приблизительно 0,5. Введение весового коэффициента $r > 0$ при управляющей переменной оказывает незначительное влияние на качество регулирования. Чувствительность этих параметрически оптимизируемых регуляторов к неточному заданию величины запаздывания оказывается меньшей, чем для любых других регуляторов. Наилучшее возможное качество переходного процесса по регулируемой переменной достигается в системе с апериодическим регулятором $AP(v)$ или с идентичным ему регулятором-предиктором РПР. Модифицированный апериодический регулятор $AP(v+1)$ позволяет достичь нового установившегося состояния на такт позже. Однако и апериодический регулятор, и регулятор-предиктор не рекомендуется использовать в том случае, когда запаздывание в объекте известно не точно, поскольку при отличии реального и принятого при синтезе запаздывания система становится неустойчивой. Хорошее качество управления обеспечивает регулятор состояния с наблюдателем. Здесь $u(0) = 0$, поскольку при оптимизации квадратичного критерия качества (8.1-2)

обратная связь по состоянию k_d равна нулю, а также все коэффициенты обратных связей $k_i=0$ для $i=1, \dots, d-1$. Только коэффициент k_{d+1} , соответствующий обратной связи по переменной состояния $\gamma(k)=x_{d+1}(k)$ в наблюдателе расширенного порядка, равен 1 (см. рис. 8.7.2, 8.7.3 и пример 8.7.1). Качество управления для этого регулятора не зависит от значения весового коэффициента γ при управляющей переменной. Однако чувствительность регулятора состояния к неточному заданию времени запаздывания для $|\Delta d|=|d_E-d|=1$ оказывается большей, чем для параметрически оптимизируемых регуляторов. При $|\Delta d|>1$ возникает неустойчивость. Следовательно, для управления объектами с чистым запаздыванием, которое известно достаточно точно ($|\Delta d|\leq 1$), можно рекомендовать регуляторы состояния с модифицированным наблюдателем. Если же запаздывание известно не точно или оно изменяется во времени ($|\Delta d|>1$), то предпочтение следует отдавать параметрически оптимизируемым ПИ-регуляторам.

● Низкочастотный объект III с большим запаздыванием

Применение регуляторов, реализующих синтезированные для $\gamma=0$ параметрически оптимизируемые ПИ-алгоритмы управления (2ПР-2, 2ПР-1), приводит к существенным колебаниям регулируемой и управляющей переменных. Переходный процесс по регулируемой переменной быстрее устанавливается для ПИД-регулятора 3ПР-3, однако для этого требуются большие значения отклонений управляющей переменной. Регулятор 3ПР-2 с $q_0=2$ обеспечивает наилучшее среди параметрически оптимизируемых регуляторов качество управления с хорошим демпфированием регулируемой и управляющей переменных. Он также характеризуется меньшей из всех параметрически оптимизируемых регуляторов чувствительностью к неточному заданию запаздывания.

Регулируемая переменная в системе с *апериодическим регулятором* достигает нового установившегося состояния быстрее, чем при использовании любых других регуляторов. Однако требуемые для этого значения сигналов управляющей переменной получаются слишком большими для регулятора AP (v) и достаточно большими даже для регулятора AP ($v+1$). Кроме того, чувствительность апериодических регуляторов к неточному заданию запаздывания оказывается наибольшей из всех регуляторов. Как следует из результатов моделирования, ошибка $\Delta d_E=\pm 1$ еще допустима, особенно для регулятора AP ($v+1$). Большие же ошибки, к сожалению, ведут к неприемлемому качеству управления.

Регулятор-предиктор является моделью самого объекта управления, и поэтому управляющая переменная сразу же достигает своего установившегося значения. *Регулятор состояния* с наблюдателем, синтезированный для $\gamma=1$, обеспечивает гораздо лучшее качество переходного процесса по регулируемой переменной по сравнению с регулятором-предиктором. Начальное значение управ-

ляющей переменной $u(0)$ достаточно мало, что обусловлено малой величиной коэффициента k_3 обратной связи по состоянию, как это видно из табл. 9.3.1 и рис. 8.7.5. Управляющая переменная достигает своего максимального значения при $k=1$ и затем плавно сходится к новому установившемуся значению. Регулятор-предиктор и регулятор состояния с наблюдателем характеризуются малой чувствительностью к неточности задания времени запаздывания.

Таким образом, лучшее качество управления для низкочастотного объекта с большим запаздыванием обеспечивается регулятором состояния, регулятором-предиктором и параметрически оптимизируемым регулятором ЗПР-2 (или ЗПР-3 с $g \approx 1$). Регулятор-предиктор характеризуется наименьшими, регулятор ЗПР-2 — наибольшими, а регулятор состояния — средними значениями отклонений управляющей переменной.

Из сравнения качества управления следует, что переходный процесс в разомкнутой системе при ступенчатом изменении установившегося состояния может существенно отличаться от переходного процесса самого объекта управления, если очень большие изменения входной переменной должны быть исключены. При больших отклонениях управляющей переменной, что характерно для аperiodических регуляторов, можно достичь меньшего времени регулирования. Однако это ведет к увеличению чувствительности системы к величине запаздывания. Поэтому в общем случае применять аperiodические регуляторы для объектов с большим запаздыванием не рекомендуется.

Так как регуляторы-предикторы можно использовать только для асимптотически устойчивых объектов, при управлении низкочастотными объектами с большим запаздыванием рекомендуется применять регуляторы состояния с наблюдателями и параметрически оптимизируемые ПИ- и ПИД-регуляторы.

Управление нестационарными объектами с помощью регуляторов с постоянными параметрами

В рассмотренных ранее методах синтеза предполагалось, что модель объекта известна точно. Однако на практике такого не бывает. Как при теоретическом моделировании, так и при экспериментальной идентификации необходимо всегда учитывать наличие малых, а часто и больших отличий в поведении определяемой модели системы и реального объекта. Если считать, например, что структура и порядок модели объекта заданы точно, то упомянутые отличия можно считать следствием ошибок в параметрах. Более того, в процессе нормальной эксплуатации часто возникают изменения в поведении объектов управления, обусловленные, например, смещением рабочей точки (нагрузки), а также изменениями энергии, массы или моментов. Поэтому при проектировании регуляторов необходимо исходить из того, что

- принятая модель объекта не точна,
- характеристики объекта изменяются в процессе его функционирования.

В этой главе будет кратко рассмотрено влияние изменений характеристик объекта на поведение замкнутой системы. Под изменением характеристик будем подразумевать как несоответствие модели объекту, так и изменение его параметров. Ниже при синтезе регуляторов изменения параметров будут оцениваться по отношению к номинальному вектору параметров θ_n . Представляет интерес исследование зависимости характеристик замкнутой системы для небольших отклонений вектора параметров от номинального значения при использовании *регулятора с постоянными параметрами*. В дальнейшем предполагается, что порядок модели объекта не должен изменяться, а скорость изменения параметров существенно меньше скорости протекания переходных процессов в замкнутой системе. Последнее предположение позволяет считать, что объект является квазистационарным.

При малых вариациях параметров объекта синтез регуляторов можно проводить с использованием *методов теории чувствительности* ([10.1]—[10.7]). Если известна чувствительность системы по отношению к изменению параметров объекта, то при синтезе можно обеспечить требования хорошего качества процессов регулирования и малой чувствительности замкнутой системы к изменениям параметров объекта управления. Такой подход будет рассмотрен в разд. 10.1. Однако при больших изменениях параметров указанные методы теории чувствительности для синтеза непригодны. В этих случаях проектируют регуляторы с постоянными параметрами, оптимальные относительно усредненных моделей объектов с *различными векторами параметров*. Такой подход является более общим по сравнению с методами, основанными на оценке чувствительности. В связи с тем что при этом подразумеваются большие изменения параметров, один и тот же регулятор рассчитывается для управления объектом в его двух или более рабочих точках, а не только для одной рабочей точки, как в случае синтеза с применением методов теории чувствительности, обеспечивающего малую чувствительность системы к (малым) изменениям параметров объекта. Однако этот вопрос будет рассмотрен в разд. 10.2 очень кратко. Такая задача была впервые поставлена в работе [8.8] для непрерывных регуляторов.

10.1. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В отличие от систем управления с прямой связью системы управления с обратной связью позволяют не только уменьшить влияние внешних возмущений на выходную переменную, но и снизить влияние изменения параметров объекта на качество управления по регулируемой координате. Для иллюстрации этого хорошо известного свойства [10.1] рассмотрим регулятор с прямой связью и регулятор с обратной связью, изображенные на рис. 6.1 и 6.2 соответственно. Далее будем использовать следующие обозначения: $G_P(z)$ — передаточная функция объекта управления, $G_R(z)$ — передаточная функция регулятора с обратной связью, $G_S(z)$ — передаточная функция регулятора с прямой связью. Обе системы синтезированы для номинального вектора параметров объекта θ_n , так что при одном и том же сигнале управления $w(k)$ выходные сигналы $y(k)$ в обеих системах будут идентичны. Предположим, что объект $G_P(z)$ является асимптотически устойчивым, в результате чего после затухания свободных движений в системах перед подачей сигнала управления оба объекта находятся в одинаковом установившемся состоянии. Передаточная функция замкнутой системы с обратной связью в номинальной рабочей точке определяется соотношением

$$G_w(\theta_n, z) = \frac{y(z)}{w(z)} = \frac{G_R(z) G_P(\theta_n, z)}{1 + G_R(z) G_P(\theta_n, z)}. \quad (10.1-1)$$

Передаточная функция регулятора с прямой связью, обеспечивающего то же, что и в случае регулятора с обратной связью, поведение системы относительно переменных вход/выход, равна

$$G(\theta_n, z) = \frac{u(z)}{w(z)} = \frac{G_R(z)}{1 + G_R(z) G_P(\theta_n, z)}. \quad (10.1-2)$$

Предположим теперь, что параметры объекта изменились на бесконечно малую величину $d\theta$. Дифференцируя передаточную функцию для системы с обратной связью по вектору параметров объекта, получим

$$\left. \frac{\partial G_w(\theta_n, z)}{\partial \theta} \right|_R = \frac{G_R(z)}{[1 + G_R(z) G_P(\theta_n, z)]^2} \frac{\partial G_P(\theta_n, z)}{\partial \theta}. \quad (10.1-3)$$

Аналогично поступим и для системы с прямой связью:

$$\left. \frac{\partial G_w(\theta_n, z)}{\partial \theta} \right|_S = G_S(\theta_n, z) \frac{\partial G_P(\theta_n, z)}{\partial \theta} = \frac{G_R(z)}{1 + G_R(z) G_P(\theta_n, z)} \frac{\partial G_P(\theta_n, z)}{\partial \theta}. \quad (10.1-4)$$

Учитывая, что для обеих систем

$$\frac{\partial y(z)}{\partial \theta} = \frac{\partial G_w(\theta_n, z)}{\partial \theta} w(z), \quad (10.1-5)$$

получим следующее соотношение:

$$\left. \frac{\partial y(z)}{\partial \theta} \right|_R = R(\theta_n, z) \left. \frac{\partial y(z)}{\partial \theta} \right|_S, \quad (10.1-6)$$

где

$$R(\theta_n, z) = \frac{1}{1 + G_R(z) G_P(\theta_n, z)}. \quad (10.1-7)$$

Коэффициент $R(\theta_n, z)$ называется динамическим показателем управления. Частная производная $\partial y/\partial \theta$ определяет *параметрическую чувствительность* выходной переменной y . Как видно из уравнения (10.1-6), относительная чувствительность к изменению параметров объекта для обеих рассматриваемых структур систем управления зависит от частоты ω сигнала задающей переменной $w(k)$. Если $|R(z)| < 1$, то система с обратной связью оказывается менее чувствительной к изменению параметров объекта, чем система с прямой связью, однако при $|R(z)| > 1$ справедливо обратное. Тем не менее в общем случае системы с обратной связью рассчитываются так, что в существенном диапазоне частот ($0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$) для получения хорошего качества управления величина $|R(z)|$ должна быть меньше единицы. Поэтому в большинстве случаев параметрическая чувствительность систем с обратной связью оказывается меньшей, чем чувствительность систем с прямой связью. Параметрическая чувствительность возрастает с увеличением частоты задающего сигнала и, следовательно, принимает минимальное значение при $\omega = 0$, т. е. в установившемся состоянии.

Коэффициент чувствительности рассмотренных систем к изменению параметров объекта и коэффициент влияния возмущения $n(k)$ на выходную переменную $y(k)$ описывается одним и тем же уравнением:

$$\left. \frac{y(z)}{n(z)} \right|_R = R(z) \left. \frac{y(z)}{n(z)} \right|_S. \quad (10.1-8)$$

Из уравнений (10.1-3) и (10.1-1) следует, что для систем с обратной связью выполняется соотношение

$$\frac{dG_w(\theta_n, z)}{G_w(\theta_n, z)} = S(\theta_n, z) \frac{dG_P(\theta_n, z)}{G_P(\theta_n, z)}, \quad (10.1-9)$$

где *функция чувствительности* $S(\theta_n, z)$ описывается передаточной функцией

$$S(\theta_n, z) = R(\theta_n, z) = \frac{1}{1 + G_R(z) G_P(\theta_n, z)}. \quad (10.1-10)$$

Эта функция чувствительности показывает, как относительное изменение поведения замкнутой системы по входу/выходу зависит от изменения передаточной функции объекта. Поскольку эта функция совпадает с коэффициентом параметрической чувствительности

рассмотренных систем, замечания, сделанные ранее, могут быть также отнесены и к функции чувствительности.

Функцию чувствительности можно также использовать в случае непараметрических моделей. Меньшей чувствительности поведения замкнутой системы к изменению параметров можно добиться, выбирая малую величину динамического показателя управления $|R_n(\theta_n, z)|$ в существенном диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$ для внешних возбуждающих сигналов $p(z)$ или $u_w(z) = G_R(z)G_P(z)w(z)$. Заметим, что параметрическая чувствительность выходной переменной и функция чувствительности после их обратного преобразования во временную область соответствуют временным функциям $\partial u(k)/\partial \theta$ или $s(k)$.

Для объектов, представленных в пространстве состояний уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + bu_p(k) + bu_w(k), \quad (10.1-11)$$

с регуляторами состояния вида

$$u_R(k) = -k^T x(k) \quad (10.1-12)$$

и соответствующей передаточной функцией замкнутой системы

$$G_R(z)G_P(z) = \frac{u_R(z)}{u_P(z)} = k^T[zI - A]^{-1}b \quad (10.1-13)$$

динамический показатель управления, теперь определяемый как $R'(z) = u_P(z)/u_w(z)$ при $u_P = u_R$, будет равен

$$R'(z) = \frac{u_P(z)}{u_w(z)} = \frac{1}{1 + k^T[zI - A]^{-1}b}. \quad (10.1-14)$$

В работе [10.8] на стр. 132 было показано, что уравнение (10.1-6) при подстановке $R'(z)$ вместо $R(z)$ определяет параметрическую чувствительность выходной переменной $y(k) = c^T x(k)$ разомкнутой системы с регулятором состояния. Оптимальные регуляторы состояния для непрерывных сигналов всегда характеризовались меньшей по сравнению с регуляторами с прямой связью параметрической чувствительностью во всем диапазоне частот ([10.2]; [8.4], стр. 314; [10.8], стр. 126). Регуляторы состояния с наблюдателями и дискретные регуляторы состояния этому правилу не подчиняются ([8.4], стр. 419, 520).

Функция чувствительности $S(\theta_n, z)$ из уравнения (10.1-10) служит для описания влияния относительных изменений параметров передаточной функции объекта. Абсолютные значения изменений поведения замкнутой системы при изменении параметров можно получить из уравнения (10.1-9) и соотношения $G_w = RG_R G_P$:

$$|\Delta G_w(\theta_n, z)| = |R(\theta_n, z)|^2 |G_R(z)| |\Delta G_P(\theta_n, z)|. \quad (10.1-15)$$

Как видно из последнего выражения, изменения параметров объекта $|\Delta G_p|$ связаны с изменениями в замкнутой системе $|\Delta G_w|$ коэффициентом $|R|^2 |G_R|$. Соответствующее соотношение для сигналов

$$|y(z)| = |R(z)| |p(z)| \quad (10.1-16)$$

может быть использовано для оценки качества процессов управления. Изменения $|\Delta G_w|$ связаны с $|y(z)|$ линейно:

$$|\Delta y(\theta_n, z)| = |\Delta G_w(\theta_n, z)| |w(z)|. \quad (10.1-17)$$

Умножение $|\Delta G_p|$ на коэффициент $|R|^2 |G_R|$ означает, что изменения параметров объекта $|\Delta G_p|$ оказывают существенное влияние на характеристики системы в частотных диапазонах II и III для динамического показателя управления, как показано на рис. 11.4.1. В области очень малых частот для регуляторов интегрирующего типа справедливо соотношение $|R|^2 |G_R| \approx |R|$. В этом случае влияние оказывается таким же, что и для показателя качества управления (10.1-16). Нечувствительности системы к изменениям параметров объекта можно добиться, уменьшая величину $|R(z)|$, насколько это возможно, особенно в высокочастотном диапазоне I, а также в диапазонах II и III, если спектр возмущений лежит в этой области.

Из рис. 11.4.2 и табл. 11.4.2 следует, что в системах управления с обратной связью, нечувствительных к низкочастотным возмущениям, весовой коэффициент γ при управляющей переменной должен быть большим, т. е. реализуется «жесткое» управление. Однако, если компоненты сигнала возмущения $p(k)$ близки к резонансной частоте, необходимо уменьшать резонансный пик и поэтому уменьшать γ , т. е. реализовать более «мягкое» управление. Из сказанного следует, что при синтезе нечувствительных систем управления необходимо учитывать спектр сигнала возмущения. Если рассматривать величину $|R(z)|^2$, то из рис. 11.4.2 и рис. 11.4.3 видно, что высокой чувствительностью к изменениям параметров объекта обладают следующие регуляторы: в диапазоне I — 2ПР-2; в диапазоне II — 2ПР-2, AP(ν) и РС. Малой чувствительностью в диапазоне I обладает регулятор РС, а в диапазоне II — AP($\nu+1$). Заметим, однако, что параметрически оптимизируемые и аperiодические регуляторы были синтезированы для ступенчатого изменения установившегося состояния, т. е. для малых возбуждающих воздействий в диапазонах II и III. Для ступенчатого изменения задающего сигнала $w(k)$ эти результаты в основном согласуются с результатами исследования чувствительности в разд. 11.3, в.

До сих пор мы рассматривали только некоторые коэффициенты чувствительности. Кроме них существуют следующие меры оценки чувствительности относительно заданного номинального вектора

параметров θ_n :

$$\text{Чувствительность переменных состояния (траекторий)} \quad \sigma_x = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \quad (10.1-18)$$

$$\text{Чувствительность критерия качества} \quad \sigma_I = \frac{\partial I}{\partial \theta}, \quad (10.1-19)$$

$$\text{Чувствительность собственных значений} \quad \sigma_\lambda = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta}. \quad (10.1-20)$$

Чувствительность выходных переменных определяется из чувствительности переменных состояния

$$\sigma_y = \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{c}^T \mathbf{x}] = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \mathbf{c}. \quad (10.1-21)$$

Чувствительность к изменению параметров можно учитывать при синтезе регуляторов, формируя положительно полуопределенную функцию $f(\sigma) \geq 0$ в номинальном состоянии и вводя ее в критерий качества

$$I_\sigma = I_n + f(\sigma), \quad (10.1-22)$$

который должен быть минимизирован. При использовании параметрической чувствительности критерия качества управления

$$f(\sigma) = \kappa^T \sigma_1 = \kappa^T \frac{\partial I_n}{\partial \theta}, \quad (10.1-23)$$

где элементы вектора κ^T являются весовыми коэффициентами, вместо I_n следует оптимизировать по отношению к неизвестным параметрам регулятора критерий вида

$$I_\sigma = I_n + \kappa^T \frac{\partial I_n}{\partial \theta}. \quad (10.1-24)$$

Если необходимо синтезировать нечувствительную систему управления с обратной связью для изменяющихся параметров объекта, таких, как изменение нагрузки, мощности или производительности ΔM , то нужно вычислить производную $\partial \theta / \partial M$ для $\theta = f(M)$ и оптимизировать критерий

$$I_\sigma = I_n + \bar{\kappa} \left[\frac{\partial I_n}{\partial \theta} \right]^T \left[\frac{\partial \theta}{\partial M} \right] = I_n + \bar{\kappa} \frac{\partial I_n}{\partial M}. \quad (10.1-25)$$

В результате получим зависимости, аналогичные изображенным на рис. 10.1, где показана зависимость только от коэффициента передачи K . Из рис. 10.1, а видно:

- минимуму I_n соответствует I_1 для K_1 ;
- минимуму I_σ соответствует I_2 для K_2 ;
- $K_2 < K_1$;
- менее чувствительное управление характеризуется худшим качеством: $I_2 > I_1$.

Из рис. 10.1, б следует, что

- синтез без учета чувствительности обеспечивает лучшее качество управления для $M_k < M < M_g$;
- синтез с учетом чувствительности обеспечивает лучшее качество управления только вне диапазона $M_k < M < M_g$.

Приведенный пример показывает, что синтез системы, нечувствительной к изменениям параметров объекта, нужно выполнять

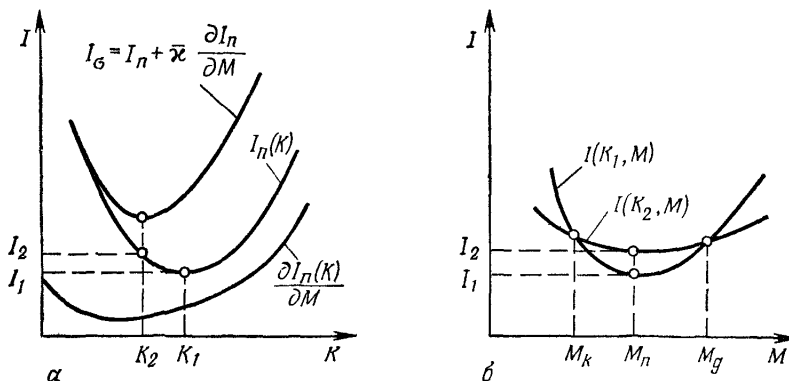


Рис. 10.1. К синтезу нечувствительных алгоритмов управления.

а — зависимость показателя качества управления I от коэффициента передачи регулятора K в номинальном режиме M_n ; б — зависимость показателя качества управления I от изменения режима M .

лишь в том случае, когда чувствительность $\partial I_n/\partial M$ управления с обратной связью высока и, следовательно, область $M_k - M_g$ относительно мала. Для оптимизации критерия I_σ в общем случае следует использовать численные методы параметрической оптимизации. Каждый из учитываемых параметров объекта и каждый шаг оптимизации требуют решения разностного уравнения. Поэтому вычислительные затраты оказываются достаточно большими даже для объектов низкого порядка.

10.2. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С БОЛЬШИМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

Применение методов теории чувствительности требует, чтобы чувствительность в заданном интервале изменения параметров изменялась незначительно. Следовательно, в этом случае можно учесть только влияние относительно малых изменений параметров объекта. Часто возникает задача синтеза регуляторов с постоянными коэффициентами для объектов с большими изменениями параметров, и как показывает практика, это оказывается возможным. Задача управления с обратной связью объектами с большими, но

медленными изменениями параметров с помощью регуляторов с постоянными параметрами была исследована в работе [8.8]. Там весь диапазон изменения параметров разбивался на ряд отрезков, для каждого из которых записывалась отдельная модель объекта. Так, для M отрезков будет получено M моделей объекта:

$$\left. \begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u_i(k), \\ y_i(k) &= C_i x_i(k). \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, M. \quad (10.2-1)$$

Для этих M различных объектов должен быть спроектирован один регулятор состояния с постоянными параметрами

$$u(k) = -\bar{K} \cdot x_1(k), \quad (10.2-2)$$

который является усредненно оптимальным. В этом случае можно использовать глобальный критерий качества

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \sum_{i=1}^M \varepsilon_i I_i, \quad 0 \leq \varepsilon_i \leq 1, \\ \sum_{i=1}^M \varepsilon_i &= 1. \end{aligned} \quad (10.2-3)$$

Здесь I_i — локальный квадратичный критерий качества, описываемый выражением

$$I_i = \sum_{k=0}^N [x_i^T(k) Q_i x_i(k) + u_i^T(k) R_i u_i(k)], \quad (10.2-4)$$

а ε_i — весовые коэффициенты критерия для различных рабочих точек или моделей объекта (10.2-1). Для непрерывных систем было доказано, что существуют регуляторы \bar{K} , обеспечивающие устойчивое поведение замкнутой системы во всех N рабочих точках. На наглядном примере объекта с матрицами параметров \bar{A} , \bar{B} и \bar{C} был рассчитан регулятор с постоянными параметрами, который был усредненно оптимальным по отношению к критерию (10.2-3). Для этого было необходимо решить M матричных уравнений Риккати. В последнее время рассмотренная задача решается с помощью так называемых «робастных» регуляторов.

Сравнительный анализ регуляторов для детерминированных возмущений

В конце части II книги исследуются сравнительные характеристики различных методов синтеза и соответствующих регуляторов или алгоритмов управления для линейных объектов с запаздыванием и без него. В разд. 11.1 сравниваются структуры регуляторов, и в частности нули и полюса замкнутых систем. Затем рассмотрены количественные оценки качества процессов управления двумя тестовыми объектами с различными регуляторами (разд. 11.2 и 11.3). Динамические показатели управления для различных регуляторов сравниваются в разд. 11.4. Наконец, в разд. 11.5 содержатся рекомендации по применению различных алгоритмов управления.

11.1. СРАВНЕНИЕ СТРУКТУР РЕГУЛЯТОРОВ: ПОЛЮСА И НУЛИ

Обобщенный линейный регулятор с передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu}} \quad (11.1-1)$$

и некоторые параметрически оптимизируемые регуляторы низкого порядка, компенсационные, апериодические и регуляторы-предикторы могут быть отнесены к классу *регуляторов входа/выхода* в противоположность регуляторам состояния. С учетом передаточных функций объекта управления

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d} \quad (11.1-2)$$

и регулятора (11.1-1) можно определить передаточную функцию замкнутой системы по задающему входному сигналу

$$G_w(z) = \frac{y(z)}{w(z)} = \frac{G_R(z) G_P(z)}{1 + G_R(z) G_P(z)} = \frac{Q(z^{-1}) B(z^{-1}) z^{-d}}{P(z^{-1}) A(z^{-1}) + Q(z^{-1}) B(z^{-1}) z^{-d}} \quad (11.1-3)$$

и следующие передаточные функции замкнутой системы (см. рис. 5.2.1):

$$G_n(z) = \frac{y(z)}{n(z)} = \frac{1}{1 + G_R(z) G_P(z)} = \frac{P(z^{-1}) A(z^{-1})}{P(z^{-1}) A(z^{-1}) + Q(z^{-1}) B(z^{-1}) z^{-d}}, \quad (11.1-4)$$

$$G_u(z) = \frac{y(z)}{u_v(z)} = \frac{G_P(z)}{1 + G_R(z) G_P(z)} = \frac{P(z^{-1}) B(z^{-1}) z^{-d}}{P(z^{-1}) A(z^{-1}) + Q(z^{-1}) B(z^{-1}) z^{-d}}. \quad (11.1-5)$$

В общем виде эти передаточные функции могут быть записаны в следующей форме:

$$G_*(z) = \frac{\mathcal{B}_*(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} = \frac{[\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_l z^{-l}]_*,}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_l z^{-l}}, \quad (11.1-6)$$

где символ * соответствует w, n или u. Порядок передаточной функции l определяется соотношением

$$l = \max [m + \mu; m + d + \nu]. \quad (11.1-7)$$

Рассмотрим теперь порядки ν и μ различных регуляторов и распределение полюсов и нулей введенных выше передаточных функций замкнутых систем. Для этого представим полиномы числителя и знаменателя $G_*(z)$ в виде суммы положительных степеней z^0, z^1, z^2, \dots . Записав передаточную функцию регулятора

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad (11.1-8)$$

и объекта управления [см. уравнение (6-9)]

$$G_P(z) = \frac{B_0(z)}{A_0(z) z^d}, \quad (11.1-9)$$

получим обобщенную передаточную функцию

$$G_*(z) = \frac{\mathcal{B}_*(z)}{\mathcal{A}(z)}, \quad (11.1-10)$$

характеристическое уравнение которой для замкнутой системы будет равно

$$\mathcal{A}(z) = P(z) A_0(z) z^d + Q(z) B_0(z) = (z - z_{\alpha 1})(z - z_{\alpha 2}) \dots (z - z_{\alpha l}) = 0. \quad (11.1-11)$$

Здесь $z_{\alpha i}$ — полюса замкнутой системы. Нули передаточных функций $G_*(z)$ определяются из полиномов числителя

$$\mathcal{B}_*(z) = (z - z_{\beta 1})(z - z_{\beta 2}) \dots (z - z_{\beta s}) = 0, \quad (11.1-12)$$

которые для различных входных сигналов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B}_w(z) &= Q(z) B_0(z) = 0, \\ \mathcal{B}_n(z) &= P(z) A_0(z) z^d = 0, \\ \mathcal{B}_n(z) &= P(z) B_0(z) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.1-13)$$

Как видно из (11.1-13), нули системы зависят от точки приложения входных воздействий.

В следующем разделе рассмотрено наличие и распределение полюсов и нулей различных замкнутых систем и регуляторов. Это же сделано и для регуляторов состояния. Поскольку обобщенные линейные регуляторы допускают большую свободу в задании полюсов, по крайней мере по сравнению с другими регуляторами входа/выхода, описанными здесь, они рассмотрены первыми.

11.1.1. Обобщенные линейные регуляторы с заданным расположением полюсов

Если полюса $z_{\alpha i}$ знаменателя передаточной функции замкнутой системы

$$\mathcal{A}(z) = (z - z_{\alpha 1})(z - z_{\alpha 2}) \dots (z - z_{\alpha l}) = 0 \quad (11.1-14)$$

или соответствующего характеристического уравнения

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_l z^{-l} = 0 \quad (11.1-15)$$

заданы, то параметры регулятора можно определить, приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях z^{-i} в уравнении

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = (1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu})(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) + (q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu})(z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) z^{-d} = 0 \quad (11.1-16)$$

и в уравнении (11.1-15). Для устранения статических ошибок следует выбирать значение $G_w(1)$ равным единице. Из уравнения (11.1-3) следует, что $P(1)A(1) = 0$, и это условие справедливо, если

$$\sum_{i=1}^{\mu} p_i = -1. \quad (11.1-17)$$

Для определения $(\mu + \nu + 1)$ параметров регулятора есть $(l + 1)$ уравнений. Следовательно, для их однозначного определения необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\mu + \nu + 1 = l + 1. \quad (11.1-18)$$

При рассмотрении уравнения (11.1-7) можно выделить два случая:

а) $\mu \geq \nu + d \rightarrow l = m + \mu.$

Из уравнения (11.1-18) следует, что $\nu = m$. Следовательно, $\mu \geq m + d$.

б) $\mu \leq \nu + d \rightarrow l = m + d + \nu.$

Из уравнения (11.1-18) следует, что $\mu = m + d$. Следовательно, $\nu \geq m$.

Если выбрать наименьшие возможные порядки числителя и знаменателя передаточной функции регулятора

$$\nu = m \text{ и } \mu = m + d, \quad (11.1-19)$$

то во всех случаях параметры регулятора могут быть определены единственным образом. На основании уравнений (11.1-16) и (11.1-17)

11.1.2. Параметрически оптимизируемые регуляторы низкого порядка

При расчете параметрически оптимизируемых регуляторов низкого порядка, например ПИД-регулятора ЗПР-3 с передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

следует помнить, что в противоположность обобщенному параметрически оптимизируемому регулятору (11.1-1) в этом случае число полюсов составляет $l = m + d + 2$, а число настраиваемых параметров равно трем. Поэтому коэффициенты характеристического уравнения для объектов порядка $m > 1 - d$ оказываются зависимыми. Более того, нули передаточных функций $G_n(z)$ и $G_u(z)$ определяются свойствами объекта управления и полюсом регулятора $z = 1$, как это видно из уравнения (11.1-13). Следовательно, только часть нулей $G_w(z)$ зависит от параметров регулятора.

11.1.3. Обобщенный компенсационный регулятор

В гл. 6 было показано, что характеристическое уравнение компенсационного регулятора при задании желаемой передаточной функции замкнутой системы $G_w(z)$ в соответствии с уравнением (6-4) записывается в виде

$$A(z) = A_0(z) z^d B(z) + [A(z) z^d B_0(z) - A_0(z) z^d B(z)] G_w(z) = 0. \quad (11.1-22)$$

Для приближенного соответствия объекта и его модели можно считать, что $G_w(z) = \mathcal{B}_{w0}(z) / \mathcal{A}_{w0}(z)$, т. е.

$$A_0(z) z^d B(z) \mathcal{A}_{w0}(z) = 0. \quad (11.1-23)$$

Поэтому обобщенный компенсационный регулятор может применяться только для объектов, нули и полюса которых расположены на плоскости z внутри окружности единичного радиуса. В частных случаях эти условия могут не выполняться, например для апериодических регуляторов и регуляторов-предикторов.

11.1.4. Аперриодический регулятор

Аперриодический регулятор АР(ν) описывается передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d}}$$

[см. уравнение (7.1-22)]. Умножая числитель и знаменатель на $z^{(m+d)}$, получим

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_0 A(z) z^d}{z^{m+d} - q_0 B(z)}. \quad (11.1-24)$$

В последней передаточной функции $A(z)z^d$ и $B(z)$ являются полиномами модели объекта. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\mathcal{A}(z) = z^{(m+d)} A_0(z) z^d - q_0 A_0(z) z^d B(z) + q_0 A(z) z^d B_0(z) = 0. \quad (11.1-25)$$

Если объект и его модель приближенно совпадают, т. е. $A(z)z^d \approx A_0(z)z^d$ и $B(z) \approx B_0(z)$, то из (11.1-25) получим

$$\mathcal{A}(z) \approx z^{(m+d)} A_0(z) z^d = 0. \quad (11.1-26)$$

Нули передаточных функций определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B}_w(z) &= q_0 A(z) z^d B_0(z) = 0, \\ \mathcal{B}_n(z) &= [z^{(m+d)} - q_0 B(z)] A_0(z) z^d = 0, \\ \mathcal{B}_u(z) &= [z^{(m+d)} - q_0 B(z)] B_0(z) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.1-27)$$

Используя уравнение (11.1-26), получим передаточные функции

$$\begin{aligned} G_w(z) &= \frac{q_0 B_0(z) A(z) z^d}{z^{(m+d)} A_0(z) z^d} = \frac{q_0 B_0(z) A(z)}{z^{(m+d)} A_0(z)}, \\ G_n(z) &= \frac{[z^{(m+d)} - q_0 B(z)] A_0(z) z^d}{z^{(m+d)} A_0(z) z^d} = \frac{[z^{(m+d)} - q_0 B(z)]}{z^{(m+d)}} = \frac{P(z)}{z^{(m+d)}}, \\ G_u(z) &= \frac{[z^{(m+d)} - q_0 B(z)] B_0(z)}{z^{(m+d)} A_0(z) z^d} = \frac{P(z)}{z^{(m+d)}} G_p(z). \end{aligned} \quad (11.1-28)$$

Если модель и объект совпадают точно, т. е. $A(z) = A_0(z)$ и $B(z) = B_0(z)$, то полином $A_0(z)$ в передаточной функции $G_w(z)$ сокращается, так что

$$G_w(z) = \frac{q_0 B_0(z)}{z^{(m+d)}}, \quad (11.1-29)$$

$$\mathcal{A}(z) = 1 + G_R(z) G_P(z) = z^{(m+d)} = 0. \quad (11.1-30)$$

Таким образом, конечное время установления в системе достигается только при точном совпадении модели объекта с самим объектом. Если такое совпадение отсутствует, то помимо процесса $z^{(m+d)}$ возникают свободные колебания, задержанные на величину $A_0(z)z^d$, как это следует из уравнения (11.1-26). Следовательно, аperiodические регуляторы могут быть использованы только для объектов, полюса которых расположены внутри единичного круга на плоскости z вблизи начала координат, т. е. для хорошо задемпфированных асимптотически устойчивых объектов. Нули передаточной функции замкнутой системы в основном определяются нулями объекта. Как видно из уравнения (11.1-25), разности $\Delta B(z) = B(z) - B_0(z)$ между полиномами числителей объекта и его модели влияют на вид характеристического уравнения (при $A(z) = A_0(z)$):

$$\mathcal{A}(z) = A_0(z) z^d [z^{(m+d)} - q_0 \Delta B(z)] = 0. \quad (11.1-31)$$

Малые изменения $\Delta B(z)$ мало влияют на устойчивость системы. Следовательно, нули объекта могут располагаться вне единичной окружности на плоскости z , поскольку в случае аperiodических регуляторов они не компенсируются.

11.1.5. Регулятор-предиктор

Передаточная функция регулятора-предиктора задается уравнением (9.2-2)

$$G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})}{K_P A(z^{-1}) - B(z^{-1})z^{-d}}$$

или

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{A(z)z^d}{K_P A(z)z^d - B(z)}, \quad (11.1-32)$$

а соответствующее характеристическое уравнение (11.1-11) этого регулятора есть

$$\mathcal{A}(z) = K_P A(z)z^d A_0(z)z^d - A_0(z)B(z)z^d + A(z)B_0(z)z^d = 0. \quad (11.1-33)$$

Если объект управления и его модель приближенно соответствуют друг другу, то

$$\mathcal{A}(z) \approx K_P A(z)z^d A_0(z)z^d = 0. \quad (11.1-34)$$

Дискретные передаточные функции по различным внешним воздействиям имеют вид

$$\left. \begin{aligned} G_w(z) &= \frac{B_0(z)}{K_P A_0(z)z^d}, \\ G_n(z) &= \frac{[K_P A(z)z^d - B(z)]}{K_P A(z)z^d} = \frac{P(z)}{K_P A(z)z^d}, \\ G_u(z) &= G_n(z) G_P(z). \end{aligned} \right\} \quad (11.1-35)$$

В передаточных функциях $G_w(z)$ или $G_n(z)$ полюса полиномов $A(z)z^d$ или $A_0(z)z^d$ всегда компенсируются соответствующими нулями. Замкнутые системы с регуляторами-предикторами устойчивы только тогда, когда объекты являются асимптотически устойчивыми, как это видно из уравнения (11.1-34). Следовательно, нули объекта могут лежать вне единичной окружности на плоскости z . Нули замкнутой системы определяются нулями объекта только для задающего входного сигнала. Если полюса объекта лежат вблизи начала координат плоскости z , то небольшие значения разностей $\Delta B(z) = B(z) - B_0(z)$ не влияют на устойчивость системы, как это следует из уравнения (11.1-33).

11.1.6. Регулятор состояния

Для простой системы с управлением по состоянию с одной регулируемой и одной управляющей переменными и регулятором $u(k) = -k^T x(k)$ при отсутствии внешних возмущений можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= [A - bk^T] x(k), \\ y(k) &= c^T x(k). \end{aligned} \quad (11.1-36)$$

Подадим на эту систему управления внешний сигнал возмущения $v(k)$:

$$x(k+1) = [A - bk^T] x(k) + fv(k). \quad (11.1-37)$$

Если $f = b$, то возмущение приложено ко входу объекта. При соответствующем выборе вектора f можно подать возмущение на все переменные состояния.

Передаточная функция изолированного объекта, как это следует из уравнения (3.2-50), равна

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = c^T [zI - A]^{-1} b = \frac{b_m + \dots + b_1 z^m}{a_m + \dots + z^m} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (11.1-38)$$

Поэтому передаточная функция замкнутой системы управления по состоянию имеет вид

$$\begin{aligned} G_V(z) &= \frac{y(z)}{v(z)} = c^T [zI - A + bk^T]^{-1} f = \\ &= c^T \frac{\text{adj}[zI - A + bk^T]}{\det[zI - A + bk^T]} f = \frac{\mathcal{B}(z)}{\mathcal{A}(z)}. \end{aligned} \quad (11.1-39)$$

На основании уравнения (8.3-8) получим характеристическое уравнение системы

$$\mathcal{A}(z) = (a_m + k_m) + (a_{m-1} + k_{m-1})z + \dots + z^m = \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \dots + z^m = 0. \quad (11.1-40)$$

Выбирая необходимые значения k_i , можно получить произвольные коэффициенты α_i для произвольных коэффициентов a_i . Таким образом можно сделать устойчивыми неустойчивые объекты. Если возмущение приложено к входу объекта управления, т. е. $f = b$, то нули передаточной функции $G_V(z)$, определяемые из выражения

$$\mathcal{B}(z) = c^T \text{adj}[zI - A + bk^T] b, \quad (11.1-41)$$

остаются равными нулям объекта [см. уравнения (11.1-38) и (11.1-39)]. Это происходит потому, что коэффициенты полиномов числителя $\mathcal{B}(z) = B(z)$ входят либо в вектор c , либо в вектор b , что зависит от использованной канонической формы представления в пространстве состояний. Если же возмущение v воздействует только на одну переменную состояния, то нули передаточной функции $G_V(z)$ также зависят от параметров регулятора состояния.

Пример. Порядок объекта, представленного в канонической форме управляемости, $m=2$. В этом случае

$$\mathcal{B}(z) = [b_2 b_1] \begin{bmatrix} z + (a_1 + k_1) & 1 \\ - (a_2 + k_2) & z \end{bmatrix} \mathbf{f}.$$

Отсюда следует, что при $\mathbf{f}^T = \mathbf{b}^T = [0 \ 1]$

$$\mathcal{B}(z) = b_1 z + b_2 = V(z),$$

и, следовательно, при $\mathbf{f}^T = [1 \ 0]$ выражение для полинома числителя передаточной функции объекта будет иметь вид

$$\mathcal{B}(z) = b_2(z) + [b_2(a_1 + k_1) - b_1(a_2 + k_2)]$$

Как видно, в последнем случае полюса закона управления влияют на величину нулей.

Вопрос о полюсах систем с регуляторами состояния и наблюдателями был рассмотрен в разд. 8.7. Использование наблюдателей приводит к появлению дополнительных нулей и полюсов в системе [см. уравнения (8.7-7), (8.7-18) и (8.7-19)]. Только в том случае, когда внешние возмущения могут быть точно измерены и непосредственно использованы в наблюдателе, а модель точно соответствует объекту, наблюдатель не вносит дополнительных полюсов, для которых $\Delta e(k) = 0$ (см. рис. 8.7.1). Если при этом возмущение приложено к входу объекта, нули также не изменятся и поэтому $\mathcal{B}(z) = V(z)$.

В табл. 11.1.1 приведены наиболее важные структурные свойства различных регуляторов для объекта $V(z^{-1})z^{-d}/A(z^{-1})$. *Регуляторы входа/выхода* имеют порядки $\nu \geq m$ и $\mu \geq m + d$, если они являются структурно оптимизированными по отношению к объекту. Порядки характеристических уравнений и, следовательно, число полюсов для разных регуляторов различны. Наименьшее число полюсов равно $(m + d)$ для точно настроенного апериодического регулятора. Во всех случаях нули объекта являются нулями передаточных функций $G_w(z)$ и $G_u(z)$. Далее, полюса регуляторов $P(z) = 0$ становятся нулями передаточных функций $G_n(z)$ и $G_u(z)$. Для линейных объектов в общем случае пригодны обобщенные линейные и параметрически оптимизируемые регуляторы. Апериодические регуляторы и регуляторы-предикторы могут использоваться только для объектов, полюса которых лежат внутри окружности единичного радиуса на плоскости z , а обобщенные компенсационные регуляторы — только для объектов, полюса и нули которых расположены внутри единичной окружности. Для *регуляторов состояния* без наблюдателей вектор обратных связей \mathbf{k}^T имеет порядок не меньший, чем $(m + d)$. Порядок соответствующих характеристических уравнений также равен $(m + d)$ и является наименьшим по сравнению с другими регуляторами входа/выхода, за исключением апериодических регуляторов. Это преимущество, однако, не реализуется, если необходимо использовать наблюдатель. Регуляторы состояния применимы к весьма широкому классу объектов управления.

Таблица 11.1.1

Структурные характеристики различных детерминированных регуляторов $GR(z) = Q(z^{-1})/P(z^{-1})$.
 $A^-(z)$ — полюса объекта вблизи или вне единичной окружности; $B^-(z)$ — нули объекта вблизи или вне единичной окружности; $*$ — при точном соответствии модели и объекта

Тип регулятора	Обозначение	Порядок регулятора		Нули $\mathcal{B}^*(z)$			Возможность возникновения неустойчивости		
		$Q(z^{-1})$	$P(z^{-1})$	хар. ур-ния	$G_w(z)$	$G_n(z)$	$G_c(z)$	$A^-(z)$	$B^-(z)$
				$\mathcal{A}(z) = 0^*$					
Регуляторы вход/выход	Обобщенный линейный регулятор	m	$m+d$	$2m+d$	QB	PAz ^d	PB	Нет	Нет
	Параметрически оптим. регулятор низкого порядка	2	1	$m+d+2$	QB	PAz ^d	PB	Нет	Нет
	Обобщенный компенсационный регулятор	$\geq m+1$	$\geq m+d+1$	$\geq 2m+d$	QB	PAz ^d	PB	Да	Да
	Апериодический	m	$m+d$	$m+d$	q ₀ B	P	PB	Да	Нет
	Регулятор-предиктор	m	$m+d$	$m+d$ или $2(m+d)$	B	P	PB	Да	Нет
Регуляторы состояния	Регулятор состояния без наблюдателя	—	—	$m+d$	—	—	B	Нет	Нет
	Регулятор состояния с наблюдателем	—	—	$2(m+d)$	Задается объектом, регулятором и наблюдателем		Нет	Нет	Нет

11.2. СРАВНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА

В предыдущем разделе были рассмотрены структурные особенности регуляторов разного типа. Здесь будет проведено сравнение показателей качества управления наиболее важных типов регуляторов. Под качеством будем подразумевать следующее: непосредственно качество процессов управления и требуемые затраты на управление; чувствительность к неточности задания модели объекта; вычислительные затраты на один такт квантования и на расчеты при проведении синтеза. Поскольку количественное сравнение показателей невозможно без конкретных параметров систем, будем использовать два объекта, описанных в разд. 5.4.1 и Приложении:

Объект II: второй порядок, неминимально-фазовая характеристика,

$$T_0 = 2 \text{ с};$$

Объект III: третий порядок с запаздыванием, характеристика низкочастотного фильтра,

$$T_0 = 4 \text{ с}.$$

Сравниваются характеристики следующих алгоритмов управления:

А. Параметрически оптимизируемые алгоритмы управления низкого порядка:

$$\left. \begin{array}{l} 2\text{ПР-2, ПИ-типа с заданным начальным значением} \\ \text{управляющей переменной;} \\ 2\text{ПР-1, ПИ-типа с заданным начальным значением} \\ \text{управляющей переменной;} \\ 3\text{ПР-3, ПИД-типа с заданным начальным значением} \\ \text{управляющей переменной;} \\ 3\text{ПР-2, ПИД-типа с заданным начальным значением} \\ \text{управляющей переменной.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (5.2-19) \\ (5.2-10) \end{array}$$

Б. Алгоритмы управления с конечным временем установления (апериодические):

$$\text{АР}(v), v\text{-го порядка с заданным начальным значением управляющей переменной;} \quad (7.1-21)$$

$$\text{АР}(v+1), (v+1)\text{-го порядка с заданным начальным значением управляющей переменной.} \quad (7.2-11)$$

В. Регуляторы состояния для внешних возмущений с наблюдателями:

$$\left. \begin{array}{l} \text{РС-1, малый весовой коэффициент } \gamma \text{ при управ-} \\ \text{ляющей переменной;} \\ \text{РС-2, большой весовой коэффициент } \gamma \text{ при управ-} \\ \text{ляющей переменной.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (8.7-9, 10), \\ (\text{рис. 8.7.5}) \end{array}$$

Алгоритмы управления исследуются на примере системы с одним входом и одним выходом, изображенной на рис. 5.2.1. Подробное сравнение будет проведено по отношению к синтезу алгоритмов управления с помощью самого управляющего вычислителя [8.5].

Поскольку управляющий вычислитель часто может использоваться одновременно для решения ряда задач, следует стремиться к предельному сокращению времени синтеза алгоритмов управления. Кроме того, требуемый объем оперативной памяти не должен быть слишком велик, так как в качестве управляющих вычислителей применяют малые вычислительные машины и микро-ЭВМ. Еще одним характерным параметром являются вычислительные затраты на обсчет алгоритмов управления между тактами квантования. Таким образом, не только вычислительные затраты на синтез алгоритмов, но и объем необходимых вычислений в процессе работы систем управления следует рассматривать в тесной связи с характерными показателями, например, такими, как качество управления, требуемые затраты на управление, заданный диапазон управляющих сигналов, чувствительность к неточному заданию модели и изменениям параметров объекта.

Для сравнения качества управления используются следующие показатели:

- среднеквадратичная ошибка управления

$$S_e = \sqrt{\overline{e^2(k)}} = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M e^2(k)}, \quad M = 63; \quad (11.2-1)$$

- среднеквадратичное изменение управляющей переменной (затраты на управление)

$$S_u = \sqrt{\overline{u^2(k)}} = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \Delta u^2(k)}, \quad (11.2-2)$$

- значение квадратичного критерия качества (5.2-6) для $\gamma = 0,1$ и $\gamma = 0,25$;

- перегулирование

$$y_m = y_{\max}(k) - w(k), \quad (11.2-3)$$

- время установления выходной координаты k_g

$$\text{для } |e(k)| \leq 0,03 |w(\infty)|$$

$$\text{или } |e(k)| \leq 0,03 |v(\infty)|.$$

- начальное значение управляющей переменной $u(0)$ при ступенчатом изменении сигнала $w(0)$;

- чувствительность к неточности параметров модели объекта

$$\varepsilon_1 = \sigma_{\delta_y} / \sigma_{\delta_g}. \quad (11.2-4)$$

Об этой величине будет сказано в разд. 11.3.

Для оценки вычислительных затрат между тактами используются следующие параметры:

- число операций типа сложения — l_{add} ;
- число операций типа умножения — l_{mult} ;
- общее число операций — $l_{\Sigma} = l_{\text{add}} + l_{\text{mult}}$.

11.3. СРАВНЕНИЕ КАЧЕСТВА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Алгоритмы управления, рассматриваемые в этой главе, были синтезированы для ступенчатого изменения задающего сигнала $w(k)$ в установившемся состоянии. Это также соответствует ступенчатому изменению сигнала возмущения $p(k)$ на выходе объекта. Результирующий частотный спектр при таком входном сигнале содержит более высокочастотные компоненты по сравнению с ди-

Таблица 11.3.1

Параметры исследуемых алгоритмов управления

Параметры	Объект II				Объект III			
	Алгоритм управления							
	2ПР-1	2ПР-2	3ПР-2	3ПР-3	2ПР-1	2ПР-2	3ПР-2	3ПР-3
q_0	2,00	1,364	2,00	3,485	2,00	1,615	2,00	4,562
q_1	-1,886	-1,229	-2,596	-5,433	-1,802	-1,405	-2,400	-7,200
q_2	0	0	0,753	2,150	0	0	0,649	3,033
K	2,00	1,364	1,247	1,335	2,00	1,615	1,351	1,534
e_D	0,0	0,0	0,604	1,610	0,0	0,0	0,480	1,977
c_1	0,057	0,099	0,126	0,151	0,099	0,129	0,184	0,257
	AP ($v+1$)		AP (v)		AP ($v+1$)		AP (v)	
q_0	5,840		14,084		3,810		9,523	
q_1	-0,078		-20,070		-0,001		-14,285	
q_2	-8,851		6,985		-5,884		6,714	
q_3	4,089		-		3,647		-0,952	
q_4	-		-		0,571		-	
p_1	-0,595		-1,436		0		0	
p_2	0,169		2,436		0,247		0,619	
p_3	1,426		-		0,554		0,457	
p_4	-		-		0,244		-0,076	
p_5	-		-		-0,046		-	
	PC (1)		PC (2)		PC (1)		PC (2)	
k_1	4,157		2,398		4,828		2,526	
k_2	3,441		1,983		5,029		2,445	
k_3	1,0		1,0		4,475		2,097	
k_4	-		-		0,532		0,263	
k_5	-		-		1,532		1,263	

намикой объекта. Поведение системы исследуется также по отношению к ступенчатому изменению возмущения $v(k)$ на входе объекта. Влияние весового коэффициента γ рассматривается отдельно. Значение γ в квадратичном критерии качества (5.2-6) для параметрически оптимизируемых алгоритмов управления типа 2ПР-2 и 3ПР-3 выбрано равным нулю, поскольку это позволяет расширить диапазон изменения управляющей переменной. Для алгоритмов управления 2ПР-1 и 3ПР-2 также принято, что весовой коэффициент γ равен нулю, а первое значение управляющей переменной $u(0)$ выбрано таким, что $u(1) \approx u(0)$ [см. уравнение (5.2-31)]. Это позволяет получить относительно малые значения отклонений управляющей переменной. При синтезе регуляторов состояния вид весовой матрицы \mathbf{Q} выбирался так, чтобы сформировать критерий качества вида (5.2-6). При синтезе было задано $\mathbf{R} = \gamma$, чтобы получить то же начальное значение управляющей переменной $u(0)$, что и для алгоритмов 3ПР-3 и 2ПР-2, в результате чего оказывается возможным их непосредственное сравнение. На начальное значение управляющей переменной $u(0)$ аperiodического алгоритма управления AP ($v+1$) было наложено условие $u(0) = u(1)$ для того, чтобы минимизировать отклонения управляющей переменной. Соответствующие показатели всех алгоритмов сведены в табл. 11.3.1.

Переходные процессы по регулируемой и управляющей переменным приведены на рис. 11.3.1 и 11.3.2 для трех наиболее эффективных алгоритмов управления объектами II и III при ступенчатом изменении задающего сигнала в установившемся состоянии. На рис. 11.3.3 представлены графические зависимости показателей, перечисленных в разд. 11.2, для объекта II (\square) и объекта III (\circ) при ступенчатом изменении $w(k)$ в установившемся состоянии (левая сторона) и ступенчатом изменении $v(k)$ (правая сторона). На этих рисунках приведены различные характеристики простых алгоритмов управления (для рассматриваемых объектов).

*а) Ступенчатое изменение $w(k)$
в установившемся состоянии*

При ступенчатом изменении задающего сигнала в установившемся состоянии (т. е. для того случая, по отношению к которому выполнялся синтез) наиболее важные выводы приведены ниже.

Объект III (низкочастотный фильтр)

3ПР-3 (ПИД-типа)

Выбор $\gamma = 0$ приводит к большому значению $u(0)$ и к большим колебаниям переходного процесса. Значение среднеквадратичной ошибки управления S_e относительно велико. Перерегулирование U_m и время установления k_s имеют среднее значение.

3ПР-2 (ПИД-типа, с заданным начальным значением управляющей переменной)

Объект II

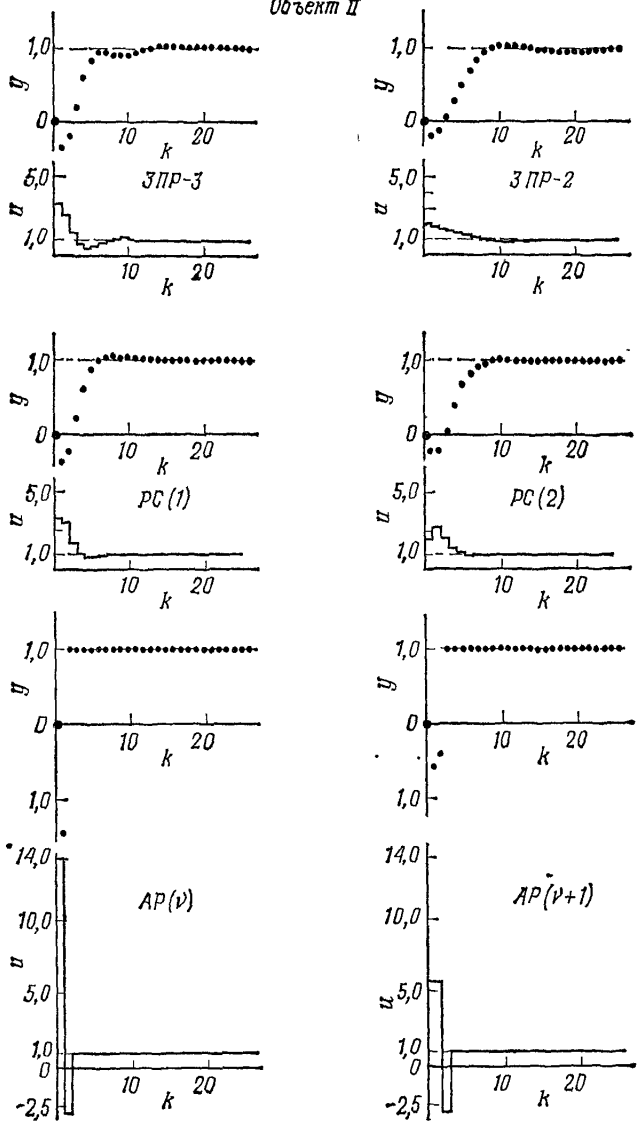


Рис. 11.3.1. Переходные процессы по регулируемой и управляющей переменным в системах с различными алгоритмами управления и объектом II с неминимально-фазовой характеристикой.

Объект III

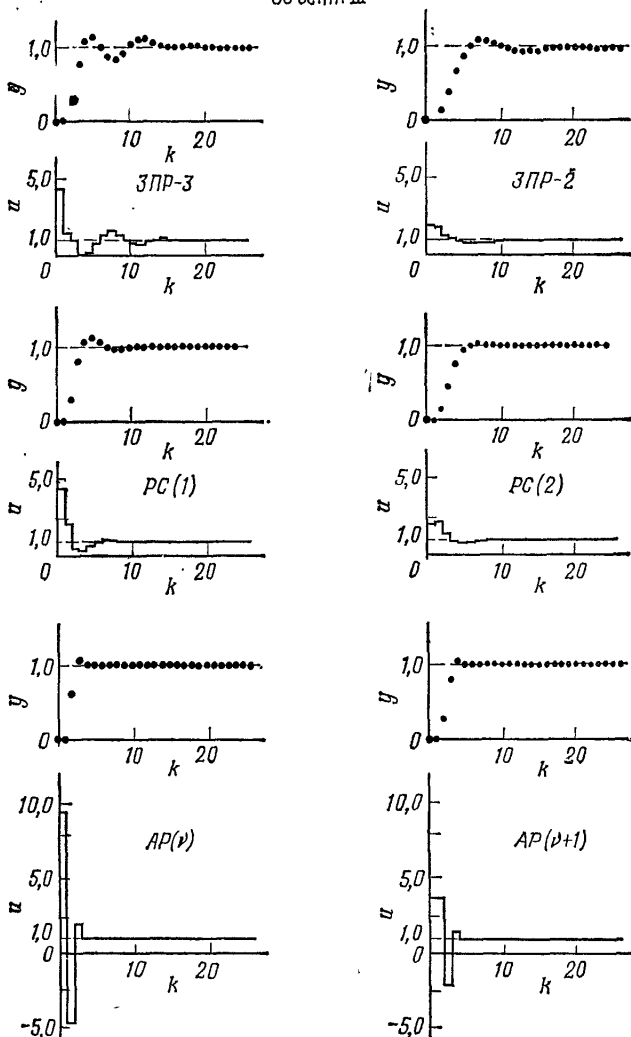


Рис. 11.3.2. Переходные процессы по регулируемой и управляющей переменным в системах с различными алгоритмами управления и низкочастотным объектом III.

Задание относительно малого начального значения управляющей переменной $u(0)$ приводит к значительно менее колебательному по сравнению с ЗПР-3 переходному процессу, несколько большему значению S_e при существенно меньшем значении S_u , меньшей величине u_m и несколько меньшей величине k_3 .

2ПР-2 (ПИ-типа)

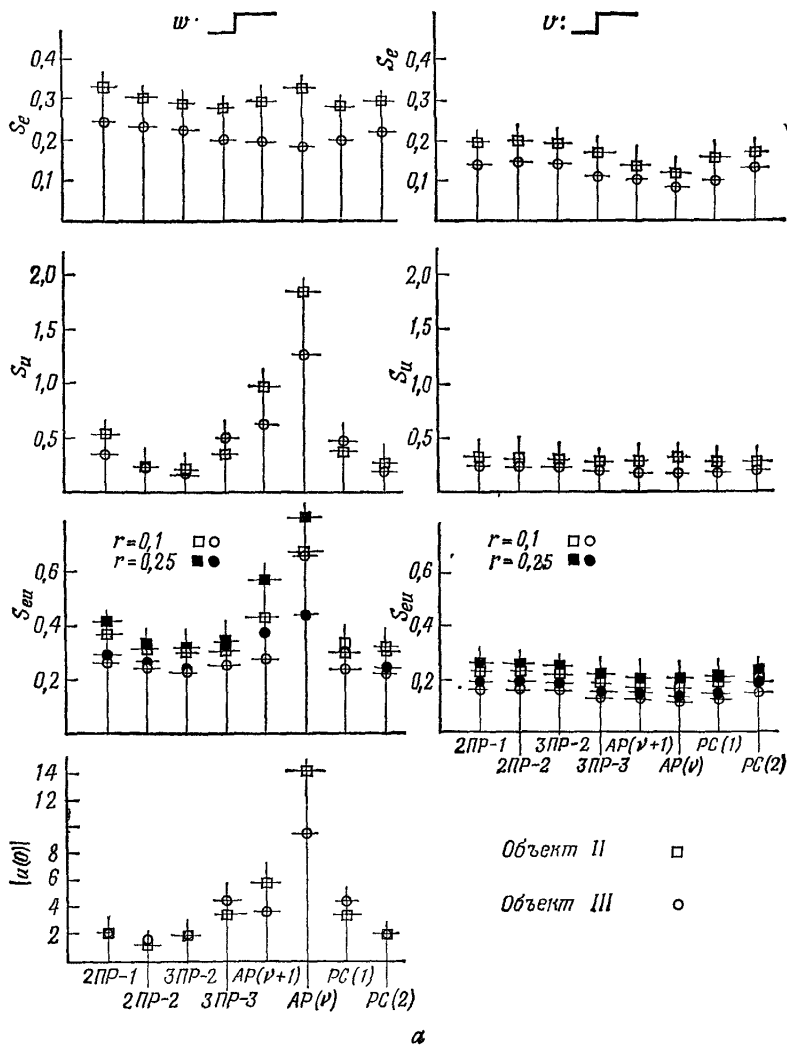


Рис. 11.3.3. Характеристики процессов управления для различных алгоритмов управления.

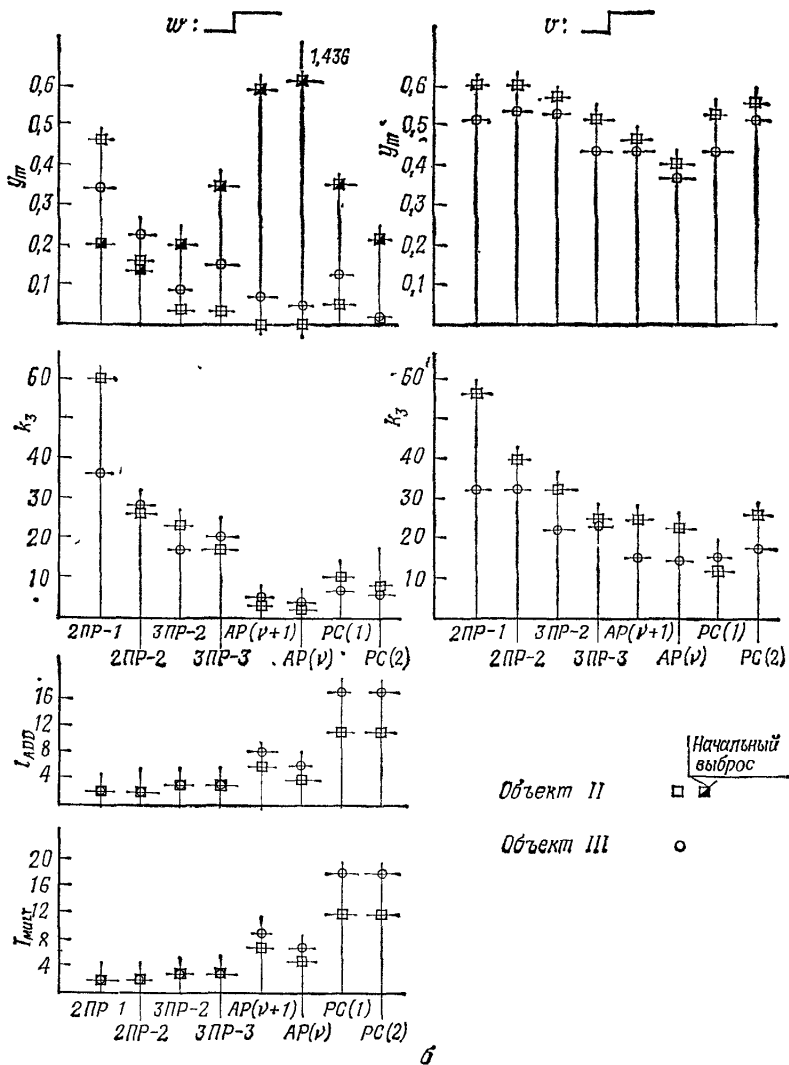
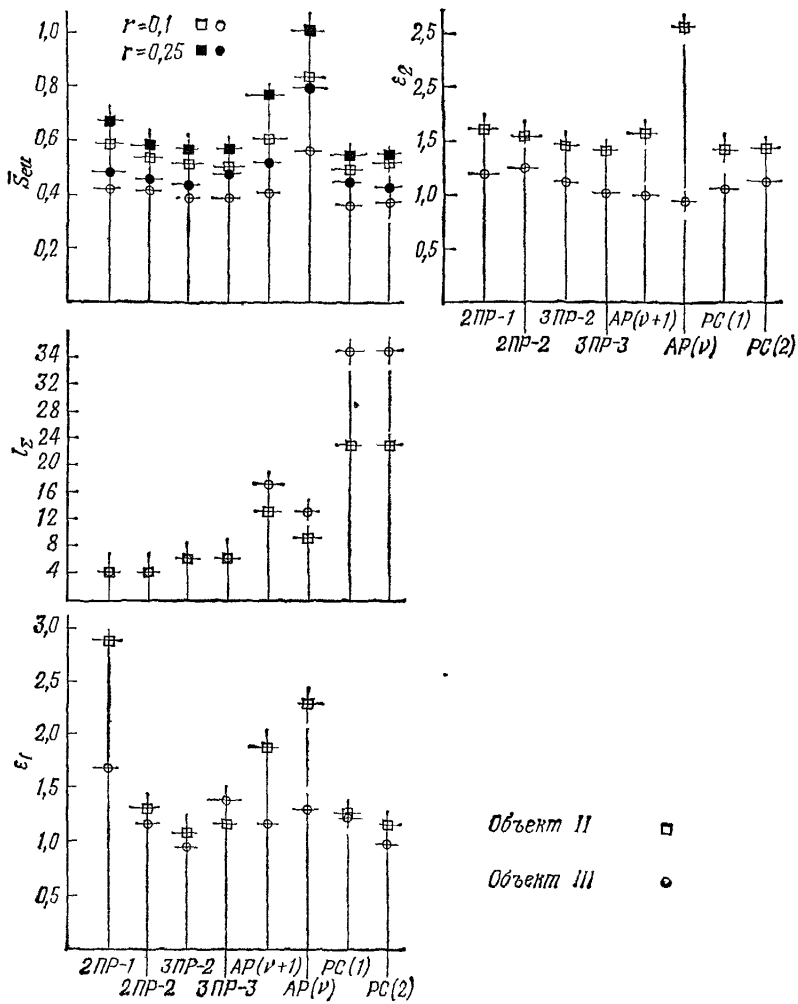


Рис. 11,3,3 (продолжение).



8

Рис. 11.3.3 (продолжение).

По сравнению с ЗПР-3 этот регулятор обеспечивает несколько большее значение S_e при меньшем значении S_u , много меньшее значение $u(0)$, большие величины u_m и k_3 , а также несколько меньшие вычислительные затраты l_{Σ} .

2ПР-1 (ПИ-типа с заданным начальным значением управляющей переменной)

По сравнению с 2ПР-2 величина $u(0)$ была выбрана большей, в результате чего получены несколько большее значение S_e и большее значение S_u , большие величины u_m и k_3 . Все это говорит о худшем качестве регулирования, чем для алгоритма управления 2ПР-2.

РС-1 (регулятор состояния с $\gamma = 0,043$)

Поскольку величина $u(0)$ для этого алгоритма управления близка к соответствующему значению управляющей переменной для ЗПР-3, будем непосредственно сравнивать параметры этих алгоритмов. Из рис. 11.3.2 видно, что по сравнению с регулятором ЗПР-3 переходные процессы для РС-1 лучше задемпфированы, значения S_e и S_u чуть-чуть меньше, величина u_m меньше, а величина k_3 намного меньше соответствующих параметров для ЗПР-3. Вычислительные затраты l_{Σ} оказываются, однако, в шесть раз большими.

РС-2 (регулятор состояния с $\gamma = 0,18$)

Величина $u(0)$ та же, что и для ЗПР-2, по сравнению с которым обеспечиваются более гладкие переходные процессы. Значения показателей S_e и S_u приближенно те же, в то время как величины u_m и k_3 существенно меньше. По сравнению с РС-1 значение S_e больше, S_u — меньше, величина u_m меньше, а величина k_3 — приближенно та же.

АР(v) (апериодический регулятор)

Установившееся состояние достигается за $k=4$ тактов при существенно большей величине $u(0)$ и больших изменениях $\Delta u(k)$. По сравнению со всеми другими алгоритмами управления получается наименьшее значение S_e при наибольшем значении S_u , наибольшая величина $u(0)$, относительно малая величина u_m и наименьшая величина k_3 . Вычислительные затраты между тактами примерно в два раза больше, чем для алгоритма ЗПР-3.

АР(v+1) (апериодический регулятор с заданным начальным значением управляющей переменной)

Увеличение времени установления до $k=5$ тактов приводит к существенному уменьшению начального значения управляющей переменной $u(0)$, а следовательно, и величины $\Delta u(k)$ по сравнению с регулятором АР(v). Значение S_e становится несколько большим при существенном уменьшении значения S_u ; величины u_m и k_3 возрастают. Вычислительные затраты l_{Σ} возрастают из-за увеличения порядка на единицу. По сравнению с регулятором ЗПР-3 получаем примерно то же значение S_e и большее значение S_u ,

однако меньшие величины u_m и $u(0)$, значительно меньшую величину k_3 и втрое большие вычислительные затраты I_{Σ} .

Обобщенная оценка качества управления для всех алгоритмов управления возможна при использовании квадратичного критерия качества $S_{\text{ев}}$. Этот критерий качества отражает характер поведения регулируемой переменной и управляющей переменной, умноженной на весовой коэффициент γ . Для меньшего значения весового коэффициента при управляющей переменной $\gamma=0,1$ наилучшее качество управления обеспечивают регуляторы ЗПР-2, РС-2 и РС-1. При большем значении весового коэффициента $\gamma=0,25$ лучшими оказываются регуляторы ЗПР-2, РС-2 и 2ПР-2. Параметрически оптимизируемые алгоритмы управления ЗПР-3 и ЗПР-2 незначительно отличаются по своим характеристикам от регуляторов РС-1 и РС-2.

Объект II (с неминимально-фазовой характеристикой)

Из рис. 11.3.1 видно, что аperiodический регулятор AP (v) в данном случае неприменим, так как формируемая им управляющая переменная слишком сильно изменяется. Возрастание затрат на управление S_{Σ} при этом не приводит, как это было при управлении объектом III (для всех алгоритмов управления), к уменьшению среднеквадратичной ошибки управления S_e . Слишком большие затраты на управление или слишком большая величина $u(0)$ ведут к ухудшению качества управления. Наименьшие значения S_e при достаточно малых значениях S_{Σ} , т. е. при относительно хорошем $S_{\text{ев}}$, получены при $\gamma=0,1$ и $\gamma=0,25$ для регуляторов 2ПР-2, ЗПР-2, ЗПР-3, РС-1 и РС-2. Малый начальный выброс и малое перерегулирование может быть получено при использовании регулятора ЗПР-2.

б) Подавление возмущения $v(k)$ на входе объекта

Ступенчатое изменение сигнала возмущающей переменной $v(k)$ приводит к приближенно одинаковым результатам для объектов III и II.

Хорошее подавление: AP (v), AP ($v+1$), РС-1, ЗПР-3 (это регуляторы с наибольшим коэффициентом перерегулирования).

Плохое подавление: 2ПР-2, 2ПР-1, ЗПР-2.

Следует отметить, что в этом случае отличия сравнительных показателей оказываются меньшими, чем при отработке ступенчатого задающего сигнала в установившемся состоянии. Это объясняется тем, что при ступенчатом изменении сигнала возмущающего воздействия $v(k)$ в меньшей степени возбуждает высокочастотные составляющие регулируемой переменной, чем при изменении задающего воздействия $w(k)$, для которого проводился синтез регуляторов. Для оценки качества систем при учете обоих воздействий,

$v(k)$ и $w(k)$, вычислялся следующий усредненный показатель:

$$\bar{S}_{eu} = (S_{eu})_w + (S_{eu})_v.$$

Хорошее качество управления по усредненному показателю обеспечивает использование регуляторов

для объекта III: при $\gamma = 0,1$ РС-1, РС-2, ЗПР-2, ЗПР-3;

при $\gamma = 0,25$ РС-2, ЗПР-2, РС-1, 2ПР-2;

для объекта II: при $\gamma = 0,1$ РС-1, ЗПР-3, ЗПР-2, РС-2;

при $\gamma = 0,25$ РС-1, РС-2, ЗПР-2, ЗПР-3, 2ПР-2.

в) Чувствительность к неточному заданию параметров модели

В большинстве случаев модель объекта является аппроксимацией реального объекта, так что алгоритмы управления нельзя оценивать без учета их чувствительности к ошибкам в модели объекта. Как для теоретических, так и для экспериментальных (идентифицированных) моделей объектов ошибки в отдельных параметрах редко оказываются независимыми. Поэтому оценка чувствительности только по отдельным параметрам может привести к неверным заключениям.

В дальнейшем чувствительность рассматриваемых алгоритмов управления оценивается по отношению к неточно идентифицированным моделям объектов. Для этого объекты II и III были идентифицированы несколько раз с помощью четырех различных методов оценки параметров в режиме нормальной эксплуатации при двух различных значениях отношения шума к полезному сигналу ($\eta = 0,1$ и $\eta = 0,2$) и трех различных временных интервалов [3.13]. После этого для полученных в результате идентификации моделей был проведен синтез управляющих алгоритмов. Затем были вычислены результирующая регулируемая переменная $\hat{y}(k)$ для неточной модели объекта и истинная регулируемая переменная $y(k)$ для точной модели объекта (т. е. реального объекта). Ошибка $\Delta y(k)$, обусловленная неточностью идентификации модели объекта, вычисляется по формуле

$$\Delta y(k) = \hat{y}(k) - y(k). \quad (11.3-1)$$

На основании полученной величины $\Delta y(k)$ может быть вычислена среднеквадратическая ошибка управления

$$\delta_y = \left[\sum_{k=0}^N \Delta y^2(k) / \sum_{k=0}^N y_0^2(k) \right]^{1/2}. \quad (11.3-2)$$

Здесь $y_0(k)$ — регулируемая переменная в системе с точной моделью объекта и в соответствии с ней синтезированным алгоритмом управления. Ошибка регулируемой переменной δ_y рассматривается как функция ошибки импульсной переходной функ-

ции δ_g модели объекта:

$$\delta_g = [\overline{\Delta g^2(k)/g^2(k)}]^{1/2}, \quad (11.3-3)$$

$$\Delta g(k) = \hat{g}(k) - g(k). \quad (11.3-4)$$

идентифицированная точная

Для уменьшения влияния статистических флуктуаций в каждом из пяти процессов идентификации были вычислены дисперсии σ_{δ_g} и σ_{δ_y} для этих ошибок. В работе [8.5] было показано, что в случае использования алгоритма управления ЗПР-3 для обоих исследуемых объектов при $0 \leq \sigma_{\delta_g} \leq 0,2$ наблюдается приближенно линейная зависимость $\sigma_{\delta_y} = f(\sigma_{\delta_g})$. Это также справедливо для всех остальных алгоритмов управления. Прямой зависимости между ошибками в отдельных параметрах модели не наблюдалось. Поэтому ошибки в весовой функции, с помощью которой описывается поведение объекта относительно входа/выхода, могут быть использованы для иллюстрации зависимости качества управления замкнутой системы от неточного задания модели объекта. Теперь можно оценить «чувствительность системы к неточности задания модели»

$$\varepsilon_1 = \sigma_{\delta_y} / \sigma_{\delta_g}. \quad (11.3-5)$$

Чем меньше величина ε_1 , тем меньше влияет неточность модели на поведение замкнутой системы. Из рис. 11.3.3, в видно, что чувствительность для объекта II в общем случае больше, чем для объекта III. Наименьшая чувствительность систем для обоих объектов получена при использовании алгоритмов управления ЗПР-2 и РС-2, а наибольшая — для алгоритма 2ПР-1. Высокой чувствительностью обладает система с аperiodическим регулятором AP(ν) для объекта II. Это можно объяснить неминимально-фазовым характером этого объекта. Однако для объекта III алгоритм управления AP(ν) обеспечивает ту же чувствительность, что и алгоритм ЗПР-3. Аperiodический регулятор AP($\nu+1$) оказывается для обоих объектов менее чувствительным, чем AP(ν).

г) Вычислительные затраты между тактами

При оценке вычислительных затрат для работы алгоритмов управления использовались следующие показатели: $l_{\Sigma} = l_{\text{add}} + l_{\text{mult}}$ — общее число операций; l_{add} — число операций типа сложения; l_{mult} — число операций типа умножения.

Из табл. 11.3.2 видно, что параметрически оптимизируемые алгоритмы управления требуют наименьших, алгоритмы управления по состоянию — наибольших, а алгоритмы с конечным временем установления — средних вычислительных затрат между тактами.

Таблица 11.3.2

Вычислительные затраты между тактами и время синтеза различных алгоритмов управления для объекта III при использовании вычислителя HP 2100A

Алгоритм управления	ЗПР-2	ЗПР-3	РС	АР (ν)	АР ($\nu+1$)
Вычислительные затраты между тактами $1/\Sigma$	6	6	34	14	18
Время синтеза [с]	20...30	40...60	1	0,004	0,004
Объем памяти для синтеза [слов]	1881	1881	1996	342	342

д) Затраты на синтез алгоритмов управления

Затраты на синтез состоят из потребной памяти и времени вычислений при синтезе алгоритмов управления. Оба этих компонента зависят от состава программного обеспечения используемых цифровых вычислителей (включая математические подпрограммы). Цифры, приведенные в табл. 11.3.2, получены для вычислителя Хьюлетт-Паккард HP 2100A с ферритовой памятью объемом 24К, внешней дисковой памятью и аппаратурно реализованной арифметикой с плавающей запятой. Время вычислений является наименьшим при синтезе аperiodических регуляторов, средним при синтезе регуляторов состояния и наибольшим для параметрически оптимизируемых регуляторов. Заметим, что для параметрической оптимизации использован метод Хуки — Дживса, для которого нужен относительно малый объем памяти. Условием окончания оптимизации служит $|\Delta q|=0,01$. Требуемый объем памяти для синтеза распределяется аналогично времени вычислений: наименьший для аperiodических регуляторов, средний для регуляторов состояния и наибольший для параметрически оптимизируемых регуляторов.

е) Зависимость между качеством управления и затратами на управление

На рис. 11.3.4 показана зависимость показателя качества управления S_e от требуемых затрат на управление S_u для различных алгоритмов управления, синтезированных для ступенчатых изменений в установившемся состоянии. Если исключить алгоритмы управления первого порядка (2ПР-1 и 2ПР-2), то для алгоритмов второго и более высоких порядков наблюдается прямая зависимость между S_e и S_u . Для объекта III возрастание значения S_u

приводит к уменьшению значения S_e по следующим группам:

ЗПР-2 } РС-2 }	1-я группа $u(0) = 2,0$,
ЗПР-3 } АР ($\nu + 1$) }	2-я группа $u(0) = 3,81 \dots 4,56$,
АР (ν)	3-я группа $u(0) = 9,52$.

Таким образом, группы формируются по величине начального значения управляющей переменной $u(0)$. Далее будет видно, что,

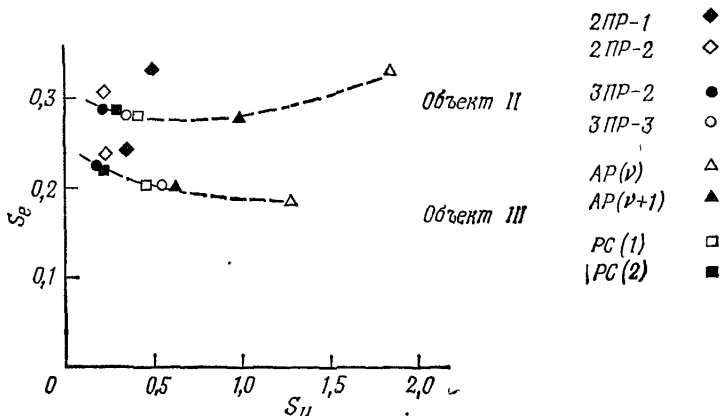


Рис. 11.3.4. Зависимость качества управления S_e от затрат на управление S_u для исследуемых алгоритмов управления и объектов II и III.

начиная с первой группы, небольшие улучшения качества управления S_e всегда достигаются за счет увеличения затрат на управление S_u . В случае объекта II видно небольшое улучшение качества управления S_e для

ЗПР-2 } РС-2 }	1-группа $u(0) = 2,0$
ЗПР-3 } РС-1 }	2-я группа $u(0) = 3,44 \dots 3,49$.

Однако при возрастании затрат на управление S_u качество управления становится хуже прежде всего для АР ($\nu + 1$) при $u(0) = 5,84$ и для АР (ν) и $u(0) = 14,09$. Можно также видеть, что при одинаковых значениях показателя S_u алгоритмы управления первого порядка 2ПР-1 и 2ПР-2 обеспечивают худшее качество управления S_e по сравнению с алгоритмами управления второго и более высоких порядков. При одних и тех же значениях S_u качество управления для объекта II оказывается худшим, чем для объекта III.

Из рис. 11.3.4 видно, что для алгоритмов управления второго и более высоких порядков, а также для других алгоритмов управления существует зависимость между достижимым качеством управления S_e и требуемыми затратами на управление S_u . Однако это справедливо только в том случае, когда синтез выполняется для ступенчатого изменения задающей переменной $w(k)$ [8.5].

11.4. СРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ УПРАВЛЕНИЯ

В разд. 11.3 проводилось сравнение качества управления в замкнутых системах с различными алгоритмами управления при ступенчатом изменении сигнала $w(k)$ в установившемся состоянии и сигнала $v(k)$ на входе объекта. В гл. 13 приведены соответствующие результаты моделирования систем с параметрически оптимизируемыми регуляторами для стохастических возмущений $p(k)$. Оценка различных алгоритмов управления при стохастических и детерминированных возмущениях с точки зрения их применения в адаптивных алгоритмах управления была проведена в работе [2.22] (см. разд. 26.2).

Оценка качества управления для входных сигналов с различным частотным спектром может быть осуществлена при использовании динамического показателя управления [5.14]

$$R(z) = \frac{1}{1 + G_R(z)G_P(z)}, \quad (11.4-1)$$

если реакция замкнутой системы на входной сигнал описывается соотношениями

$$\begin{aligned} y(z) &= R(z) G_R(z) G_P(z) w(z) \\ \text{или} \quad y(z) &= R(z) p(z), \end{aligned} \quad (11.4-2)$$

а сигнал возмущения $v(k)$ пропускается через произвольный фильтр с передаточной функцией $G_{Pv}(z) = p(z)/v(z)$, обеспечивающий

$$y(z) = R(z) G_{Pv}(z) v(z) = R(z) p(z). \quad (11.4-3)$$

Уравнение (11.4-3) можно получить из уравнения (11.4-2) при $v(z) = p(z)$ и $G_{Pv}(z) = 1$ или при $v(z) = w(z)$ и $G_{Pv}(z) = G_R(z) G_P(z)$.

Для детерминированных возмущений амплитудная частотная характеристика описывается выражением

$$|p(z)| = |G_{Pv}(z)| |v(z)| \quad (11.4-4)$$

при $z = e^{T_0 j \omega}$ и $0 \leq \omega \leq \omega_s$, где ω_s — частота Шеннона $\omega_s = \pi/T_0$ (см. разд. 27.1). Следовательно, амплитудная частотная характеристика регулируемой переменной равна

$$|y(z)| = |R(z)| |p(z)| = |R(z)| |G_{Pv}(z)| |v(z)|. \quad (11.4-5)$$

Для стационарных стохастических возмущений со спектральной плотностью

$$S_{nn}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{nn}(\tau) z^{-\tau}, \quad (11.4-6)$$

где $R_{nn}(\tau) = E \{ [n(k) - \bar{n}] [n(k + \tau) - \bar{n}] \}$

— автоковариационная функция,

$$S_{nn}(z) = |G_{Pv}(z)|^2 S_{vv}(z). \quad (11.4-7)$$

Спектральная плотность сигнала $y(k)$ в этом случае будет равна

$$S_{yy}(z) = |R(z)|^2 S_{nn}(z) = |R(z)|^2 |G_{Pv}(z)|^2 S_{vv}(z). \quad (11.4-8)$$

Модуль динамического показателя управления $|R(z)|$ или его квадрат $|R(z)|^2$ показывают, насколько амплитуда или спектральная плотность уменьшаются, проходя через замкнутую систему. Поэтому в дальнейшем для различных регуляторов приводится зависимость $|R(z)|$ от частоты в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_s$. Кроме того, будет показано влияние величины весового коэффициента при управляющей переменной.

Динамический показатель управления $R(z) = y(z)/n(z)$ можно легко определить даже для регуляторов состояния с наблюдателями. Для этого на аналоговом вычислителе моделируется низкочастотный объект с несколькими постоянными времени

$$G_P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{(1+4,2s)(1+1s)(1+0,9s)(1+0,6s)(1+0,55s)^2}. \quad (11.4-9)$$

По непрерывным сигналам производится его идентификация с помощью управляющего цифрового вычислителя при подаче на вход объекта псевдослучайного двоичного сигнала. При использовании метода «корреляции и оценки параметров по методу наименьших квадратов» и программы упорядоченного поиска ([3.13], [29.1]—[29.3]) получим дискретную передаточную функцию с тактом квантования $T_0 = 2$ с:

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0,0600z^{-1} + 0,1617z^{-2} + 0,0328z^{-3}}{1 - 0,9470z^{-1} + 0,2164z^{-2} - 0,0005z^{-3}}. \quad (11.4-10)$$

После этого для полученной модели объекта с помощью того же управляющего вычислителя проводится синтез алгоритмов управления для ступенчатых изменений в установившемся состоянии (см. гл. 29). Затем экспериментально определяется $|R(z)|$ на основании измерений частотных характеристик замкнутой системы, состоящей из аналогового и цифрового управляющего вычислителей. Полученные результаты приведены ниже. Диапазон частот дина-

мического показателя управления как хорошо известно, можно разделить на три основные области [5.14] (см. рис. 11.4.1):

Область I: $0 \leq \omega < \omega_I$ для $0 \leq |R| < 1$ (низкие частоты)

Возмущения $p(k)$ подавляются

Область II: $\omega_I \leq \omega \leq \omega_{II}$ для $1 < |R|$ (средние частоты)

Наличие резонанса. Возмущения $p(k)$ усиливаются

Область III: $\omega_{II} < \omega < \omega_s$ для $|R| \approx 1$ (высокие частоты)

Возмущения $p(k)$ остаются без изменения

Следовательно, эффективность действия замкнутой системы ограничена областью I. Изменения параметров регулятора, приводящие к уменьшению показателя $|R|$ в одной области, вызывают

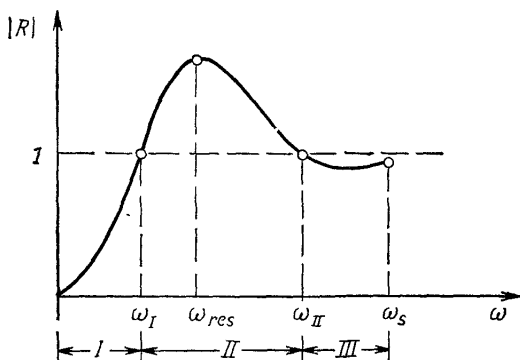


Рис. 11.4.1. Частотные области динамического показателя управления $|R(z)|$. $\omega_s = \pi/T_0 \cdot \omega_{res}$ — резонансная частота.

его возрастание в другой области [5.14]. Графики значений динамического показателя управления для различных регуляторов приведены на рис. 11.4.2. Параметры регуляторов сведены в табл. 11.4.1, а влияние увеличения весового коэффициента r при управляющей переменной показано в табл. 11.4.2. Из этой таблицы видно, что значение $|R|$ в области I возрастает, что приводит к меньшему подавлению низкочастотных возмущений и, следовательно, к худшему качеству управления. То же происходит и на низкочастотном участке области II. Однако в оставшейся части области II за резонансным пиком ($\omega > \omega_{res}$) значение $|R|$ убывает для всех регуляторов, и качество управления соответственно улучшается. В области III значение $|R|$ меняется незначительно. Можно сделать вывод, что для всех регуляторов увеличение веса управляющей переменной или уменьшение величины $u(0)$ приводит к уменьшению резонансного пика и его смещению в сторону низких частот. При оценке изменения динамического показателя управления для регуляторов состояния читатель может руководствоваться уравнениями (10.1-11) — (10.1-14) и соответствующими замечаниями и ссылками.

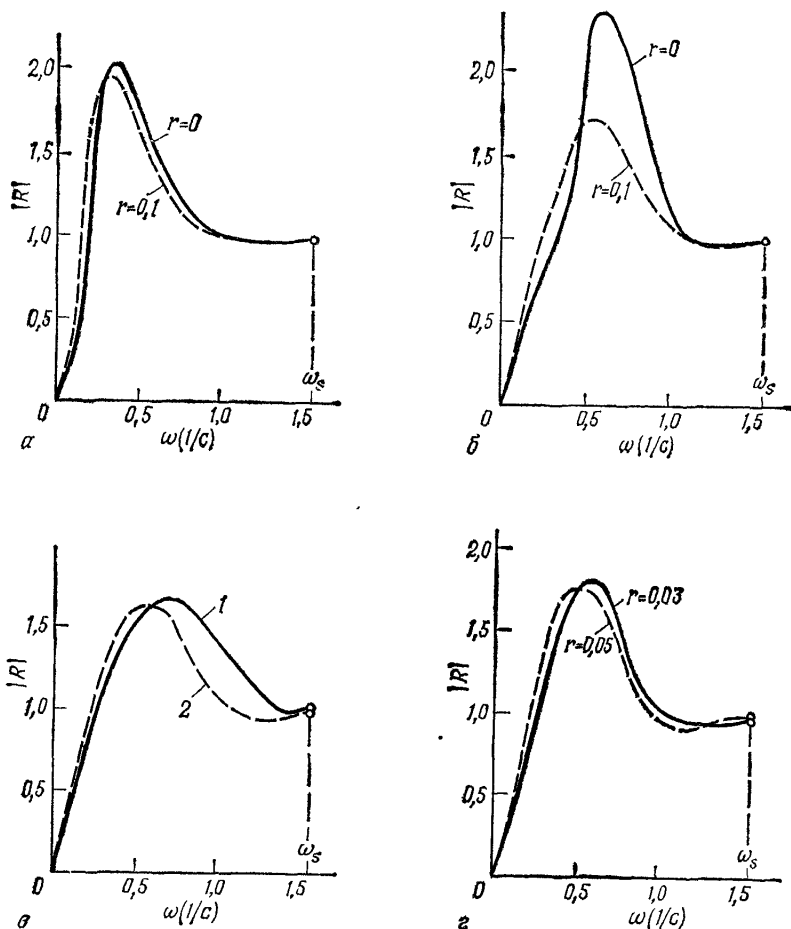


Рис. 11.4.2. Динамический показатель управления для различных регуляторов при различном весе управляющей переменной или различных значениях $u(0)$. а — параметрически оптимизируемый регулятор 2ПР-2 (ПИ-типа); б — параметрически оптимизируемый регулятор 3ПР-3 (ПИД-типа); в — аperiodический регулятор; г — регулятор состояния с наблюдателем.

Из вышесказанного снова следует, что оценка качества управления в значительной степени зависит от частотного спектра возбуждающих сигналов [см. уравнение (11.4-4)]. Только в том случае, когда на замкнутую систему действуют очень низкочастотные сигналы, можно выбирать малое значение весового коэффициента γ или большую величину $u(0)$. Сигналы, близкие к резонансной частоте, требуют большого значения γ или малой величины $u(0)$. Если на систему действуют средне- или высокочастотные сигналы без дополнительной фильтрации (см. разд. 27.1), аperiodический

Таблица 11.4.1

Параметры регуляторов для различных значений динамического показателя управления

Параметр регулятора	2ПР-2		3ПР-3	
	$r=0$	$r=0,1$	$r=0$	$r=0,1$
$q_0 = u(0)$	1,9336	1,5781	3,6072	2,4141
q_1	-1,5586	-1,2266	-4,8633	-2,9219
q_2	—	—	1,9219	1,0000
K	1,9336	1,5781	1,6957	1,4141
c_D	—	—	1,1475	0,7072
c_1	0,1939	0,2225	0,3992	0,3481
ω_{res}	0,35	0,33	0,55	0,60

Параметр регулятора	AP (v)	AP ($v+1$)
$q_0 = u(0)$	3,9292	2,2323
q_1	-3,7210	-0,4171
q_2	0,8502	-1,1240
q_3	-0,0020	0,3660
q_4	—	-0,0009
P_0	1,0000	1,0000
P_1	-0,2359	-0,1340
P_2	-0,6353	-0,4628
P_3	-0,1288	-0,3475
P_4	—	-0,0556
ω_{res}	0,73	0,58

Параметр регулятора	PC	
	$r=0,03$	$r=0,05$
k_1	2,6989	2,3466
k_2	3,1270	2,5798
k_3	2,3777	1,9358
k_4	1,0000	1,0000
$u(0)$	2,3777	1,9358
ω_{res}	0,57	0,50

регулятор AP (v) применять нельзя (см. рис. 11.4.2, в). Для других регуляторов в этом случае надо задавать большее значение r или меньшую величину $u(0)$.

На рис. 11.4.3 приведены графики динамических показателей управления для различных регуляторов. Вес управляющей переменной был выбран так, чтобы после ступенчатого изменения задающей переменной в установившемся состоянии величина $u(0)$ управляющей переменной для разных регуляторов была примерно одинакова, т. е. $u(0) \approx 1,93...2,41$. Значение показателя $|R|$ не очень

Таблица 11.4.2

Изменение показателя $|R(z)|$ при различном весе управляющей переменной

Регулятор	Изменение при синтезе	$ R(z) $ становится			
		Область I	Область II		Область III
		$0 \leq \omega < \omega_I$	$\omega_I \leq \omega < \omega_{res}$	$\omega_{res} \leq \omega < \omega_{II}$	$\omega_{II} \leq \omega \leq \omega_s$
2ПР-2	$\gamma = 0 \rightarrow 0,1$	Больше	Больше	Меньше	—
ЗПР-3	$\gamma = 0 \rightarrow 0,1$	»	Больше/ /Меньше	»	—
АР	$\nu \rightarrow \nu + 1$	»	Больше	»	—
РС	$\gamma = 0,03 \rightarrow 0,05$	»	»	»	—

сильно отличается для регуляторов ЗПР-3, АР ($\nu+1$) и РС. Только регулятору 2ПР-2 соответствует значительно более высокий резонансный пик на нижних частотах. В области I лучшим является регулятор РС, в области II — АР ($\nu+1$), а в области III — снова РС.

Динамический показатель управления пригоден не только для оценки качества управления как функции спектра сигналов воз-

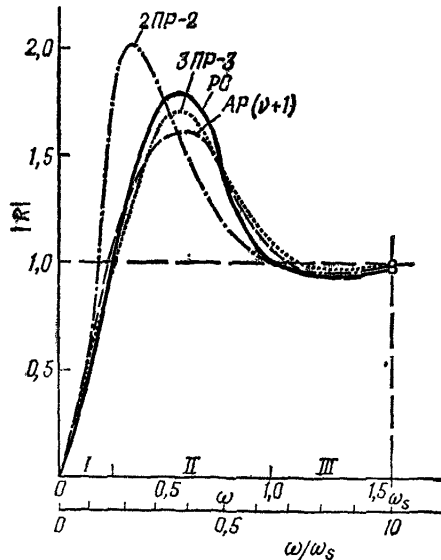


Рис. 11.4.3. Динамический показатель управления для четырех регуляторов: 2ПР-2: $u(0)=1,93$; ЗПР-3: $u(0)=2,41$; АР ($\nu+1$): $u(0)=2,23$; РС: $u(0)=2,38$.

мущения. Из уравнения (10.1-10) следует, что динамический показатель качества идентичен функции чувствительности $S(\theta_n, z)$ замкнутых систем, которая позволяет оценить влияние изменений характеристик объекта на качество управления. Малое значение $|R(z)|$ означает не только хорошее качество управления, но и малую чувствительность (см. гл. 10).

11.5. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИМЕНЕНИЮ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Наиболее важные характеристики исследуемых алгоритмов помещены в табл. 11.5.1 для заданных тестовых объектов пропорционального действия — низкочастотного и неминимально-фазового.

Таблица 11.5.1

Оценка наиболее важных свойств алгоритмов управления
(1 — «хорошее», «малое», 2 — «среднее», «среднее»,
3 — «плохое», «большое»)

Алгоритм управления		Качество управления		Чувствит. к ошибкам в модели		Вычислительные затраты между тактами	Затраты на синтез
		Объект		Объект			
		III	II	III	II		
ПИ	2ПР-2	2	2	2	3	1	3
	2ПР-1	2	2	2	2	1	3
ПИД	3ПР-3	1	1	2	2	1	3
	3ПР-2	1	1	1	1	1	3
Аперiodический	АР (v)	3	3	2	3	2	1
	АР ($v+1$)	2	3	2	3	2	1
По состоянию	РС-1	1	1	2	2	2	2
	РС-2	1	1	1	1	2	2

Параметрически оптимизируемые алгоритмы управления

Алгоритмы ПИД-типа с тремя параметрами лучше алгоритмов ПИ-типа с двумя параметрами, поскольку они обеспечивают лучшее качество управления при меньших затратах на управление, более быструю обработку задающих сигналов при меньшем перерегулировании и меньшую чувствительность к неточному заданию модели объекта. Параметрически оптимизируемые алгоритмы низкого порядка отличаются весьма малыми вычислительными затратами между тактами, но вычислительные затраты на синтез оказываются относительно большими из-за применения численных методов оптимизации. Однако существуют методы синтеза с малыми вычислительными затратами, описанные в разд. 25.2.3. В отличие от других алгоритмов управления для параметрически оптимизируемых алгоритмов низкого порядка можно применять простые

правила настройки. Поэтому параметрически оптимизируемые алгоритмы управления можно рекомендовать в следующих случаях:

- для многоконтурных систем управления;
- при проведении синтеза один раз или редко;
- при необходимости автономной адаптации параметров регуляторов к изменяющейся рабочей точке объекта.

Таким образом, эти регуляторы пригодны для широкого класса объектов.

Алгоритмы управления по состоянию

Достижимое качество управления алгоритмов управления по состоянию мало отличается от качества параметрически оптимизируемых алгоритмов для рассмотренных тестовых объектов. При тех же начальных значениях управляющей переменной $u(0)$ алгоритмы управления по состоянию обеспечивают несколько более затемированные переходные процессы по регулируемой переменной и меньшее время установления. Вычислительные затраты между тактами оказываются большими для объектов, начиная со второго порядка, однако их синтез на ЭВМ более прост. Поэтому алгоритмам управления по состоянию следует отдавать предпочтение в следующих случаях:

- для систем с небольшим числом контуров;
- при выполнении синтеза один раз или редко;
- для неустойчивых объектов, для обеспечения устойчивости которых необходимо вводить обратные связи по многим переменным состояниям.

Алгоритмы управления с конечным временем установления

Из-за больших колебаний управляющей переменной аperiodические алгоритмы управления порядка $v = m + d$ не рекомендуется использовать при малых тактах квантования. Однако, если такт квантования достаточно велик, аperiodические алгоритмы порядка $v + 1$ будут лучше, так как они характеризуются меньшим изменением управляющей переменной. Время установления и перерегулирование для аperiodических алгоритмов меньше, чем для параметрически оптимизируемых. Вычислительные затраты между тактами примерно в три раза больше для объектов четвертого порядка. Главное преимущество аperiodических алгоритмов состоит в вычислительной простоте их синтеза. Поэтому их можно рекомендовать для

- асимптотически устойчивых объектов;
- адаптивного управления, при котором синтез регулятора повторяется неоднократно.

Эти утверждения справедливы для тестовых объектов, исследованных выше, однако они могут быть обобщены для других подобных линейных объектов без чрезмерных ошибок.

В гл. 9 уже были кратко описаны объекты пропорционального действия с большим временем запаздывания, а результаты сравнения различных алгоритмов для стохастических возмущений помещены в гл. 13 и 25. Трудно выбрать алгоритмы управления для многомерных объектов, так как они существенно отличаются друг от друга. Преимущества и недостатки параметрически оптимизируемых алгоритмов и алгоритмов управления по состоянию необходимо исследовать в каждом конкретном случае (см. ч. 5).

Системы управления со случайными возмущениями

ГЛАВА 12

Стохастические системы управления

12.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При расчете регуляторов, обсуждавшихся в предшествующих главах, предполагалось, что действующие в системе возмущения являются детерминированными, т. е. представляют собой сигналы определенного типа, которые могут быть описаны аналитически. Однако реальные возмущения, как правило, носят случайный характер, и в явном виде описать их невозможно. Детерминированные сигналы, используемые при проектировании систем управления, могут служить лишь приближенными «моделями» действительных сигналов. Обычно рассматриваются только модельные сигналы простейшей формы, что дает возможность проводить качественную оценку реакций систем управления и существенно упрощает процедуры их расчета. В то же время синтезированная система оказывается оптимальной только по отношению к определенным модельным сигналам в рамках принятого критерия оптимальности. При всех остальных сигналах система может считаться лишь квазиоптимальной, хотя в большинстве случаев этого бывает вполне достаточно. Если же к качеству управления предъявляются повышенные требования, при синтезе регуляторов следует учитывать не только динамику объектов управления, но и свойства реальных возмущений. Для этого необходимо применять методы теории случайных процессов.

В разделе 12.2 кратко описываются *рекуррентные математические модели случайных сигналов*, используемые в последующих главах. Далее рассматриваются три типа регуляторов, специально предназначенных для работы в условиях помех. Как будет показано в гл. 13, все *параметрически оптимизированные регуляторы*, исследованные в гл. 5, также могут быть адаптированы к случайным возмущениям. В гл. 14 подробно обсуждаются различные регуляторы с *минимальной дисперсией*, получаемые путем минимизации квадратичных критериев качества. Они имеют структуру, оптимальную по отношению как к параметрам объекта, так и к характеристикам случайных помех. Наконец, в гл. 15 рассматриваются различные варианты регулятора состояния, который также обладает *оптимальной структурой*, но дополнен *фильтром* для получения оценки случайных переменных состояния.

Теория стохастических систем управления возникла совсем недавно. По дискретным стохастическим системам управления с тех пор было опубликовано сравнительно немного книг, из которых можно рекомендовать следующие: [12.1]—[12.5] и [8.3].

12.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

В этом разделе приводится ряд уравнений, описывающих случайные сигналы, которые далее будут использованы при синтезе стохастических регуляторов и фильтров переменных состояния. За недостатком места мы не имеем возможности представить подробные доказательства и выкладки, ввиду чего читатель отсылается к специальным публикациям, в том числе по теории непрерывных случайных процессов [12.6—12.8] и по теории дискретных случайных процессов [12.9], [12.10], [12.4], [3.13].

12.2.1. Основные понятия

Рассмотрим дискретную последовательность случайных сигналов

$$\{x(k)\}; \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Статистические свойства случайных сигналов характеризуются плотностями вероятностей их амплитуд, а также плотностями всевозможных совместных распределений. Если указанные функции зависят от времени, случайный сигнал называется *нестационарным*. Если плотности вероятностей и совместных вероятностей инвариантны к сдвигу во времени, сигнал называют *стационарным* (в узком смысле). Стационарный случайный процесс является эргодическим, если усреднение по множеству для него может быть заменено усреднением по времени. Эргодический сигнал можно описать его *математическим ожиданием* (средним арифметическим значением)

$$\bar{x} = E \{x(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) \quad (12.2-1)$$

и автокорреляционной функцией

$$\Phi_{xx}(\tau) = E \{x(k) x(k+\tau)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) x(k+\tau). \quad (12.2-2)$$

Автокорреляционная функция является мерой взаимозависимости отдельных значений случайного сигнала. Из определения автокорреляционной функции следует, что она зависит от математического ожидания сигнала. Если же анализируются только отклонения от среднего, функция (12.2-2) переходит в *автоковариационную функцию*

$$R_{xx}(\tau) = \text{cov}[x, \tau] = E \{[x(k) - \bar{x}][x(k+\tau) - \bar{x}]\} = \Phi_{xx}(\tau) - \bar{x}^2. \quad (12.2-3)$$

При $\tau=0$ формула (12.2-3) дает дисперсию сигнала

$$\sigma_x^2 = R_{xx}(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x(k) - \bar{x}]^2. \quad (12.2-4)$$

Если амплитуда сигнала распределена по нормальному закону, он полностью описывается математическим ожиданием и автоковариационной функцией. Случайный сигнал называют *стационарным в широком смысле*, если его характеристики \bar{x} и $R_{xx}(\tau)$ не зависят от времени.

Степень взаимозависимости двух различных случайных сигналов определяется взаимной *корреляционной функцией*

$$\Phi_{xy}(\tau) = E \{x(k) y(k+\tau)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) y(k+\tau) \quad (12.2-5)$$

или *взаимной ковариационной функцией*

$$R_{xy}(\tau) = \text{cov}[x, y, \tau] = E \{[x(k) - \bar{x}][y(k+\tau) - \bar{y}]\} = \Phi_{xy}(\tau) - \bar{x}\bar{y}. \quad (12.2-6)$$

Два случайных сигнала называются *некоррелированными*, если

$$\text{cov}[x, y, \tau] = R_{xy}(\tau) = 0. \quad (12.2-7)$$

Они являются *ортгоналичными*, если, кроме того, выполняется условие $\bar{x}\bar{y} = 0$ или эквивалентное ему

$$\Phi_{xy}(\tau) = 0. \quad (12.2-8)$$

Белый шум отличается от случайных сигналов других типов тем, что его текущее значение не зависит от всех предшествующих. Поскольку внутренняя взаимосвязь между значениями белого шума отсутствует, то в случае, когда его амплитуда распределена по нормальному закону, он полностью описывается математическим ожиданием \bar{x} и ковариационной функцией

$$\text{cov}[x, \tau] = \sigma_x^2 \delta(\tau), \quad (12.2-9)$$

где σ_x^2 — дисперсия сигнала $x(t)$; $\delta(\tau)$ — функция Кронекера, определяемая как

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } |\tau| \neq 0. \end{cases} \quad (12.2-10)$$

До сих пор рассматривались лишь скалярные случайные сигналы. *Векторный случайный сигнал* порядка n представляет собой совокупность n скалярных сигналов

$$\{\mathbf{x}^T(k)\} = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]. \quad (12.2-11)$$

Если все составляющие векторного сигнала стационарны, его математическое ожидание есть

$$\bar{\mathbf{x}}^T = E \{ \mathbf{x}^T(k) \} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]. \quad (12.2-12)$$

Взаимосвязь отдельных скалярных составляющих описывается ковариационной матрицей

$$\begin{aligned} \text{cov} [\mathbf{x}, \tau] &= E \{ [\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}] [\mathbf{x}(k + \tau) - \bar{\mathbf{x}}]^T \} = \\ &= \begin{bmatrix} R_{x_1 x_1}(\tau) & R_{x_1 x_2}(\tau) & \dots & R_{x_1 x_n}(\tau) \\ R_{x_2 x_1}(\tau) & R_{x_2 x_2}(\tau) & \dots & R_{x_2 x_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{x_n x_1}(\tau) & R_{x_n x_2}(\tau) & \dots & R_{x_n x_n}(\tau) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.2-13)$$

Диагональными элементами (12.2-13) являются автоковариационные функции, внедиагональными — взаимные ковариационные функции скалярных сигналов. Отметим, что ковариационная матрица симметрична при $\tau = 0$.

Пример. 12.2.1. Если $x_1(k)$ и $x_2(k)$ — два некоррелированных случайных сигнала типа белого шума, их ковариационная матрица определяется выражениями

$$\begin{aligned} \text{cov} [\mathbf{x}, \tau = 0] &= \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}, \\ \text{cov} [\mathbf{x}, \tau \neq 0] &= 0. \end{aligned}$$

Ковариационные и корреляционные функции являются непараметрическими моделями случайных сигналов; в следующих двух разделах будут рассмотрены их параметрические модели.

12.2.2. Марковские процессы

Случайный сигнал называют *марковским процессом первого порядка*, если его условная плотность вероятности подчиняется соотношению

$$p [x(k) | x(k-1), x(k-2), \dots, x(0)] = p [x(k) | x(k-1)]. \quad (12.2-14)$$

Таким образом, вероятность реализации значения $x(k)$ зависит только от предыдущего значения $x(k-1)$ и не зависит от всех остальных предшествующих элементов случайной последовательности. Отсюда следует, что очередное значение зависит лишь от текущего.

Данному выше определению марковского процесса соответствует сигнал, описываемый скалярным разностным уравнением первого порядка

$$x(k+1) = ax(k) + fv(k), \quad (12.2-15)$$

которое устанавливает связь между будущим значением $x(k+1)$ и текущими значениями $x(k)$ и $v(k)$. Если $v(k)$ — это статистически независимый сигнал (т. е. белый шум), то $x(k)$ является марковским процессом.

В том случае, когда скалярное разностное уравнение имеет порядок выше единицы, например

$$x(k+1) = a_1 x(k) + a_2 x(k-1) + f v(k), \quad (12.2-16)$$

его можно преобразовать в систему уравнений

$$\begin{aligned} x(k) &= x_1(k), \\ x(k+1) &= x_1(k+1) = x_2(k). \end{aligned} \quad (12.2-17)$$

Последнюю можно записать в виде векторного разностного уравнения первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} v(k) \quad (12.2-18)$$

или для произвольного порядка

$$x(k+1) = Ax(k) + fv(k). \quad (12.2-19)$$

Матрица A и вектор f в (12.2-19) предполагаются постоянными. При этом условии каждый элемент $x(k+1)$ зависит только от состояния $x(k)$ и значения $v(k)$, т. е. лишь от текущих величин.

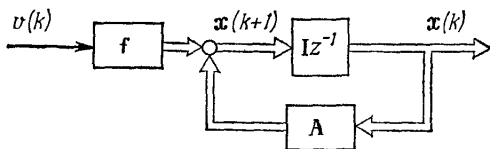


Рис. 12.2.1. Модель векторного марковского сигнала $x(k)$ с белым шумом $v(k)$ на входе.

Такого типа сигнал $x(k)$ называют *векторным марковским процессом* первого порядка. Случайный сигнал, зависящий от любого конечного числа предшествующих значений, всегда можно описать как векторный марковский процесс, представив его в форме векторного разностного уравнения первого порядка.

Таким образом, широкий класс случайных сигналов может описываться параметрическими моделями, представляющими марковские процессы (рис. 12.2.1). Если параметры A и f постоянны и, кроме того, $\bar{v} = 0$, процесс является стационарным. Нестационарность марковского процесса может быть обусловлена изменениями $A(k)$, $f(k)$ или $\bar{v}(k)$.

Получим выражение для ковариационной матрицы $\mathbf{X}(k+1)$ векторного сигнала $\mathbf{x}(k+1)$. Согласно данному выше определению,

$$\text{cov}[\mathbf{x}(k+1), \tau=0] = E\{[\mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)][\mathbf{x}(k+1+\tau) - \bar{\mathbf{x}}(k+1+\tau)]^T\} = \mathbf{X}(k+1), \quad (12.2-20)$$

если $\mathbf{x}(k+1)$ является марковским процессом с постоянными параметрами:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{v}(k). \quad (12.2-21)$$

Предположим, справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} E\{\mathbf{v}(k)\} &= \bar{\mathbf{v}}, \\ \text{cov}[\mathbf{v}(k), \tau] &= \begin{cases} \mathbf{V} & \text{при } \tau = 0, \\ \mathbf{0} & \text{при } \tau \neq 0, \end{cases} \\ E\{\mathbf{x}(0)\} &= \bar{\mathbf{x}}(0), \\ \text{cov}[\mathbf{x}(0), \tau=0] &= \mathbf{X}(0), \\ E\{[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}][\mathbf{v}(k) - \bar{\mathbf{v}}]^T\} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (12.2-22)$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей уравнения (12.2-21)

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{F}\bar{\mathbf{v}} \quad (12.2-23)$$

и вычтем результат из (12.2-21):

$$\mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)] + \mathbf{F}[\mathbf{v}(k) - \bar{\mathbf{v}}]. \quad (12.2-24)$$

Протранспонировав выражение (12.2-24) и умножив его справа на вектор (12.2-24), вновь возьмем математическое ожидание. При этом получим разностное уравнение, которому подчиняется искомая ковариационная матрица:

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{F}^T. \quad (12.2-25)$$

Если все корни характеристического уравнения

$$\det[\mathbf{z}\mathbf{I} + \mathbf{A}] = 0$$

расположены внутри единичной окружности на плоскости z и если \mathbf{A} и \mathbf{F} — постоянные матрицы, то при $k \rightarrow \infty$ уравнение (12.2-25) дает установившееся значение ковариационной матрицы \mathbf{X} . Последнюю можно получить с помощью рекуррентной процедуры из уравнения (12.2-25), записанного относительно установившегося значения:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{F}^T. \quad (12.2-26)$$

Далее мы будем требовать, чтобы математическое ожидание квадратичного члена вида $\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$, где $\mathbf{x}(k)$ — марковский процесс с ковариационной матрицей \mathbf{X} , было положительным, а \mathbf{X} и \mathbf{Q} были неотрицательно определенными матрицами. Воспользуемся

тождеством

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \text{tr} [\mathbf{Q} \mathbf{x} \mathbf{x}^T], \quad (12.2-27)$$

где tr обозначает след матрицы, т. е. сумму ее диагональных элементов. При $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}$ отсюда следует

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) \} &= E \{ \text{tr} [\mathbf{Q} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)] \} = \text{tr} [\mathbf{Q} E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \}] = \\ &= \text{tr} [\mathbf{Q} \mathbf{X}]. \end{aligned} \quad (12.2-28)$$

Если же математическое ожидание $\bar{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, то соответственно

$$E \{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) \} = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}} + \text{tr} [\mathbf{Q} \mathbf{X}]. \quad (12.2-29)$$

12.2.3. Скалярные стохастические разностные уравнения

Стохастическое разностное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{aligned} n(k) + c_1 n(k-1) + \dots + c_m n(k-m) &= d_0 v(k) + d_1 v(k-1) + \dots \\ &\dots + d_m v(k-m). \end{aligned} \quad (12.2-30)$$

Сигнал $n(k)$ можно рассматривать как выход некоторого фильтра, имеющего дискретную передаточную функцию

$$\frac{n(z)}{v(z)} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_m z^{-m}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}, \quad (12.2-31)$$

на вход которого подается белый шум $v(k)$ с математическим ожиданием $\bar{v} = 0$ и дисперсией $\sigma_v^2 = 1$. Таким образом, стохастическое разностное уравнение описывает случайный сигнал $n(k)$ как функцию статистически независимого сигнала $v(k)$. Эквивалентом скалярного стохастического уравнения (12.2-31) является векторное стохастическое разностное уравнение вида (12.2-19), в котором

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_m & -c_{m-1} & \dots & -c_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^T(k) &= [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_m(k)], \\ n(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + d_0 v(k), \\ \mathbf{c}^T &= [(d_m - d_0 c_m) \ (d_{m-1} - d_0 c_{m-1}) \ \dots \ (d_1 - d_0 c_1)]. \end{aligned} \quad (12.2-32)$$

В зависимости от типа передаточной функции (12.2-31) будем различать *авторегрессионные процессы*

$$n(z) = \frac{d_0}{C(z^{-1})} v(z) \quad (12.2-33)$$

и процессы со скользящим средним

$$n(z) = D(z^{-1})v(z). \quad (12.2-34)$$

Сигнал, описываемый функцией (12.2-31) общего вида, будем именовать смешанным авторегрессионным процессом со скользящим средним. Если корни знаменателя $C(z^{-1})$ лежат внутри единичной окружности на плоскости z , все эти процессы являются стационарными. Можно, однако, распространить описание (12.2-31) и на случай нестационарных процессов, если допустить существование корней, лежащих непосредственно на единичной окружности. В этом случае

$$\frac{n(z)}{v(z)} = \frac{D(z^{-1})}{C'(z^{-1})(1-z^{-1})^p}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (12.2-35)$$

Более подробное обсуждение стохастических процессов читатель сможет найти в книгах [12.4], [12.9], [12.10].

Параметрически оптимизируемые регуляторы при случайных возмущениях

Параметрически оптимизированные регуляторы, рассмотренные в гл. 5, можно несколько видоизменить, учитывая при их синтезе наличие случайных помех. В тех случаях, когда случайные возмущения $n(k)$ поддаются измерению, синтез может быть основан на квадратичном критерии качества вида

$$S_{eu}^2 = \sum_{k=0}^M [e^2(k) + r\Delta u^2(k)]. \quad (13-1)$$

Если в контуре управления стоит ЭВМ, значения помехи могут накапливаться в ее памяти и в дальнейшем использоваться для оптимизации параметров регулятора. В случае стационарного возмущения при достаточной продолжительности измерения и накопления сигналов помехи после однократной подстройки параметров регулятор может считаться оптимальным и по отношению ко всей последующей реализации случайного возмущения. При этом оптимизация параметров осуществляется без использования математической модели шума.

Ниже будут представлены некоторые результаты математического моделирования, которые позволят продемонстрировать, как меняются параметры оптимизированного регулятора по сравнению с теми, что были получены для детерминированных воздействий ступенчатой формы. Сравнение проводилось для тестовых объектов II и III (см. гл. 5), для управления которыми был использован алгоритм, описываемый передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (13-2)$$

с тремя параметрами, аналогичный (5.2-10). Случайное возмущение $v(k)$, как показано на рис. 5.2.1, действует на входе объекта. Предполагается, что это нормально распределенный дискретный белый шум с математическим ожиданием

$$E\{v(k)\} = 0 \quad (13-3)$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_v = \sqrt{E\{v^2(k)\}} = 0,1. \quad (13-4)$$

Следовательно, помеху на выходе можно записать в виде $n(z) =$

$=G_P(z)v(z)$. Параметры регулятора, оптимальные по отношению к данному возмущению, определялись путем численной минимизации критерия (13-1) при $M=240$ и $r=0$ методом Флетчера — Пауэлла. Значения полученных таким способом параметров представлены в таблице 13.1. Там же приведены средние квадратичные значения ошибки S_e , характеризующей качество управления, и средние квадратичные значения управляемой переменной S_u , характеризующие затраты на управление, а также значения показателя эффективности введения стохастического регулятора

$$\kappa = \sqrt{\frac{y^2(k) \text{ с регулятором}}{y^2(k) \text{ без регулятора}}} \quad (13-5)$$

Все перечисленные характеристики, рассчитанные при двух различных тактах квантования, помещены в колонках, озаглавленных « S_e , стох. \rightarrow min». Аналогичные характеристики, полученные для оптимизированного регулятора с детерминированным ступенчатым входным сигналом, помещены в колонках, обозначенных « S_e , дет. \rightarrow min». Анализ таблицы показывает, что для алгоритма управления типа ЗПР-3 при оптимизации с учетом случайных возмущений параметры q_0 и K имеют меньшие значения, а параметр c_D — большее (исключение составляет лишь регулятор объекта II при $T_0=4$ с), нежели при оптимизации по отношению к ступенчатому входному воздействию. Постоянная интегрирования во всех случаях близка к нулю ввиду отсутствия постоянного возмущения, поскольку $E\{v(k)\}=0$. Судя по снижению показателя S_u , в среднем интенсивность управления несколько снижается. Соответственно улучшается качество управления, что подтверждается уменьшением показателя κ . Более низкое качество и повышенная интенсивность управления, свойственные регуляторам, оптимизированным по отношению к ступенчатому воздействию, свидетельствуют о том, что случайные шумы возбуждают собственные движения замкнутого контура управления. Значения спектральной плотности случайного возмущения $n(k)$ в области высоких частот достаточно велики, и этим объясняется то, что показатель κ для стохастически оптимизированных регуляторов лишь немногим меньше единицы. Поэтому средняя величина отклонения выходного сигнала за счет введения регулятора снижается незначительно; эта особенность проявляется наиболее отчетливо для объекта II. При меньшем такте квантования $T_0=4$ с качество управления объектом III значительно выше, чем при $T_0=8$ с. Для объекта II данный показатель в обоих случаях примерно одинаков. В регуляторе ЗПР-2 оптимизировались два параметра — q_1 и q_2 , в то время как q_0 задавался равным начальному значению выходного сигнала $u(0)$. Для объекта II величина данного параметра была чрезмерно завышена, что сказалось на качестве управления, которое хуже, чем при использовании регулятора ЗПР-3. В случае объекта III при обоих тактах квантования

Параметры регуляторов, показатели качества и интенсивности управления при случайных возмущениях v (к)

$T_0=4c$	$S_e, \text{стох.} \rightarrow \min$		$S_e, \text{дет.} \rightarrow \min$	
	ЗРС-3	ЗРС-2	ЗРС-3	ЗРС-2
q_0	0,477	1,750	2,332	1,750
q_1	-0,512	-3,010	-3,076	-2,039
q_2	0,014	1,239	1,105	0,591
K	0,463	0,511	1,227	1,159
c_D	0,031	2,425	0,901	0,511
c_I	-0,045	-0,041	0,095	0,261
S_e	0,0346	0,037	0,0435	0,0411
S_u	0,0207	0,0604	0,0786	0,0595
κ	0,903	0,966	1,13	1,08

$T_0=4c$	$S_e, \text{стох.} \rightarrow \min$		$S_e, \text{дет.} \rightarrow \min$	
	ЗРС-3	ЗРС-2	ЗРС-3	ЗРС-2
q_0	3,966	2,500	4,549	2,500
q_1	-7,171	-3,983	-7,160	-3,320
q_2	3,181	1,455	3,030	1,097
K	0,785	1,045	1,519	1,403
c_D	4,051	1,392	1,994	0,783
c_I	-0,030	-0,026	0,275	0,198
S_e	0,0216	0,0213	0,0245	0,0249
S_u	0,0572	0,0361	0,0673	0,0438
κ	0,70	0,71	0,82	0,83

$T_0=8c$	$S_e, \text{стох.} \rightarrow \min$		$S_e, \text{дет.} \rightarrow \min$	
	ЗРС-3	ЗРС-2	ЗРС-3	ЗРС-2
q_0	1,494	2,000	2,437	2,000
q_1	-2,565	-3,370	-2,995	-2,280
q_2	1,052	1,394	1,158	0,784
K	0,442	0,606	1,279	1,216
c_D	2,378	2,300	0,905	0,645
c_I	-0,044	0,040	0,469	0,414
S_e	0,0356	0,037	0,0432	0,0431
S_u	0,0485	0,0677	0,0807	0,0672
κ	0,85	0,88	1,02	1,03

$T_0=8c$	$S_e, \text{стох.} \rightarrow \min$		$S_e, \text{дет.} \rightarrow \min$	
	ЗРС-3	ЗРС-2	ЗРС-3	ЗРС-2
q_0	0,913	1,500	1,999	1,500
q_1	-1,488	-2,154	-2,079	-1,338
q_2	0,557	0,652	0,748	0,364
K	0,356	0,848	1,251	1,136
c_D	1,564	0,770	0,597	0,321
c_I	-0,051	-0,002	0,534	0,464
S_e	0,0423	0,0452	0,0528	0,0519
S_u	0,0387	0,0658	0,0858	0,0663
κ	0,90	0,95	1,11	1,09

($T_0=4$ с и $T_0=8$ с) различия в значениях q_0 у регуляторов ЗПР-3 и ЗПР-2 сказываются на качестве управления не столь заметно.

Результаты математического моделирования контуров управления с 3-параметрическим регулятором позволяют заключить следующее. Если по отношению к ступенчатым воздействиям он действует подобно ПИД-регулятору, то при наличии случайной стационарной помехи $n(k)$ с математическим ожиданием $E\{n(k)\}=0$ его поведение более напоминает регулятор типа ПД. Поскольку отсутствует постоянное воздействие, интегрирующие свойства регулятора не проявляются. Если в уравнении (5.2-18) положить $c_1=0$, то полюс в точке $z=1$ сокращается и передаточная функция (13-2) преобразуется в передаточную функцию ПД-регулятора:

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = K [(1 + c_D) - c_D z^{-1}] = q_0 - q_2 z^{-1}, \quad (13-6)$$

которой соответствует алгоритм управления

$$u(k) = q_0 e(k) - q_2 e(k-1). \quad (13-7)$$

Если случайная помеха $n(k)$ стационарна, причем $E\{n(k)\}=0$, можно использовать параметрически оптимизированный регулятор с передаточной функцией (13-6). Однако на практике подобные воздействия встречаются крайне редко, ввиду чего рекомендуется применять регуляторы (13-2) или (5.2-10), обладающие хотя бы в незначительной степени интегрирующими свойствами. Для регулятора такого типа производятся оптимизация параметров и расчет коэффициентов K и c_D . Постоянная интегрирования c_1 задается отличной от нуля, что позволяет управлять регулярными составляющими случайного возмущения и снижать величину статической ошибки.

Регуляторы с минимальной дисперсией

Регуляторами с минимальной дисперсией будем называть регуляторы, расчет которых основан на минимизации дисперсии регулируемой переменной $y(t)$

$$\text{var } [y(k)] = E \{y^2(k)\}.$$

Данный критерий применялся в работе [12.4], причем предполагалось, что формирующий фильтр шума задается уравнением (12.2-31), в котором $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$. Ввиду того что в этот критерий не входит (со своим весом) управляемая переменная $u(t)$, во многих случаях наблюдались весьма значительные изменения сигнала на входе регулятора. Поэтому в [14.1] было предложено дополнить критерий взвешенным значением управляемой переменной и минимизировать величину

$$E \{y^2(k+i) + \gamma u^2(k)\}, \quad i = d+1.$$

Шум $\pi(k)$ может описываться как непараметрическими моделями (например, переходной характеристикой формирующего фильтра), так и параметрическими, типа (12.2-31). Введение управляющего воздействия не позволяет получить минимум дисперсии регулируемой переменной; вместо нее минимизируется взвешенная сумма дисперсий регулируемой и управляемой переменных. Регуляторы, оптимизированные по такому критерию, будем именовать *регуляторами с минимальной обобщенной дисперсией*.

Ниже излагается методика расчета регуляторов с минимальной обобщенной дисперсией для объектов с запаздыванием и без него. Обычные регуляторы с минимальной дисперсией могут быть получены как частный случай при $\gamma=0$. Для описания формирующих фильтров используются параметрические модели, которые наиболее удобны при синтезе адаптивных алгоритмов управления, основанных на идентификации параметров.

14.1. РЕГУЛЯТОРЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Допустим, что объект управления имеет передаточную функцию

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}, \quad (14.1-1)$$

формирующий фильтр шума—

$$G_{pv}(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{\lambda D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{\lambda [1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_m z^{-m}]}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}}. \quad (14.1-2)$$

Предполагается, что $v(k)$ —это некоррелированный случайный сигнал, причем

$$E \{v(k) v(k+\tau)\} = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0; \end{cases} \quad (14.1-3)$$

$$E \{v(k)\} = \bar{v} = 0.$$

Структурная схема рассматриваемой системы управления представлена на рис. 14.1.1.

Будем считать, что задающее воздействие $w(k) = 0$; при этом $e(k) = -y(k)$. Требуется построить регулятор, обеспечивающий минимум критерия

$$I(k+1) = E \{y^2(k+1) + \mu u^2(k)\}. \quad (14.1-4)$$

Этот регулятор должен вырабатывать такую последовательность входных воздействий $u(k)$, которая минимизирует ошибку вида (14.1-4), вызванную случайным возмущением $\{v(k)\}$. Отметим, что

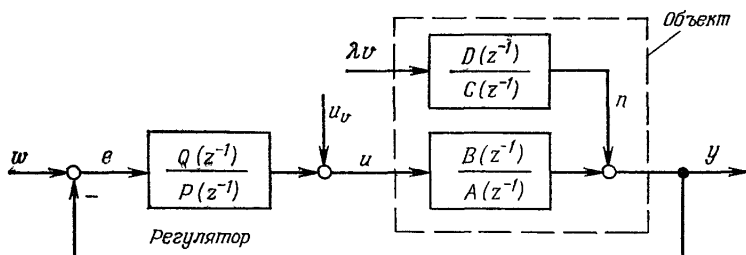


Рис. 14.1.1. Регулятор с минимальной обобщенной дисперсией в системе управления с объектом без запаздывания.

в критерии качества I используется величина $y(k+1)$, а не $y(k)$, поскольку в исходной модели $b_0=0$ (т. е. прямая передача отсутствует), в силу чего управляющее воздействие $u(k)$ не оказывает влияния на величину регулируемой переменной $y(k)$. Ввиду этого необходимо выразить $y(k+1)$ в функции ранее наблюдавшихся значений $y(k)$, $y(k-1)$, \dots ; $u(k)$, $u(k-1)$, \dots . Согласно уравнениям (14.1-1) и (14.1-2), *предсказанное значение* $y(k+1)$ можно получить из выражений

$$zy(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} zu(z) + \lambda \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} zv(z), \quad (14.1-5)$$

$$A(z^{-1})C(z^{-1})zy(z) = B(z^{-1})C(z^{-1})zu(z) + \lambda A(z^{-1})D(z^{-1})zv(z). \quad (14.1-6)$$

Последнее перепишем в развернутой форме:

$$\begin{aligned} & (1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m})(1 + c_1z^{-1} + \dots + c_mz^{-m})zy(z) = \\ & = (b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m})(1 + c_1z^{-1} + \dots + c_mz^{-m})zu(z) + \\ & + \lambda(1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m})(1 + d_1z^{-1} + \dots + d_mz^{-m})zv(z). \end{aligned} \quad (14.1-7)$$

Выполнив умножение и возвратившись во временную область, имеем

$$\begin{aligned} & y(k+1) + (a_1 + c_1)y(k) + \dots + a_m c_m y(k-2m+1) = \\ & = b_1 u(k) + (b_2 + b_1 c_1)u(k-1) + \dots + b_m c_m u(k-2m+1) + \\ & + \lambda [v(k+1) + (a_1 + d_1)v(k) + \dots + a_m d_m v(k-2m+1)]. \end{aligned} \quad (14.1-8)$$

Подставим полученное соотношение в критерий (14.1-4):

$$I(k+1) = E\{[-(a_1 + c_1)u(k) - \dots - a_m c_m u(k-2m+1) + b_1 u(k) + (b_2 + b_1 c_1)u(k-1) + \dots + b_m c_m u(k-2m+1) + \lambda[(a_1 + d_1)v(k) + \dots + a_m d_m v(k-2m+1)] + \lambda v(k+1)]^2 + \sigma u^2(k)\}. \quad (14.1-9)$$

В момент времени k все величины, входящие в (14.1-9), известны, за исключением $u(k)$ и $v(k+1)$. Поэтому, беря математическое ожидание последней, учтем, что она не зависит от остальных переменных:

$$I(k+1) = [-(a_1 + c_1)u(k) - \dots - a_m c_m u(k-2m+1) + b_1 u(k) + (b_2 + b_1 c_1)u(k-1) + \dots + b_m c_m u(k-2m+1) + \lambda[(a_1 + d_1)v(k) + \dots + a_m d_m v(k-2m+1)]]^2 + \lambda^2 E\{v^2(k+1)\} + 2\lambda[-(a_1 + c_1)u(k) - \dots + b_m c_m u(k-2m+1) + \lambda[(a_1 + d_1)v(k) + \dots + a_m d_m v(k-2m+1)]] \times E\{v(k+1)\} + \sigma u^2(k). \quad (14.1-10)$$

Оптимальное значение управляющей переменной $u(k)$ определим из условия

$$\frac{\partial I(k+1)}{\partial u(k)} = 2[-(a_1 + c_1)u(k) - \dots - a_m c_m u(k-2m+1) + b_1 u(k) + (b_2 + b_1 c_1)u(k-1) + \dots + b_m c_m u(k-2m+1) + \lambda[(a_1 + d_1)v(k) + \dots + a_m d_m v(k-2m+1)]] \times b_1 + 2\sigma u(k) = 0. \quad (14.1-11)$$

Преобразуем множитель при b_1 в уравнении (14.1-11), воспользовавшись соотношением (14.1-8):

$$[zy(z) - \lambda zv(z)] b_1 + \sigma u(z) = 0. \quad (14.1-12)$$

Подставив выражение (14.1-5) в (14.1-12)

$$\lambda zv(z) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} zy(z) - \frac{B(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} zu(z),$$

получим окончательный результат в виде передаточной функции регулятора с минимальной обобщенной дисперсией (далее он сокращенно именуется РМД1):

$$G_{\text{РМД1}}(z) = \frac{u(z)}{y(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = - \frac{A(z^{-1})[D(z^{-1}) - C(z^{-1})]z}{zB(z^{-1})C(z^{-1}) + \frac{\sigma}{b_1} A(z^{-1})D(z^{-1})}. \quad (14.1-13)$$

Как следует из (14.1-13), в описание этого регулятора входят элементы модели объекта управления (полиномы $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$)

и модели случайного возмущения (полиномы $s(z^{-1})$ и $D(z^{-1})$). При $r=0$ (14.1-13) дает упрощенный вариант регулятора с минимальной дисперсией (сокращенное обозначение — РМД2):

$$G_{\text{РМД2}}(z) = - \frac{A(z^{-1}) [D(z^{-1}) - C(z^{-1})] z}{zB(z^{-1}) C(z^{-1})} = - \frac{zA(z^{-1})}{zB(z^{-1})} \left[\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} - 1 \right]. \quad (14.1-14)$$

В случае $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$, рассмотренном в работе [12.4], передаточная функция регулятора, обозначаемого РМД3, приобретает вид

$$G_{\text{РМД3}}(z) = - \frac{[D(z^{-1}) - A(z^{-1})] z}{zB(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} D(z^{-1})}. \quad (14.1-15)$$

При $r=0$ (14.1-15) переходит в передаточную функцию регулятора РМД4:

$$G_{\text{РМД4}}(z) = - \frac{[D(z^{-1}) - A(z^{-1})] z}{zB(z^{-1})}. \quad (14.1-16)$$

Синтезированные регуляторы существенно отличаются по своим характеристикам.

а) Порядки передаточных функций

	Числитель	Знаменатель
РМД1	$2m-1$	$2m$
РМД2	$2m-1$	$2m-1$
РМД3	$m-1$	m
РМД4	$m-1$	$m-1$

Ввиду того что регуляторы РМД1 и РМД2 имеют более высокий порядок по сравнению с РМД3 и РМД4, предпочтительнее пользоваться моделью шума со знаменателем $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$.

б) Сокращение полюсов и нулей

Эффекты, возникающие в системах с регуляторами и объектами управления, у которых имеются близкие или совпадающие нули и полюса, обсуждались в гл. 6. Принимая во внимание результаты этого анализа, можно установить следующее:

РМД1: Сокращению подвергаются полюса объекта управления ($A(z^{-1})=0$). Следовательно, регулятор этого типа нельзя использовать для управления неустойчивыми объектами или объектами с малым запасом устойчивости.

РМД2: Сокращаются как полюса, так и нули объекта управления ($A(z)=0$; $B(z)=0$). Это означает, что данный регулятор ограничен тем же классом объектов, что и РМД1. Кроме того, он не может

применяться для управления объектами с неминимально-фазовыми звеньями.

РМД3: Ограничений нет.

РМД4: Сокращаются нули объекта ($B(z^{-1})=0$). Следовательно, регулятор этого типа нельзя использовать с объектами, имеющими неминимально-фазовые характеристики.

Таким образом, наиболее универсальным является регулятор типа РМД3.

в) Устойчивость

Будем полагать, что ограничения п. а) соблюдены. Характеристическое уравнение замкнутого контура управления $1 - G_R(z^{-1})G_P(z^{-1})=0$ с регулятором РМД1 или РМД2 имеет вид

$$\left[\frac{r}{b_1} A(z^{-1}) + zB(z^{-1}) \right] D(z^{-1}) z^{2m} = \left[\frac{r}{b_1} A(z) + zB(z) \right] D(z) = 0. \quad (14.1-17)$$

Устойчивость контура управления обеспечивается при выполнении следующих условий:

РМД1 и РМД3 ($r \neq 0$):

- Нули полинома числителя $D(z)$ передаточной функции формирующего фильтра шума должны располагаться внутри единичной окружности на плоскости z .
- Нули полинома $\left[\frac{r}{b_1} A(z) + zB(z) \right]$ должны располагаться внутри единичной окружности. Чем больше весовой коэффициент r , с которым входит управляющая переменная в критерий качества, тем ближе эти нули к корням полинома $A(z)$, иначе говоря, к полюсам объекта управления.

РМД2 и РМД4 ($r = 0$):

- При $r = 0$ характеристическое уравнение замкнутого контура переходит в $zB(z)D(z) = 0$.
- Таким образом, необходимо, чтобы нули числителей передаточных функций объекта $B(z)$ и формирующего фильтра шума $D(z)$ лежали внутри единичной окружности.
- Полюса формирующего фильтра (т. е. корни уравнения $C(z) = 0$) не влияют на характеристическое уравнение замкнутого контура с регулятором РМД2. Поэтому на распределение этих полюсов не накладывается никаких ограничений.

г) Динамический показатель регулирования

Для регулятора РМД1 данный показатель определяется формулой

$$R(z) = \frac{y(z)}{n(z)} = \frac{1}{1 - G_R(z)G_P(z)} \frac{zB(z^{-1})C(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1})D(z^{-1})}{\left[\frac{r}{b_1} A(z^{-1}) + zB(z^{-1}) \right] D(z^{-1})}. \quad (14.1-18)$$

При $\gamma = 0$ (т. е. для регулятора РМД2) эта формула приобретает вид

$$R(z) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{1}{G_{P_v}(z)} \lambda. \quad (14.1-19)$$

Рассматриваемый показатель при $\gamma = 0$ связан обратной пропорцией с передаточной функцией формирующего фильтра шума. Нетрудно видеть, что

$$G_v(z^{-1}) = \frac{y(z)}{\lambda_v(z)} = R(z) G_{P_v}(z) \frac{1}{\lambda} = 1. \quad (14.1-20)$$

Следовательно, замкнутый контур ведет себя подобно системе с передаточной функцией, обратной по отношению к передаточной функции формирующего фильтра. Полюса и нули модели объекта управления не входят в выражение (14.1-19), поскольку они сокращаются с полюсами и нулями регулятора. Тем не менее с увеличением веса управляющей переменной γ полюса объекта, как следует из соотношения (14.1-18), оказывают все большее воздействие на динамику замкнутого контура.

д) Регулируемая переменная $y(k)$

В контуре управления с регулятором типа РМД1 влияние случайного возмущения на регулируемую переменную характеризуется передаточной функцией

$$G_v(z^{-1}) = \frac{y(z)}{\lambda_v(z)} = \frac{\frac{1}{\lambda} G_{P_v}(z)}{1 - G_R(z) G_P(z)} = \frac{\frac{\gamma}{b_1} A(z^{-1}) D(z^{-1}) + zB(z^{-1}) C(z^{-1})}{\left[\frac{\gamma}{b_1} A(z^{-1}) + zB(z^{-1}) \right] C(z^{-1})} = 1 + \frac{\frac{\gamma}{b_1} A(z^{-1}) \left[D(z^{-1}) - C(z^{-1}) \right]}{\left[\frac{\gamma}{b_1} A(z^{-1}) + zB(z^{-1}) \right] C(z^{-1})}. \quad (14.1-21)$$

При $\gamma \neq 0$ регулируемая переменная $y(k)$ представляет собой авторегрессионный процесс со скользящим средним порядка $2m$ для РМД1 и порядка m для РМД3. Устремляя γ к нулю, т. е. переходя к регуляторам РМД2 и РМД4, видим, что в пределе $y(z) \rightarrow \lambda_v(z)$. Таким образом, при $\gamma = 0$ регулируемая переменная превращается в процесс с независимыми значениями, т. е. в белый шум, обладающий дисперсией $\sigma_y^2 = \lambda^2 \sigma_v^2$. Чем меньше становится весовой коэффициент γ при управляющей переменной, тем меньше дисперсия регулируемой переменной $y(k)$ и тем ближе последняя к белому шуму $\lambda_v(k)$. Следовательно, наименьшее значение σ_y^2 , которое можно получить при использовании регуляторов с минимальной дисперсией, равно

$$\min \text{var} [y(k)] = \lambda^2. \quad (14.1-22)$$

е) Особый случай

Если $D(z^{-1})=C(z^{-1})$, передаточные функции всех рассматриваемых регуляторов с минимальной дисперсией обращаются в нуль. Действительно, в том случае, когда статистически независимый шум $p(k)=\lambda v(k)$ непосредственно воздействует на регулируемую переменную, никакой регулятор не способен снизить ее дисперсию. Дисперсию можно уменьшить лишь при наличии «окрашенного» шума, и, чем сильнее он «окрашен», т. е. чем больше разность $[D(z^{-1})-C(z^{-1})]$, тем значительнее эффект от введения в контур управления регулятора с минимальной дисперсией.

ж) Поведение регуляторов с минимальной дисперсией в присутствии случайного возмущения с постоянной составляющей $E\{v(k)\} \neq 0$

Статистический коэффициент усиления регулятора РМД1 можно найти из уравнения (14.1-13), подставив $z=1$:

$$G_{\text{РМД1}}(1) = - \frac{A(1)[D(1)-C(1)]}{B(1)C(1) + \frac{r}{b_f} A(1)D(1)} = \frac{\Sigma a_i [\Sigma d_i - \Sigma c_i]}{\Sigma b_i \Sigma c_i - \frac{r}{b_f} \Sigma a_i \Sigma d_i}. \quad (14.1-23)$$

В этой формуле Σ обозначает $\sum_{i=0}^m$. Если объект управления в установившемся состоянии ведет себя подобно статическому звену, т. е. если $\Sigma a_i \neq 0$ и $\Sigma b_i \neq 0$, то аналогичные свойства проявляет и регулятор РМД1. Следовательно, присутствие детерминированной составляющей в случайном возмущении приводит к возникновению постоянного смещения регулируемой переменной. Этот эффект имеет место и в системах с регуляторами РМД2, РМД3 и РМД4. Для того чтобы устранить смещение, структуру регуляторов с минимальной дисперсией следует несколько видоизменить. Данный вопрос обсуждается в разделе 14.3.

Основные характеристики описанных регуляторов представлены в табл. 14.1.1. Их анализ позволяет заключить, что в целом наилучшими свойствами обладает регулятор типа РМД3.

Таким образом, при практической реализации регуляторов с минимальной дисперсией целесообразно рассматривать случай $C(z^{-1})=A(z^{-1})$. При выводе уравнений регуляторов предполагалось, что $b_0=0$. Если это условие не выполняется, т. е. $b_0 \neq 0$, достаточно заменить b_1 на b_0 и использовать далее $B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$.

з) Выбор весового коэффициента

Для того чтобы оценить влияние коэффициента r на величину управляющей переменной, определим первое значение сигнала $u(0)$, полагая, что на вход замкнутого контура управления подается сту-

Таблица 14.1.1

Характеристики регуляторов с минимальной дисперсией
($A^- = 0$ обозначает, что корни полинома A располагаются
либо на единичной окружности, либо вне ее)

Тип регулятора	G_R	Условия возможной потери устойчивости	Условия неустойчивости	Условия отсутствия смещения	
				$w=p=u_v=1$	$w=p=1$
РМД1	$-\frac{zA[D-C]}{zBC + \frac{r}{b_1}AD}$	$A^- = 0$	$D^- = 0$	—	—
РМД2	$r=0$ $-\frac{zA(D-C)}{zBC}$	$A^- = 0$ $B^- = 0$	$D^- = 0$ $B^- = 0$	$C(1) = 0$	$C(1) = 0$
РМД3	$C=A$ $-\frac{z[D-A]}{zB + \frac{r}{b_1}D}$	—	$D^- = 0$	—	$A(1) = 0$
РМД4	$C=A$ $r=0$ $-\frac{z[D-A]}{zB}$	$B^- = 0$	$D^- = 0$ $B^- = 0$	—	$A(1) = 0$

пенчатый сигнал $w(k) = 1(k)$. Из уравнения (5.2-30) следует, что в этом случае $u(0) = q_0 w(0) = q_0$. Очевидно, величина сигнала на входе объекта однозначно определяется показателем q_0 . Если алгоритм управления записан в форме обобщенного линейного регулятора (11.1-1), то для РМД1

$$q_0 = \frac{d_1 - c_1}{b_1 + \frac{r}{b_1}}; \quad (14.1-24)$$

для РМД3

$$q_0 = \frac{d_1 - a_1}{b_1 + \frac{r}{b_1}}. \quad (14.1-25)$$

Из этих формул видно, что при $r/b_1 \gg b_1$ коэффициент q_0 приблизительно обратно пропорционален отношению r/b_1 . При $r=0$ имеем $q_0 = (d_1 - c_1)/b_1$ (регулятор РМД2) и $q_0 = (d_1 - a_1)/b_1$ (регулятор РМД4). Эти значения можно уменьшить вдвое, взяв

$$r = b_1^2. \quad (14.1-26)$$

Величину b_1 можно оценить, подавая на вход объекта постоянный входной сигнал u_0 . При этом $b_1 = y(1)/u_0$. Если модель объекта управления содержит запаздывание (см. раздел 14.2), получаем одну и ту же формулу как для РМД1-з, так и для РМД3-з:

$$q_0 = \frac{l_0}{b_1 + \frac{r}{b_1}}. \quad (14.1-27)$$

14.2. РЕГУЛЯТОРЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Объект управления может описываться передаточной функцией, учитывающей наличие запаздывания:

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d}. \quad (14.2-1)$$

Структура системы управления с объектом такого типа изображена на рис. 14.2.1. В систему включен фильтр, формирующий

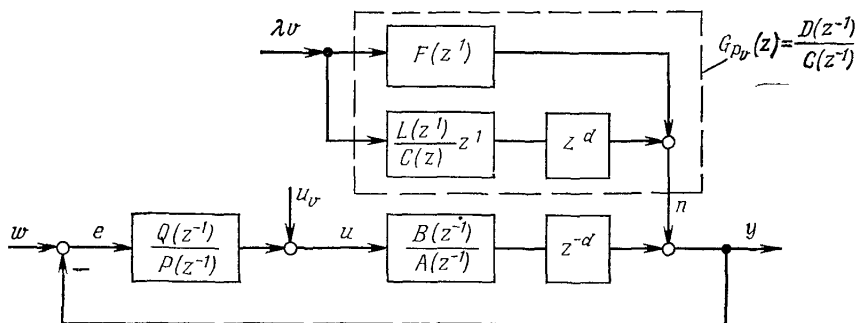


Рис. 14.2.1. Регулятор с минимальной дисперсией в системе управления с объектом, содержащим запаздывание.

в соответствии с уравнением (14.1-2) случайное возмущение $p(k)$ из белого шума $v(k)$ с характеристиками (14.1-3). Поскольку управляющая переменная $u(k)$, подаваемая на вход объекта с запаздыванием d , оказывает воздействие на значения регулируемой переменной, начиная лишь с $y(k+d+1)$, используем в данном случае критерий

$$I(k+1) = E \{y^2(k+d+1) + ru^2(k)\}. \quad (14.2-2)$$

Согласно (14.1-5), предсказанное значение $y(k+d+1)$ можно определить из соотношения

$$z^{(d+1)}y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} zu(z) + \lambda \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} z^{(d+1)}v(z). \quad (14.2-3)$$

В момент времени k , для которого рассчитывается управление $u(k)$, значения случайного шума $v(k+1), \dots, v(k+d+1)$

еще неизвестны. Учитывая это, разделим выражение, описывающее формирующий фильтр в (14.2-3), на две части:

$$z^{(d+1)} y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z u(z) + \lambda \left[F(z^{-1}) z^{(d+1)} + \frac{L(z^{-1})}{C(z^{-1})} \right] v(z). \quad (14.2-4)$$

На рис. 14.2.1 формирующий фильтр также представлен в виде двух составляющих: $F(z^{-1})$, описывающей ту часть последовательности значений $p(k)$, которые не могут быть подавлены за счет $u(k)$, и $z^{-(d+1)} L(z^{-1})/C(z^{-1})$, соответствующей тем значениям $p(k)$ в $y(k)$, на которые $u(k)$ воздействует. Введенные в (14.2-4) полиномы имеют вид

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_d z^{-d}, \quad (14.2-5)$$

$$L(z^{-1}) = l_0 + l_1 z^{-1} + \dots + l_{m-1} z^{-(m-1)}. \quad (14.2-6)$$

Их параметры можно определить путем непосредственного сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z в уравнении

$$D(z^{-1}) = F(z^{-1}) C(z^{-1}) + z^{-(d+1)} L(z^{-1}). \quad (14.2-7)$$

Пример 14.2.1. При $m=3$ и $d=1$ из выражения (14.2-7) получаем

$$f_1 = d_1 - c_1, \quad l_0 = d_2 - c_2 - c_1 f_1, \quad l_1 = d_3 - c_3 - c_2 f_1, \quad l_2 = -c_3 f_1,$$

а при $m=3$ и $d=2$:

$$f_1 = d_1 - c_1, \quad f_2 = d_2 - c_2 - c_1 f_1, \quad l_0 = d_3 - c_3 - c_1 f_2 + c_2 f_1, \\ l_1 = -c_2 f_2 - c_3 f_1, \quad l_2 = -c_3 f_2$$

Для того чтобы определить коэффициенты полиномов при $m=2$, достаточно положить $c_3 = d_3 = 0$; при $m=1$ $c_2 = d_2 = c_3 = d_3 = 0$.

Уравнение (14.2-4) можно переписать в форме

$$A(z^{-1}) C(z^{-1}) z^{(d+1)} y(z) = B(z^{-1}) C(z^{-1}) z u(z) + \\ + \lambda F(z^{-1}) A(z^{-1}) C(z^{-1}) z^{(d+1)} v(z) + \lambda L(z^{-1}) A(z^{-1}) v(z). \quad (14.2-8)$$

По аналогии с уравнениями (14.1-7) — (14.1-10) произведем перемножение полиномов и, вернувшись во временную область, получим выражение для $I(k+1)$. Из условия $\partial I(k+1)/\partial u(k) = 0$ следует

$$[z^{(d+1)} y(z) - \lambda F(z^{-1}) z^{(d+1)} v(z)] b_1 + \gamma u(z) = 0. \quad (14.2-9)$$

Подставим в (14.2-9) выражение для $z^{(d+1)} y(z)$ из уравнения (14.2-8):

$$\lambda v(z) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} y(z) - \frac{B(z^{-1}) C(z^{-1})}{A(z^{-1}) D(z^{-1})} z^{-d} u(z).$$

Отсюда имеем окончательный результат в виде передаточной функции

$$\begin{aligned} G_{\text{РМД1-3}}(z) &= \frac{u(z)}{y(z)} = - \frac{A(z^{-1}) [D(z^{-1}) - F(z^{-1}) C(z^{-1})] z^{(d+1)}}{zB(z^{-1}) C(z^{-1}) F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1}) D(z^{-1})} = \\ &= - \frac{A(z^{-1}) L(z^{-1})}{zB(z^{-1}) C(z^{-1}) F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1}) D(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (14.2-10)$$

При $r=0$ (14.2-10) переходит в передаточную функцию

$$G_{\text{РМД2-3}}(z) = - \frac{A(z^{-1}) L(z^{-1})}{zB(z^{-1}) C(z^{-1}) F(z^{-1})}. \quad (14.2-11)$$

Если $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$, то при $r \neq 0$ (14.2-10) дает

$$G_{\text{РМД3-3}}(z) = - \frac{L(z^{-1})}{zB(z^{-1}) F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} D(z^{-1})}, \quad (14.2-12)$$

а при $r=0$

$$G_{\text{РМД4-3}}(z) = - \frac{L(z^{-1})}{zB(z^{-1}) F(z^{-1})}. \quad (14.2-13)$$

Перечислим основные особенности регуляторов для объектов с запаздыванием ($d \neq 0$).

а) Порядки передаточных функций

РМД1-3 и РМД2-3. Числитель: $2m-1$;
знаменатель: $2m+d-1$ ($d \geq 1$).

РМД3-3 и РМД4-3. Числитель: $m-1$;
знаменатель: $m+d-1$ ($d \geq 1$).

б) Сокращение полюсов и нулей

Явления, аналогичные тем, что возникают в системах с объектами без запаздывания.

в) Устойчивость

Запишем характеристические уравнения регуляторов РМД1-3 и РМД3-3:

$$\left[\frac{r}{b_1} A(z) + zB(z) \right] D(z) = 0, \quad (14.2-14)$$

а также регуляторов РМД2-3 и РМД4-3:

$$zB(z) D(z) = 0. \quad (14.2-15)$$

Очевидно, данные уравнения совпадают с соответствующими характеристическими уравнениями регуляторов для объектов без

запаздывания. Следовательно, все выводы относительно устойчивости систем с этими регуляторами остаются в силе.

в) Динамический показатель регулирования

Для регулятора РМД1-з данный показатель определяется выражением

$$R(z) = \frac{y(z)}{n(z)} = \frac{zB(z^{-1})C(z^{-1})F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1}A(z^{-1})D(z^{-1})}{\left[\frac{r}{b_1}A(z^{-1}) + zB(z^{-1}) \right]D(z^{-1})}. \quad (14.2-16)$$

При $r=0$ (для РМД2-з) имеем

$$R(z) = \frac{C(z^{-1})F(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{\lambda}{G_{P_v}(z)} F(z^{-1}) = 1 - z^{-(d+1)} \frac{L(z^{-1})}{D(z^{-1})}. \quad (14.2-17)$$

Из (14.2-17) следует, что динамический показатель регулирования, как и прежде, обратно пропорционален передаточной функции формирующего фильтра. Однако на этот раз в нем присутствует множитель $F(z^{-1})$, учитывающий те члены последовательности случайных возмущений $v(k+1) \dots v(k+d+1)$, которые не могут быть подавлены с помощью управления $u(k)$.

д) Регулируемая переменная

Для систем с регуляторами РМД2-з и РМД4-з (случай $r=0$) отношение полезного сигнала к шуму выражается формулой

$$\frac{y(z)}{\lambda v(z)} = R(z) G_{P_v}(z) \frac{1}{\lambda} = F(z^{-1}). \quad (14.2-18)$$

Таким образом, $y(k)$ представляет собой процесс со скользящим средним:

$$y(k) = [v(k) + f_1 v(k-1) + \dots + f_d v(k-d)] \lambda, \quad (14.2-19)$$

причем его дисперсия равна

$$\text{var}[y(k)] = E\{y^2(k)\} = [1 + f_1^2 + \dots + f_d^2] \lambda^2. \quad (14.2-20)$$

Очевидно, что увеличение продолжительности запаздывания должно приводить к росту дисперсии регулируемой переменной.

14.3. РЕГУЛЯТОРЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ БЕЗ СТАТИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ

Для того чтобы постоянные внешние возмущения или ступенчатые изменения задающей переменной не приводили к появлению постоянных смещений регулируемой переменной, передаточная функция регулятора должна удовлетворять условию (см. гл. 4)

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty. \quad (14.3-1)$$

Поскольку это условие не выполняется для синтезированных регуляторов с минимальной дисперсией, в их структуру должны быть внесены некоторые изменения. Ниже излагаются три метода построения регуляторов без статического смещения.

14.3.1. Введение дополнительного интегрирующего члена

В простейшем случае для устранения статических смещений достаточно включить в передаточную функцию регулятора с минимальной дисперсией полюс в точке $z=1$. Более гибким методом является введение в регулятор

$$G_{\text{МД}}(z) = \frac{u'(z)}{y(z)} \quad (14.3-2)$$

звена пропорционально-интегрирующего типа, описываемого передаточной функцией

$$G_{\text{ПИ}}(z) = \frac{u(z)}{u'(z)} = 1 + \frac{\alpha}{z-1} = \frac{1-(1-\alpha)z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (14.3-3)$$

Это равносильно добавлению разностного уравнения

$$u(k) - u(k-1) = u'(k) - (1-\alpha)u'(k-1). \quad (14.3-4)$$

Варьируя коэффициент α , можно получать регуляторы с различными свойствами:

$\alpha=0$: $u(k) = u'(k)$ — регулятор П-типа;
 $\alpha=1$: $u(k) - u(k-1) = u'(k)$ — регулятор ПИ-типа с равными весами И- и П-звеньев.

Если $\alpha \neq 0$, условие

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G_{\text{МД}}(z) G_{\text{ПИ}}(z) = \infty$$

выполняется для регуляторов РМД1 и РМД2 при $D(1) \neq C(1)$, а для РМД3 и РМД4 — при $D(1) \neq A(1)$. В тех случаях, когда указанные соотношения между полиномами не соблюдаются, можно изменять их, вводя дополнительные полюса при $z=1$:

в РМД2 $C'(z) = (z-1)C(z)$;
 в РМД3 и РМД4 $A'(z) = (z-1)A(z)$.

Данный способ не дает желаемого эффекта лишь для регулятора РМД1.

Включение в регулятор звеньев интегрирующего типа позволяет избавиться от статического смещения. В то же время это приводит к возрастанию дисперсии переменной $y(k)$, особенно в случае высокочастотного возмущения $v(k)$. Надлежащим выбором α можно добиться оптимального соотношения между этими явлениями.

14.3.2. Минимизация ошибки регулирования

Синтез регуляторов с минимальной дисперсией в разделе 14.2 проводился в предположении, что задающий сигнал отсутствует, т. е. $w(k)=0$, ввиду чего $y(k)=-e(k)$. Используя расширенный критерий качества

$$I(k+1) = E \{ [y(k+d+1) - w(k)]^2 + r [u(k) - u_w(k)]^2 \}, \quad (14.3-5)$$

можно минимизировать дисперсию регулируемой переменной в рабочей точке $[w(k); u_w(k)]$, соответствующей ненулевому задающему сигналу. Здесь величина

$$u_w(k) = \frac{A(1)}{B(1)} w(k) = \frac{1}{K_P} w(k) \quad (14.3-6)$$

равна такому значению $u(k)$, при котором отсутствует статическое смещение, т. е. $y(k)=w(k)$. Выполнив те же преобразования, что и в разделе 14.2, получим уравнение модифицированного регулятора с минимальной дисперсией [14.2]:

$$u(z) = \frac{L(z^{-1}) [D(z^{-1}) - C(z^{-1})] z}{zB(z^{-1})C(z^{-1})F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1})D(z^{-1})} y(z) + \underbrace{\hspace{10em}}_{G_{РМД1-3}(z)} + \frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{zB(z^{-1})C(z^{-1})F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1})D(z^{-1})} \left(1 + \frac{r}{b_1} \frac{1}{K_P} \right) w(z). \quad (14.3-7)$$

Данный регулятор обеспечивает устранение смещений, возникающих в результате изменения задающей переменной $w(k)$. Другой подход к построению регуляторов с аналогичными свойствами, основанный на оценивании параметров замкнутого контура управления, изложен в разделе 25.3.

14.4. РЕГУЛЯТОРЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ ТИПА ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Полученные в разделе 14.2 регуляторы с минимальной дисперсией обладают оптимальной структурой по отношению к объектам вида $B(z^{-1})z^{-d}/A(z^{-1})$ и формирующим фильтрам шума $D(z^{-1})/C(z^{-1})$. При их выводе предполагалось, что объект описывается разностным уравнением, в котором учтено наличие запаздывания. Как следует из уравнений (14.2-18) — (14.2-20), в этом случае в системах с регуляторами РМД2-з и РМД3-з регулируемая переменная представляет собой процесс со скользящим средним порядка d , причем его дисперсия резко возрастает с увеличением d .

Здесь мы рассмотрим регуляторы с минимальной дисперсией применительно к объектам, которые, как и в разделе 9.2.2, описываются моделями типа чистого запаздывания:

$$G_p(z) = B(z^{-1})z^{-(d-1)} = b_1 z^{-1} z^{-(d-1)} = b_1 z^{-d}. \quad (14.4-1)$$

Воспользовавшись результатами раздела 14.2, получим следующие уравнения регуляторов (ср. с уравнением (9.1-4)):

а) Формирующий фильтр шума имеет вид $G_{P_v} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}$.

$$G_{PMD1-3} = - \frac{L(z^{-1})}{b_1 C(z^{-1}) F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} D(z^{-1})}, \quad (14.4-2)$$

$$G_{PMD2-3} = - \frac{L(z^{-1})}{b_1 C(z^{-1}) F(z^{-1})}, \quad (14.4-3)$$

где, согласно (14.2-5),

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{d-1} z^{-(d-1)}. \quad (14.4-4)$$

В соответствии с (14.2-7) полиномы, входящие в формулы (14.4-2) и (14.4-3), связаны соотношением

$$D(z^{-1}) = F(z^{-1}) C(z^{-1}) + z^{-d} L(z^{-1}). \quad (14.4-5)$$

Следовательно, передаточные функции регуляторов отличаются от нуля только в тех случаях, когда полином $C(z^{-1})$ имеет порядок $m \geq 1$ и/или $D(z^{-1})$ — порядок $m \geq d$.

б) Формирующий фильтр шума имеет вид $G_{P_v}(z^{-1}) = D(z^{-1})$; $C(z^{-1}) = A(z^{-1}) = 1$.

$$G_{PMD3-3}(z) = - \frac{L(z^{-1})}{b_1 F(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} D(z^{-1})}; \quad (14.4-6)$$

$$G_{PMD4-3}(z) = - \frac{L(z^{-1})}{b_1 F(z^{-1})}. \quad (14.4-7)$$

Согласно уравнению (14.2-7), в данном случае $L(z^{-1})=0$ (т. е. регулятор нереализуем), если у полинома $D(z^{-1})$ порядок $m \leq d-1$. Это еще раз подтверждает принцип, лежащий в основе синтеза регуляторов с минимальной дисперсией. Он состоит в получении оценки регулируемой переменной $y(k+d+1)$ по известным значениям $u(k-1)$, $u(k-2)$, ... и $v(k-1)$, $v(k-2)$, Предсказанная оценка используется далее для вычисления управляющего сигнала $u(k)$. В соответствии с уравнениями (14.2-4) и (14.2-19) значения регулируемой переменной и элементов последовательности случайного шума связаны соотношением

$$y_v(k+d+1) = [v(k+d) + f_1 v(k+d-1) + \dots + f_{d-1} v(k+1)] \lambda. \quad (14.4-8)$$

Очевидно, данная величина при $m \leq d-1$ не поддается оценке, ввиду чего регулирование невозможно. Если $m=d-1$, то

$$y_v(k+d+1) = [v(k+d) + d_1 v(k+d-1) + \dots + d_{d-1} v(k+1)] \lambda. \quad (14.4-9)$$

В этом случае $D(z^{-1})=F(z^{-1})$, т. е. возмущающий сигнал содержит только те составляющие, на которые не воздействует управление $u(k)$. Следовательно, регулятор с минимальной дисперсией при $m=d-1$ не оказывает никакого влияния на функционирование замкнутого контура управления. Только при $m \geq d$ регулятор этого типа позволяет уменьшить дисперсию $y(k)$ по сравнению с той, которая наблюдается на выходе разомкнутого контура.

Таким образом, если модель объекта управления представляет собой чистое запаздывание, регуляторы с минимальной дисперсией способны повысить качество управления лишь в том случае, когда возмущение $p(k)$, действующее на $y(k)$, является авторегрессионным процессом со скользящим средним (окрашенным шумом) или процессом со скользящим средним порядка $m \geq d$.

14.5. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В этом разделе представлены данные экспериментального исследования свойств регуляторов с минимальной дисперсией. Они получены в результате моделирования на ЭВМ контуров управления тестовым объектом второго порядка с регуляторами РМДЗ и РМД4.

Объект VII (низкочастотный фильтр второго порядка)

$$\left. \begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 1,036z^{-1} + 0,263z^{-2} \\ B(z^{-1}) &= 0,1387z^{-1} + 0,0889z^{-2} \\ D(z^{-1}) &= 1 + 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2} \end{aligned} \right\}. \quad (14.5-1)$$

Полиномы $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$ получены путем дискретизации передаточной функции

$$G(s) = \frac{1}{(1+7,5s)(1+5s)}$$

с тактом квантования $T_0=4$ с.

В процессе моделирования контура управления с регулятором РМД4, описываемого уравнением (14.1-5), оценивались средние квадратичные отклонения сигнала помехи $p(k)$, регулируемой переменной $y(k)$ и сигнала на входе объекта $u(k)$. Значения весовых коэффициентов при входной переменной и интегральной составляющей регулятора (14.1-25) изменялись в пределах $\gamma=0-0,5$ и $\alpha=0-0,8$ соответственно. Определялась зависимость показателя стохастического управления

$$\kappa = \sqrt{y^2(k)} / \sqrt{p^2(k)} \quad (14.5-2)$$

от величины

$$S_u = \sqrt{u^2(k)}.$$

На рис. 14.5.1 построены кривые, полученные в результате усреднения по 150 реализациям. Анализ этих графиков позволяет сделать следующие выводы:

— Наилучшее качество управления (минимальное значение показателя κ) достигается при $\gamma=0$ и $\alpha=0$, т. е. с помощью регулятора типа РМД4.

— При небольшом увеличении весового коэффициента γ до 0,01—0,02 среднее квадратичное значение управляющей переменной снижается на 48—60% по сравнению с тем, которое наблюдается

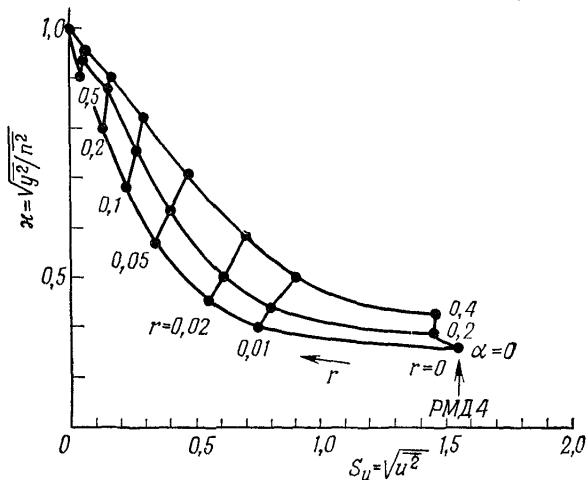


Рис. 14.5.1. Зависимость показателя κ от затрат на управление S_u для объекта VII с регулятором РМД4 при различных значениях весовых коэффициентов γ и α .

при $\gamma=0$. В то же время эффективная величина регулируемой переменной возрастает незначительно, всего на 12—17% (все приведенные цифры соответствуют $\alpha=0$). Лишь при $\gamma \geq 0,03$ показатель κ начинает заметно расти.

— Если значения весового коэффициента при интегральной составляющей регулятора невелики ($\alpha \leq 0,2$), с его уменьшением эффективная величина регулируемой переменной несколько увеличивается (на 3—18%, в зависимости от γ). Однако при $\alpha > 0,3$ показатель эффективности стохастического управления резко возрастает.

На рис. 14.5.2, а показан фрагмент реализации случайной помехи $p(k)$ при $\lambda=0,1$, а также соответствующие значения сигналов управления $p(k)$ и регулируемой переменной $y(k)$, полученные для регулятора типа РМД4 ($\gamma=0$) с передаточной функцией

$$G_{\text{РМД4}}(z) = - \frac{11,0743 - 0,0981z^{-1}}{1 + 0,6410z^{-1}}$$

и для регулятора РМД3 ($\gamma=0,02$) с передаточной функцией

$$G_{\text{РМД3}}(z) = - \frac{5,4296 - 0,0481z^{-1}}{1 + 0,569z^{-1} + 0,1274z^{-2}}$$

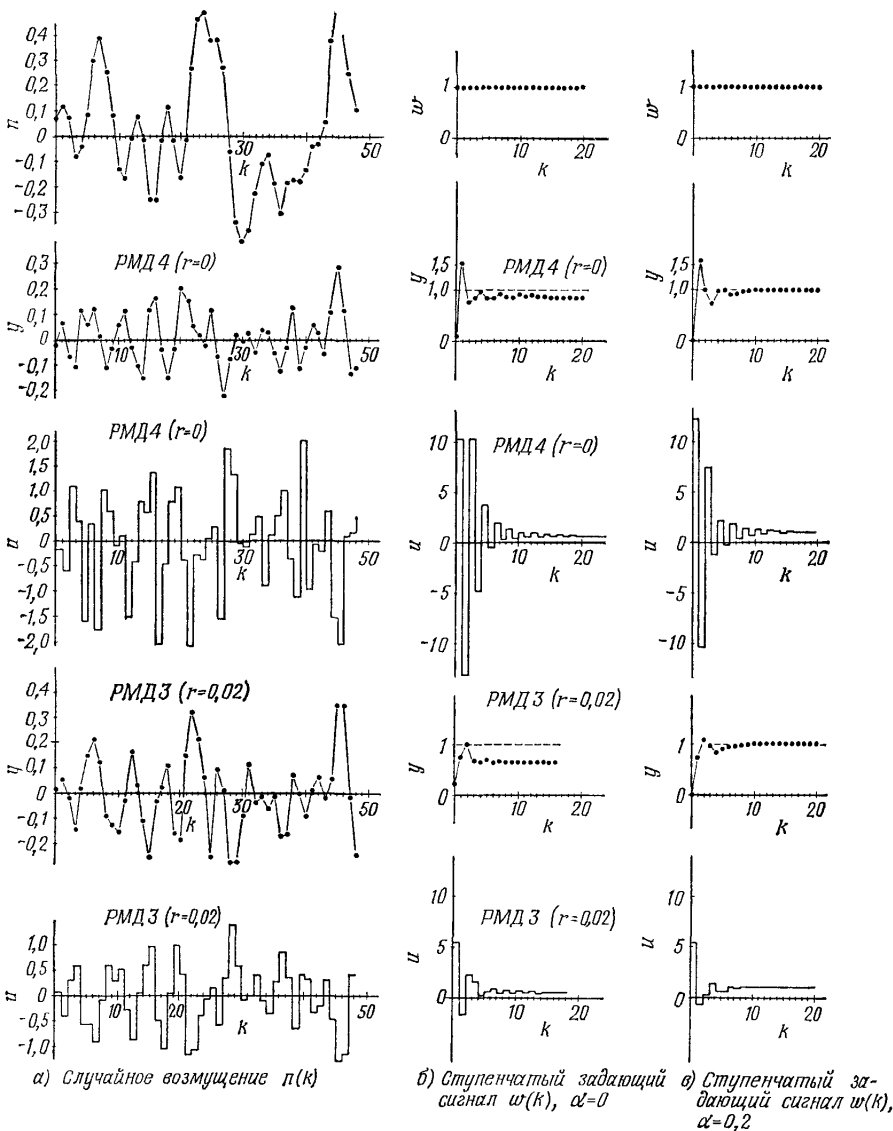


Рис. 14.5.2. Переходные процессы в контурах управления объектом VII с регуляторами РМДЗ и РМД4.

Из приведенных графиков видно, что величина среднего квадратичного отклонения у регулируемой переменной $y(k)$ существенно ниже, чем у возмущения $p(k)$, причем особенно заметно сглаживаются выбросы значительной амплитуды. Однако указанный эффект

достигается за счет подачи больших управляющих сигналов $p(k)$. При переходе к регулятору РМДЗ, рассчитанному для $r=0,02$, амплитуды сигналов управления уменьшаются, но в то же время несколько возрастают максимальные значения регулируемой переменной.

На рис. 14.5.2, б показано, как изменяются регулируемая и управляющая переменные, если на вход системы поступает ступенчатый задающий сигнал. Сигнал управления, формируемый регу-

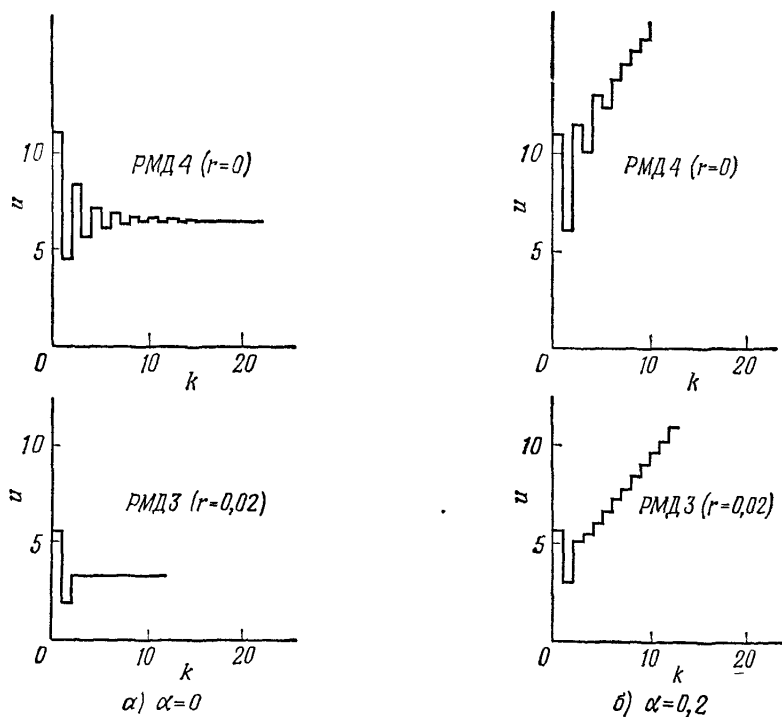


Рис. 14.5.3. Переходные процессы в контурах управления объектом VII с регуляторами РМДЗ и РМД4 при различных r и α .

лятором РМД4, отличается в этом случае высокой колебательностью и значительной амплитудой. Колебания проявляются и на выходе объекта; имеется также статическое смещение. В аналогичных условиях апериодический регулятор АР (v) выдает входной сигнал с максимальной амплитудой $u(0) = 1/(b_1 + b_2) = 4,4$; значения входных сигналов, генерируемых регулятором РМД4, более чем вдвое превышают эту величину. Кроме того, контур управления, на выходе которого наблюдается статическое смещение при подаче детерминированного ступенчатого сигнала $w(k)$, не отвечает требованиям,

предъявляемым к качеству регулирования. Характеристики управления, получаемого с помощью регулятора РМДЗ при $\gamma=0,02$, значительно лучше. Однако и в этом случае амплитуда сигнала $u(0)$ превосходит соответствующее значение для регулятора АР (ν), а величина смещения даже больше, чем в контуре с регулятором РМД4.

Как видно из рис. 14.5.2, в, при введении $\alpha=0,2$ смещение исчезает, а регулируемая и управляющая переменные изменяются более плавно, чем при $\alpha=0$ (см. рис. 14.5.2, б). Графики переходных процессов на выходе регуляторов при различных сочетаниях параметров изображены на рис. 14.5.3.

Моделирование на ЭВМ было проведено также для объекта III (фильтр третьего порядка с запаздыванием). Оно показало, что с увеличением порядка объекта получение удовлетворительной реакции в ответ на ступенчатое изменение задающей переменной становится затруднительным.

Регуляторы состояния при случайных возмущениях

15.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ В СЛУЧАЕ БЕЛОГО ШУМА

Рассмотрим ту же модель объекта, что ранее была использована в гл. 8 при выводе уравнений регулятора состояния с детерминированными начальными условиями. На этот раз вход этой модели содержит случайную составляющую, описываемую векторным сигналом $v(k)$:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fv(k). \quad (15.1-1)$$

Предполагается, что помеха $v(k)$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием

$$E\{v(k)\} = 0 \quad (15.1-2)$$

и ковариационной матрицей

$$\text{cov}[v(k), \tau = i - j] = E\{v(i)v^T(j)\} = V\delta_{ij}, \quad (15.1-3)$$

где δ_{ij} — функция Кронекера, причем

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Кроме того, будем полагать, что сигнал помехи $v(k)$ не зависит от вектора состояния $x(k)$, а начальное состояние $x(0)$ также случайно и распределено по нормальному закону со статистиками

$$\begin{aligned} E\{x(0)\} &= 0; \\ \text{cov}[x(0)] &= E\{x(0)x^T(0)\} = X_0. \end{aligned} \quad (15.1-4)$$

Матрицы ковариаций V и X_0 положительно полуопределены.

Нашей целью является построение регулятора, вырабатывающего последовательность входных сигналов $u(k)$, формируемых на основе векторов состояния $x(k)$, все координаты которых доступны непосредственному измерению. Эта последовательность сигналов должна обеспечивать достижение конечного состояния $x(N) \approx 0$, минимизируя одновременно квадратичный критерий качества

$$E\{I\} = E\left\{x^T(N)Qx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]\right\}. \quad (15.1-5)$$

Предполагается, что в выражении (15.1-5) Q является симметрической положительно-полуопределенной матрицей, а R — симмет-

рической положительно-определенной. Поскольку и переменные состояния, и входные сигналы в модели (15.1-1) случайны, значение критерия качества I также представляет собой случайную величину. Ввиду этого минимизации подвергается не сама функция I , а ее математическое ожидание (15.1-5).

Как и в разд. 8.1, сначала будет получен закон управления, в котором не участвует выходная переменная $y(k)$. Случай, когда переменные состояния не поддаются измерению и для управления используются измеримые, но содержащие случайные погрешности значения выходной переменной, будет рассмотрен ниже, в разделе 15.3. Первые публикации, посвященные исследованию стохастических регуляторов состояния, относятся к 1961 г. Подробное обсуждение регуляторов этого класса можно найти в работах [12.2]—[12.5], [8.3].

Для получения оптимальной последовательности входных сигналов $u(k)$ воспользуемся принципом оптимальности Беллмана, изложенным в разд. 8.1:

$$\begin{aligned} \min E \{I\} &= \min_{u(k)} E \left\{ x^T(N) Q x(N) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \right\} = \\ &= \min E \left\{ \min E \left\{ x^T(N) Q x(N) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \right\} \right\}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (15.1-6)$$

Если минимум функции I существует, то для него справедливо равенство (см. [12.4], стр. 260)

$$\min_u E \{I\} = E \left\{ \min_u I \right\}. \quad (15.1-7)$$

Таким образом, операции поиска минимума и вычисления математического ожидания коммутативны. Отсюда можно сделать вывод, что стохастические регуляторы должны описываться уравнениями того же типа, что и детерминированные. Следовательно, управление определяется соотношением (см. [12.4])

$$u(N-j) = -K_{N-j} x(N-j) \quad (15.1-8)$$

совместно с уравнениями (8.1-30) и (8.1-31). Устремив N к бесконечности, получим установившееся решение

$$u(k) = -K x(k). \quad (15.1-9)$$

Данное выражение описывает стационарный регулятор состояния, принцип действия которого можно пояснить, исходя из следующих соображений. Согласно уравнению (15.1-1), сигнал управ-

ления $u(k)$ должен уменьшать величину $x(k+1)$. Однако как состояние $x(k+1)$, так и управление $u(k)$ зависят только от текущих значений $x(k)$ и $v(k)$ и не зависят от $x(k-1)$, $x(k-2)$,, а также от $v(k-1)$, $v(k-2)$, Кроме того, случайное возмущение $v(k)$ не коррелировано с $v(k-1)$, $v(k-2)$, Поэтому при больших N в закон управления должны входить только текущие величины, т. е. $u(k) = f(x(k))$, и уравнение (15.1-9) отвечает этому условию. При сравнительно малых N в законе управления необходимо учитывать также случайное начальное состояние $x(0)$ и помеху $v(k)$. Следовательно, в этом случае необходимо пользоваться нестационарным уравнением оптимального регулятора (15.1-8). Поскольку оптимизация по отношению к детерминированному начальному состоянию приводит к аналогичному по форме соотношению, оказывается, что уравнение (8.1-33) описывает регулятор, обеспечивающий оптимальное управление как при детерминированных, так и при случайных помехах (при условии, что в соответствующих критериях качества используются одни и те же весовые матрицы).

Получим теперь выражение для ковариационной матрицы $X(k+1)$ вектора состояния замкнутого контура управления в установившемся режиме. Объединяя соотношения (15.1-1) и (15.1-9), запишем уравнение замкнутого контура:

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) + Fv(k). \quad (15.1-10)$$

Согласно определению (12.2-25),

$$X(k+1) = [A - BK]X(k)[A - BK]^T + FVF^T. \quad (15.1-11)$$

Это уравнение при $k \rightarrow \infty$ дает искомую ковариационную матрицу

$$X = [A - BK]X[A - BK]^T + FVF^T. \quad (15.1-12)$$

Значение критерия качества, которое достигается при включении в контур управления оптимального регулятора состояния, можно определить следующим способом. Подставим в уравнение (8.1-6) выражение (15.1-1) вместо (8.1-7), как это было сделано в разд. 8.1, и выполним последующие преобразования вплоть до (8.1-19). В результате имеем

$$E\{I_{N-1, N}\} = E\{x^T(N-1)P_{N-1}x(N-1) + v^T(N-1)F^TQFv(N-1)\}, \\ E\{I_{N-1}\} = E\{x^T(N-1)P_{N-1}x(N-1) + v^T(N-1)F^TQFv(N-1)\}$$

или для $N-2$

$$E\{I_{N-2}\} = E\{x^T(N-2)P_{N-2}x(N-2) + v^T(N-2)F^TQFv(N-2)\} + \\ + v^T(N-1)F^TQFv(N-1)\}.$$

Прделаем аналогичным образом все N шагов, учитывая, что $v(k)$ — стационарный случайный процесс:

$$E\{I_0\} = E\{x^T(0)P_0x(0)\} + NE\{v^T(k)F^TQFv(k)\}. \quad (15.1-13)$$

Обозначим установившееся значение $P_0 = \bar{P}$ и возьмем в качестве начального состояния $x(0)$ случайное возмущение $Fv(k)$. Воспользовавшись соотношением (12.2-28), получим окончательное выражение в виде

$$\bar{I} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \{I_0\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \{Nv^T(k) F^T \bar{P} Fv(k) + \\ + Nv^T(k) F^T Q Fv(k)\} = \text{tr}[F^T (\bar{P} + Q) FV]. \quad (15.1-14)$$

15.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ОЦЕНКОЙ СОСТОЯНИЯ В СЛУЧАЕ БЕЛОГО ШУМА

В разд. 15.1 предполагалось, что вектор состояния $x(k)$ поддается точному измерению. Однако на практике это далеко не всегда осуществимо, и, как правило, переменные состояния приходится восстанавливать по измеримым координатам системы. Далее будет рассматриваться объект

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fv(k), \quad (15.2-1)$$

у которого вектор измерений выхода определяется уравнением

$$y(k) = Cx(k) + n(k) \quad (15.2-2)$$

или эквивалентным ему $y(k+1) = Cx(k+1) + n(k+1)$. Считается, что погрешности измерения выходных координат представляют собой векторный белый шум со статистиками

$$E \{n(k)\} = 0, \\ \text{cov}[n(k); \tau = i - j] = E \{n(i) n^T(j)\} = N\delta_{ij}. \quad (15.2-3)$$

В разд. 15.4 будет показано, что неизвестные переменные состояния можно оценить с помощью рекуррентной процедуры, именуемой дискретным фильтром Калмана. Этот фильтр, в котором используются измерения $y(k)$ и $u(k)$, описывается разностным уравнением

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + \Gamma(k+1) [y(k+1) - CA\hat{x}(k) - CBu(k)], \quad (15.2-4)$$

где $\Gamma(k+1)$ — матрица коррекции, определяемая из соотношений (15.4-24) и (15.4-26). В пределе при $k \rightarrow \infty$ она сходится к постоянной матрице Γ . Отметим, что для вычисления оценки состояния необходимо знать параметры шумов N , V и F .

В работе [12.4] показано, что в законе управления (15.1-9) вектор состояния $x(k)$ можно заменить его оценкой:

$$u(k) = -K\hat{x}(k). \quad (15.2-5)$$

При этом вновь получается оптимальный регулятор, минимизирующий критерий качества (15.1-5), а вся система в целом при-

обретает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{ГСА} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{ГСА} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{F} & 0 \\ \mathbf{ГCF} & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{n}(k+1) \end{bmatrix}. \quad (15.2-6)$$

Как и в разд. 8.7, введем ошибку оценки вектора состояния

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (15.2-7)$$

и, воспользовавшись линейным преобразованием (8.7-4), запишем систему (15.2-6) в форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{ГСА} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{F} & 0 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{ГC})\mathbf{F} & -\mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{n}(k+1) \end{bmatrix}. \quad (15.2-8)$$

Полученное разностное уравнение отличается от уравнения (8.7-5) присутствием второго слагаемого, определяющего случайную составляющую. Кроме того, здесь вместо обратной связи по выходу наблюдателя $\Delta \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{HC}\hat{\mathbf{x}}(k)$ используется обратная связь по выходу фильтра состояния $\Delta \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{ГСА}\hat{\mathbf{x}}(k)$. Она зависит от частотных свойств объекта, поскольку коррекция оценки состояния выполняется на основе предсказанного значения $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k)$. Полюса системы управления с регулятором состояния и фильтром находятся из характеристического уравнения системы (15.2.8)

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*] = \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{ГСА}] = 0. \quad (15.2-9)$$

Как следует из этого уравнения, они включают m полюсов замкнутой системы без фильтра состояния, описываемой соотношением (15.1-10), и m полюсов, принадлежащих фильтру. Таким образом, полюса регулятора и фильтра не зависят друг от друга и могут задаваться отдельно. Следовательно, стохастические регуляторы состояния, так же как и детерминированные, подчиняются *теореме о разделении*. Действительно, в уравнениях фильтра состояния не участвуют весовые матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} , входящие наряду с матрицами объекта управления \mathbf{A} и \mathbf{B} в критерий качества, на основе которого рассчитывается линейный регулятор. С другой стороны, при синтезе регулятора не используются ковариационные матрицы \mathbf{V} и \mathbf{N} , а также матрица случайного возмущения \mathbf{F} . Общими в описании этих двух элементов стохастической системы являются только параметры объекта управления, т. е. матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Поскольку регулятор остается неизменным независимо от того, используются ли в нем точные переменные состояния или их опти-

мальные оценки, к нему применим принцип эквивалентности. Согласно этому принципу, при расчете регулятора переменные состояния можно считать известными, а затем использовать вместо них оценки, получаемые с помощью фильтра. Последний в свою очередь синтезируется на основе квадратичного критерия и дает оценки с наименьшей дисперсией. Однако подобная схема уже не позволяет минимизировать критерий качества управления (15.1-14), как в случае точного измерения переменных состояния. Это объясняется наличием задержки на вычисление оценок и разбросом их значений [12.4].

Необходимо отметить, что принцип эквивалентности справедлив лишь при условии, что регулятор используется только для управления текущим состоянием, и вырабатываемый им сигнал не оказывает никакого влияния на последующие оценки состояния [15.1]. Более подробное обсуждение принципов разделения и эквивалентности читатель найдет в гл. 25.

15.3. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ОЦЕНКОЙ СОСТОЯНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

При выводе стохастического регулятора состояния (15.2-5) предполагалось, что на вектор состояния $x(k+1)$ действует случайное возмущение в виде векторного сигнала $v(k)$. Очевидно, при отсутствии шума измерений, т. е. при $n(k) = 0$, $y(k) = Cx(k)$.

В этом случае внутреннее возмущение $v(k)$ проявляется на выходе как

$$y_v(k) = Cx_v(k), \quad (15.3-1)$$

где

$$x_v(k+1) = Ax_v(k) + Fv(k). \quad (15.3-2)$$

Однако случайная составляющая выходного сигнала $y_v(k)$ может быть вызвана и *внешним возмущением* $\xi(k)$. При этом справедливы следующие соотношения (см. рис. 15.3-1):

$$n_\xi(k) = C\eta(k), \quad (15.3-3)$$

$$\eta(k+1) = A\eta(k) + F\xi(k). \quad (15.3-4)$$

Ковариационная матрица сигнала $\xi(k)$ определяется как

$$\text{cov} [\xi(k), \tau = i - j] = \Xi \delta_{ij}. \quad (15.3-5)$$

Если возмущение $\xi(k)$ рассматривается как внешнее, то к нему применимы все выводы разд. 8.2 и 8.7.2. Когда $\xi(k)$ играет роль $v(k)$, фильтр выдает оценки переменных состояния модели случайной помехи $\eta(k)$, полученные на основе измерения векторов $n_\xi(k)$ или $y(k)$. Эти оценки можно использовать в регуляторе состояния (15.2-5) для того, чтобы оптимальным образом подавлять помеху $\xi(k)$ аналогично тому, как ранее подавлялось возмущение $v(k)$.

Рассмотрим теперь способы построения формирующих фильтров

$$p_{\xi_j}(z) = G_{P\xi_j}(z) \xi(z); \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (15.3-6)$$

для случайного возмущения, описываемого уравнениями (15.3-3) и (15.3-4). Будем полагать, что объект управления имеет один

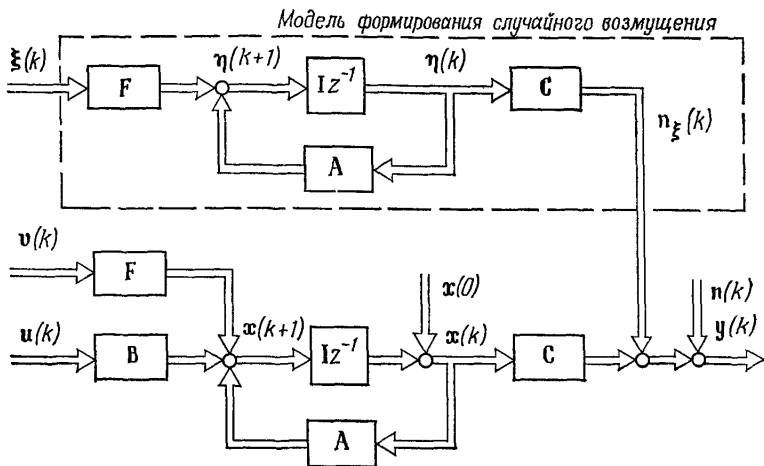


Рис. 15.3.1. Объект управления с внешним возмущением.

вход и один выход. При этом $p_{\xi_j} = p_{\xi}$, и из уравнения (3.2-50) следует, что

$$p_{\xi}(z) = \mathbf{c}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{F} \xi(z) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{F}}{\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \xi(z). \quad (15.3-7)$$

Если \mathbf{F} — диагональная матрица, то

$$p_{\xi}(z) = \mathbf{c}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \begin{bmatrix} f_m \xi_m(z) \\ \vdots \\ f_1 \xi_1(z) \end{bmatrix}. \quad (15.3-8)$$

В этом случае можно, зная величины f_i , построить для каждой составляющей $\xi_i(z)$ свой фильтр помехи

$$G_{P\xi_i}(z) = \frac{D_i(z)}{A(z)}; \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (15.3-9)$$

где

$$A(z) = \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]; \quad (15.3-10)$$

$$\mathbf{D}^T(z) = [D_m(z) \dots D_1(z)]^T = \mathbf{c}^T \text{adj} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{F}. \quad (15.3-11)$$

Напомним, что объект управления обладает передаточной функцией

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{b}}{\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]}. \quad (15.3-12)$$

Нетрудно видеть, что знаменатель $G_{P\bar{E}}$ совпадает со знаменателем G_P , а числители этих передаточных функций имеют общие множители. Ниже приведен пример, в котором показано, как определяются числители $D_i(z)$ для двух различных канонических форм представления модели объекта управления (см. разд. 3.6).

Пример 15.3.1. Рассмотрим объект второго порядка с передаточной функцией

$$G_P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

а) Каноническая форма управляемости:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}; \\ A(z) &= \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = z^2 + a_1 z + a_2; \\ B(z) &= [b_2 \ b_1] \begin{bmatrix} (z + a_1) & 1 \\ -a_2 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [[b_2(z + a_1) + a_2 b_1] \ [b_2 + b_1 z]] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_1 z + b_2. \end{aligned}$$

В случае диагональной матрицы \mathbf{F} имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T(z) &= [(b_2(z + a_1) + a_2 b_1) \ (b_2 + b_1 z)] \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} f_2 b_2 z + f_2 a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ f_1 b_1 z + f_1 b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если входной сигнал $\xi_1(k)$ представляет собой белый шум, коэффициенты полиномов числителей в уравнении (15.3-9) $D_1(z) = d_{11}z + d_{21}$ можно определить, задаваясь следующими условиями:

$$\begin{aligned} \xi_1(k) \neq 0; \quad \xi_2(k) = 0; \quad f_1 \neq 0; \quad f_2 = 0; \\ d_{11} = f_1 b_1; \\ d_{21} = f_1 b_2. \\ \xi_1(k) = 0; \quad \xi_2(k) \neq 0; \quad f_1 = 0; \quad f_2 \neq 0; \\ d_{12} = f_2 b_2; \\ d_{22} = f_2 a_1 b_2 + a_2 b_1. \end{aligned}$$

Таким образом, параметры d_{11} и d_{21} не могут принимать произвольные значения, поскольку они зависят друг от друга, и выбор одного коэффициента однозначно определяет величину другого.

б) Каноническая форма наблюдаемости:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ A(z) &= z^2 + a_1 z + a_2; \\ B(z) &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} (z + a_1) & -a_2 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = [1 \ z] \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = b_1 z + b_2; \\ \mathbf{D}^T(z) &= [1 \ z] \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 z \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Следовательно, для данной формы описания числители фильтров помехи имеют вид

$$\begin{aligned} D_1(z) = d_{21}z = f_1 z \quad \text{при} \quad \xi_1(k) \neq 0; \quad \xi_2(k) = 0; \\ D_2(z) = d_{12} = f_2 \quad \text{при} \quad \xi_1(k) = 0; \quad \xi_2(k) \neq 0. \end{aligned}$$

Вновь коэффициенты d_{1i} и d_{2i} нельзя задавать произвольно, так как один из этих параметров всегда должен быть равен нулю.

Приведенный пример позволяет заключить, что в тех случаях, когда сигнал возмущения $\xi(k)$ или $v(k)$ является векторным белым шумом с независимыми случайными компонентами, параметры числителей соответствующих формирующих фильтров могут принимать лишь вполне определенные значения. Однако данное правило не действует, если, например, все составляющие случайного возмущения равны между собой:

$$\xi_1(k) = \xi_2(k) = \dots = \xi_m(k) = \xi(k). \quad (15.3-13)$$

При этом матрица F преобразуется в вектор

$$f^T = [f_m f_{m-1} \dots f_1]. \quad (15.3-14)$$

Числитель формирующего фильтра в примере 15.3.1 принимает вид $D(z) = d_1 z + d_2$, причем

а) для канонической формы управляемости

$$\begin{bmatrix} d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 b_2 + a_2 b_1) & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix};$$

б) для канонической формы наблюдаемости

$$\begin{aligned} d_2 &= f_2, \\ d_1 &= f_1. \end{aligned}$$

Очевидно, параметры полинома D не зависят друг от друга. Из уравнения (15.3-13) следует, что все элементы ковариационной матрицы возмущения имеют одинаковые значения, т. е.

$$\Xi = \sigma_\xi^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.3-15)$$

Поскольку при $\sigma_\xi \neq 0$ эта матрица положительно полуопределена, по-прежнему справедлива модель (15.1-1). Не нарушается и условие (15.4-4), используемое при выводе уравнений фильтра Калмана.

До сих пор считалось, что матрица F диагональна. В общем случае все ее элементы не равны нулю. В частности, для примера 15.3.1

$$F = \begin{bmatrix} f_{22} & f_{21} \\ f_{12} & f_{11} \end{bmatrix}. \quad (15.3-16)$$

При этом параметры d_1, d_2, \dots могут принимать любые значения.

Таким образом, основной результат, полученный в настоящем разделе, а ранее — в разд. 8.2 и 8.7.2, заключается в том, что регулятор (15.2-5) оптимален по отношению к коррелированному

внешнему возмущению $\mathbf{n}_\xi(k)$. Данный вывод основан на предположении о том, что $\mathbf{n}_\xi(k)$ формируется из векторного белого шума $\xi(k)$ или $\mathbf{v}(k)$, пропускаемого через фильтр, который описывается уравнениями (15.3-3) и (15.3-4). При заданных элементах \mathbf{f} формирующие фильтры определяются в форме передаточных функций

$$G_{p\xi}(z) = \frac{n_\xi(z)}{\xi(z)} = \frac{D(z)}{A(z)}, \quad (15.3-17)$$

причем

$$D(z) = \mathbf{c}^T \text{adj} [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{f} = d_1 z^m + \dots + d_{m-1} z + d_m, \quad (15.3-18)$$

где, например, $\xi(k) = [1 \dots 1]^\top \xi(k), \quad (15.3-19)$

или $\mathbf{v}(k) = [1 \dots 1]^\top \mathbf{v}(k);$

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} = [f_m f_{m-1} \dots f_1]^\top. \quad (15.3-20)$$

Параметры \mathbf{f} и θ или \mathbf{V} , а следовательно, и коэффициенты числителей формирующих фильтров $D(z)$ используются лишь при расчете фильтра состояния и не влияют на синтез регулятора. Матрица шума для фильтра состояния

$$\mathbf{V} = \theta \quad (15.3-21)$$

задается либо согласно уравнению (15.3-15), причем в этом случае $\mathbf{F} = \mathbf{f}$ (15.3-20), либо все элементы \mathbf{F} выбираются таким образом, чтобы обеспечивалась оптимальная фильтрация коррелированного случайного возмущения $\mathbf{n}_\xi(k)$.

15.4. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ (ФИЛЬТР КАЛМАНА)

В данном разделе рассматриваются случайные векторные сигналы, которые могут быть описаны марковским процессом

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{v}(k), \quad (15.4-1)$$

дополненным уравнением измерений

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k) \quad \text{или} \quad \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{n}(k+1) \quad (15.4-2)$$

(см. рис. 15.4.1 и разд. 12.2.1). В дальнейшем в число переменных состояния будут включены также измерения входа $\mathbf{u}(k)$. Ниже используются следующие обозначения:

$\mathbf{x}(k)$ — вектор состояния ($m \times 1$);

$\mathbf{v}(k)$ — входной векторный случайный сигнал ($p \times 1$) с ковариационной матрицей \mathbf{V} ;

$\mathbf{y}(k)$ — вектор выходных измерений ($r \times 1$);

$\mathbf{n}(k)$ — вектор шума измерений ($r \times 1$) с ковариационной матрицей \mathbf{N} ;

\mathbf{A} — матрица системы ($m \times m$);

\mathbf{F} — матрица входа ($m \times p$);

\mathbf{C} — матрица выхода ($r \times m$).

Предполагается, что матрицы A , F и C не зависят от времени. Требуется получить оценку вектора состояния $x(k)$ на основе измерений выхода $y(k)$, содержащих случайные погрешности, представленные векторным белым шумом $n(k)$. Априорная информация

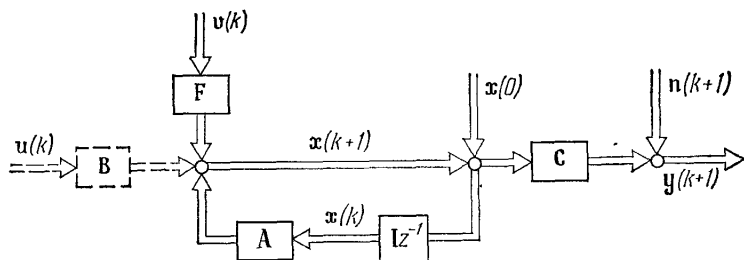


Рис. 15.4.1. Динамический объект, описываемый векторным марковским процессом.

включает следующие параметры:

A , C и F ;

$$E \{v(k)\} = \bar{v}(k); \quad (15.4-3)$$

$$\text{cov}[v(k), \tau = i - j] = E \{v(i) v^T(j)\} = V \delta_{ij}; \quad (15.4-4)$$

$$E \{n(k)\} = 0;$$

$$\text{cov}[n(k), \tau = i - j] = E \{n(i) n^T(j)\} = N \delta_{ij}, \quad (15.4-5)$$

где функция Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Шумы измерений входа $v(k)$ и выхода $n(k)$ считаются статистически независимыми. Оценки состояний являются функциями времени, и поэтому в большинстве приложений предпочтение отдается *рекуррентным процедурам оценивания*, позволяющим вычислять оценки $x(k)$ по мере поступления измерений $y(k)$.

Вывод алгоритма оценивания может опираться на различные теоретические методы, в том числе:

- метод, использующий свойство ортогональности невязок и выходных измерений, $E \{\tilde{x} u^T\} = 0$ ([15.4], [15.6], [15.2]);
- рекуррентный метод наименьших квадратов [15.7];
- метод фильтрации с минимальной дисперсией [15.8];
- метод максимального правдоподобия;
- метод Байеса [3.12].

Ниже для построения алгоритма будет использован рекуррентный метод оценивания с минимальной дисперсией. Он наиболее удобен, поскольку не требует никаких предварительных теоретических выкладок и допускает простую и наглядную интерпретацию результатов.

15.4.1. Взвешенное усреднение двух векторных величин

Алгоритм оценивания, известный как фильтр Калмана, формирует взвешенное среднее двух независимых векторных оценок. Предположим, для некоторого m -мерного вектора x найдены две статистически независимые оценки x_1 и x_2 . Их взвешенным средним назовем величину

$$\hat{x} = (I - K') x_1 + K' x_2 = x_1 + K' (x_2 - x_1), \quad (15.4-6)$$

где K' — это весовая матрица ($m \times m$), которая выбирается таким образом, чтобы дисперсия оценки \hat{x} была минимальна. Далее будет рассматриваться динамическая система, для которой в качестве x_1 берется ее вектор состояний размерности m . Вместо x_2 будет использован вектор выходных измерений y_2 размерности $p < m$, связанный с x_2 соотношением

$$y_2 = Cx_2. \quad (15.4-7)$$

С учетом этого уравнение (15.4-6) принимает вид

$$\hat{x} = x_1 + \underbrace{KC}_{K'} (x_2 - x_1) = x_1 + K (y_2 - Cx_1) = (I - KC) x_1 + Ky_2. \quad (15.4-8)$$

Случайный вектор x_1 имеет ковариационную матрицу

$$Q = E \{ (x_1 - E \{x_1\}) (x_1 - E \{x_1\})^T \} \quad (m \times m); \quad (15.4-9)$$

вектор y_2 — ковариационную матрицу

$$Y = E (y_2 - E \{y_2\}) (y_2 - E \{y_2\})^T \quad (p \times p). \quad (15.4-10)$$

Воспользовавшись условием статистической независимости x_1 и y_2 , введем формулу для ковариационной матрицы оценки \hat{x} (15.4-8):

$$\begin{aligned} P &= E \{ (\hat{x} - E \{ \hat{x} \}) (\hat{x} - E \{ \hat{x} \})^T \} = \\ &= E \{ [(I - KC) x_1 + Ky_2 - (I - KC) E \{x_1\} - KE \{y_2\}] \times \\ &\quad \times [(I - KC) x_1 + Ky_2 - (I - KC) E \{x_1\} - KE \{y_2\}]^T \} = \\ &= (I - KC) Q (I - KC)^T + KYK^T. \end{aligned} \quad (15.4-11)$$

Найдем теперь такую матрицу K , которая минимизировала бы дисперсии ошибок оценивания (т. е. диагональные элементы матрицы P). Для того чтобы определить ее, не прибегая к дифференцированию, несколько преобразуем уравнение (15.4-11). Выполним умножение, учитывая, что $Q = Q^T$, поскольку Q — симметрическая матрица:

$$\begin{aligned} P &= Q + (KC) Q (KC)^T - (KC) Q - Q (KC)^T + KYK^T = \\ &= Q + K (CQC^T + Y) K^T - K (CQ) - (CQ)^T K^T. \end{aligned} \quad (15.4-12)$$

В уравнении (15.4-12) желательно выделить слагаемое, являющееся полным квадратом относительно K . С этой целью введем две новые

матрицы R и S [15.9], такие, что

$$\begin{aligned} (KS - R)(KS - R)^T &= K(SS^T)K^T - KSR^T - RS^TK^T + RR^T = \\ &= K(SS^T)K^T - K(SR^T) - (SR^T)^TK^T + RR^T. \end{aligned} \quad (15.4-13)$$

Положив в (15.4-13)

$$SS^T = CQC^T + Y; \quad (15.4-14)$$

$$SR^T = CQ, \quad (15.4-15)$$

приходим к выражению

$$(KS - R)(KS - R)^T = K(CQC^T + Y)K^T - K(CQ) - (CQ)^TK^T + RR^T. \quad (15.4-16)$$

Правая часть данного выражения совпадает с разностью $(P - Q)$, полученной из (15.4-12). Исключение составляет лишь член RR^T , который можно определить, воспользовавшись уравнениями (15.4-14) и (15.4-15):

$$S^T SR^T = S^T CQ; \quad R^T = (S^T S)^{-1} S^T CQ; \quad R = QC^T S (S^T S)^{-1};$$

$$RR^T = \underbrace{QC^T S (S^T S)^{-1} (S^T S)^{-1} S^T CQ}_W;$$

$$S^T W S = (S^T S) (S^T S)^{-1} (S^T S)^{-1} (S^T S) = I; \quad SS^T W S S^T = S I S^T = SS^T.$$

Таким образом,

$$W = (SS^T)^{-1}.$$

Согласно (15.4-14), отсюда следует

$$RR^T = QC^T (CQC^T + Y)^{-1} CQ. \quad (15.4-17)$$

Подставляя (15.4-16) и (15.4-17) в уравнение (15.4-12), получаем окончательно

$$P = Q + (KS - R)(KS - R)^T - QC^T (CQC^T + Y)^{-1} CQ. \quad (15.4-18)$$

В уравнении (15.4-18) только слагаемое $(KS - R)(KS - R)^T$ зависит от K . Диагональные элементы этой матрицы, равные квадратам соответствующих элементов $(KS - R)$, всегда больше или равны нулю. Следовательно, диагональные элементы P достигают минимума при $KS - R = 0$. Отсюда, используя (15.4-14) и (15.4-15), можно записать

$$KS = R;$$

$$K = RS^T (SS^T)^{-1};$$

$$K = QC^T (CQC^T + Y)^{-1}. \quad (15.4-19)$$

Ковариационная матрица оценки с минимальной дисперсией, согласно (15.4-12), определяется выражением

$$P = Q - KCQ, \quad (15.4-20)$$

а сама оценка имеет вид

$$\hat{x} = x_1 + K(y_2 - Cx_1), \quad (15.4-8)$$

где K находится из уравнения (15.4-19).

15.4.2. Рекуррентный алгоритм оценивания вектора состояния

Применим процедуру определения взвешенного среднего двух векторных величин, описанную в предыдущем разделе, к оцениванию вектора состояния $\hat{x}(k+1)$ марковского процесса (15.4-1), (15.4-2). Для этого переобозначим переменные, участвующие в уравнении (15.4-8):

$x_1 = \bar{x}(k+1)$ — значение $x(k+1)$, предсказанное на основе ранее полученной оценки $\hat{x}(k)$;
 $y_2 = y(k+1)$ — новое измерение выхода.

Предсказанное значение вектора состояния определяется по формуле

$$\bar{x}(k+1) = Ax(k) + Fv(k). \quad (15.4-21)$$

Здесь вместо неизвестной точной величины $v(k)$ использовано ее математическое ожидание $\bar{v}(k)$. С учетом введенных обозначений рекуррентный алгоритм оценивания приобретает вид

$$\hat{x}(k+1) = \bar{x}(k+1) + K(k+1)(y(k+1) - C\bar{x}(k+1)). \quad (15.4-22)$$

Как следует из соотношений (15.4-19), для того чтобы вычислить матрицу коррекции $K(k+1)$, необходимо знать ковариационные матрицы $Q(k+1)$ вектора $\bar{x}(k+1)$ и Y вектора $y(k+1)$. Ковариационная матрица ошибки оценки $\hat{x}(k)$ равна

$$P(k) = E\{(\hat{x}(k) - E\{\hat{x}(k)\})(\hat{x}(k) - E\{\hat{x}(k)\})^T\}. \quad (15.4-23)$$

Учитывая, что векторы $\hat{x}(k)$ и $v(k)$ не коррелированы, согласно (15.4-21), при $E\{\bar{x}(k+1)\} = E\{x(k+1)\}$ имеем

$$Q(k+1) = E\{(x(k+1) - E\{x(k+1)\})(x(k+1) - E\{x(k+1)\})^T\} = AP(k)A^T + FVF^T. \quad (15.4-24)$$

Аналогичным образом уравнение (15.4-2) дает

$$Y(k+1) = E\{(y(k+1) - E\{y(k+1)\})(y(k+1) - E\{y(k+1)\})^T\} = E\{n(k+1)n^T(k+1)\} = N. \quad (15.4-25)$$

Отсюда следует, что матрица корреляции (15.4-19) в рассматриваемом случае определяется как

$$K(k+1) = Q(k+1)C^T [CQ(k+1)C^T + N]^{-1}, \quad (15.4-26)$$

а ковариационная матрица оценки $\hat{x}(k+1)$ — как

$$\mathcal{V} \quad \mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{CQ}(k+1). \quad (15.4-27)$$

Имея все необходимые соотношения, подставим предсказанное значение $\bar{x}(k+1)$, задаваемое формулой (15.4-21), в уравнение (15.4-22) с учетом $\mathcal{V}(k) = 0$. В результате получаем рекуррентный алгоритм оценивания, описывающий *фильтр Калмана*:

$$\hat{x}(k+1) = \mathbf{A}\hat{x}(k) + \mathbf{K}(k+1) [y(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{x}(k)]. \quad (15.4-28)$$

Новая оценка	=	Оценка, предсказанная на основе прежней оценки	+	Матрица коррекции	[Новое измерение	-	Измерение, предсказанное на основе прежней оценки]
--------------	---	--	---	-------------------	---	-----------------	---	---	---

Отметим некоторые особенности реализации алгоритма.

Исходное состояние

Для того чтобы можно было начать вычисления по рекуррентной формуле (15.4-28), необходимо иметь исходное значение оценки вектора состояния. Если нужная информация отсутствует, задается

$$\hat{x}(0) = \bar{x}(0).$$

Требуется знать и начальное приближение для ковариационной матрицы оценки $\mathbf{P}(0)$. Однако, даже если параметры $\hat{x}(0)$ и $\mathbf{P}(0)$ не отличаются особой точностью, уже при небольших k они практически не сказываются на результатах вычислений (в частности, см. пример 22.2.1 в [2.22]).

Матрица коррекции

Матрица коррекции не зависит от измеряемых сигналов, ввиду чего все ее значения могут быть вычислены заранее. Подстановка (15.4-27) в уравнение (15.4-26) дает

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1)\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}. \quad (15.4-29)$$

Если в системе действуют стационарные процессы, при $k \rightarrow \infty$ матрица $\mathbf{K}(k+1)$ стремится к своему установившемуся значению. Следовательно, в этом случае ковариационные матрицы \mathbf{P} и \mathbf{Q} также сходятся. Как показано в работе [3.12], их предельные значения можно определить, решив систему уравнений

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}; \quad (15.4-30)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{F}^T. \quad (15.4-31)$$

Структурная схема

Полученный алгоритм оценивания иллюстрируется блок-схемой, изображенной на рис. 15.4.1 для $\mathcal{V}(k) = 0$. Из нее видно, что составной частью фильтра Калмана является модель объекта управления. Текущее измерение выхода $y(k+1)$ и его предска-

данное значение $\bar{y}(k+1)$ сравниваются, и определяется невязка

$$e(k+1) = y(k+1) - \bar{y}(k+1) = y(k+1) - C\hat{x}(k+1) = \bar{y}(k+1) - CA\hat{x}(k). \quad (15.4-32)$$

Эта величина используется для вычисления поправки $\tilde{x}(k+1)$ предсказания $\bar{x}(k+1)$.

Динамические объекты с измеримым входом $u(k)$

Если на объект воздействует детерминированный или случайный входной сигнал $u(k)$, взвешенный матрицей B , предсказанное

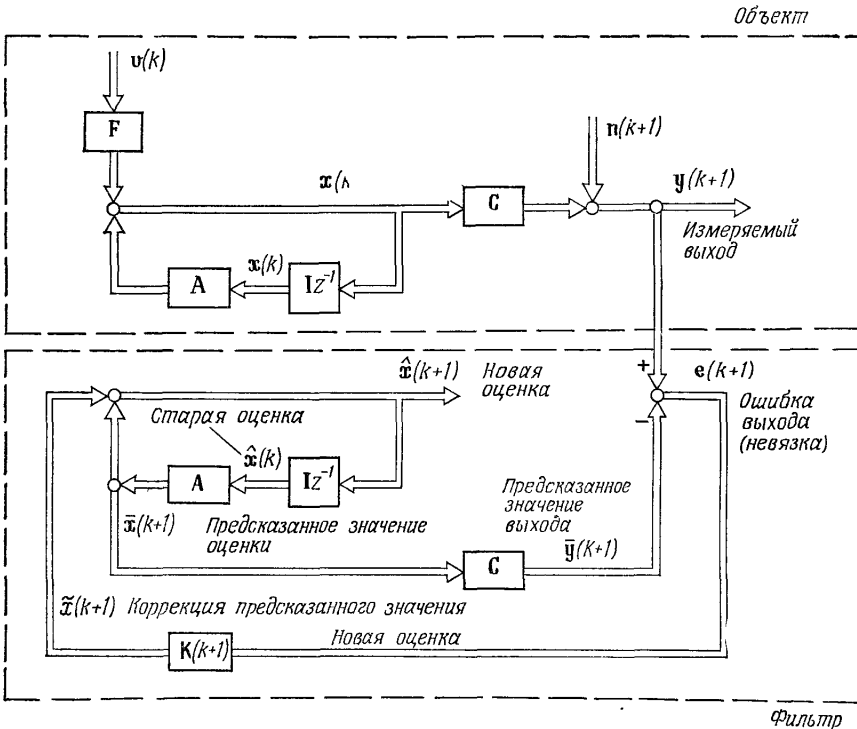


Рис. 15.4.2. Применение фильтра Калмана для получения оценки состояния марковского процесса.

состояние вычисляется по формуле

$$\bar{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + F\bar{v}(k), \quad (15.4-33)$$

которая после подстановки в уравнение (15.4-22) (см. рис. 15.4.2) дает

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + F\bar{v}(k) + K(k+1)(y(k+1) - CA\hat{x}(k) - CBu(k) - CF\bar{v}(k)). \quad (15.4-34)$$

Ортогональные свойства

В основополагающей работе Калмана [15.4] рекуррентный алгоритм оценивания был выведен из условия ортогональности текущей оценки предшествующим измерениям выхода:

$$E \{ \tilde{x}^T(i) y^T(j) \} = 0; \quad j < i. \quad (15.4-35)$$

Однако можно показать, что оценки с минимальной дисперсией обладают и другими ортогональными свойствами:

$$E \{ \tilde{x}^T(i) \hat{x}^T(i) \} = 0, \quad (15.4-36)$$

а при $\hat{y}(i) = C\hat{x}(i)$

$$E \{ \tilde{x}^T(i) \hat{y}(i) \} = 0. \quad (15.4-37)$$

Из этих соотношений также следует, что значения сигнала ошибки (называемой часто невязкой) $e(k+1) = y(k+1) - C\hat{x}(k)$ статистически независимы, т. е.

$$E \{ e(i) e^T(j) \} = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (15.4-38)$$

Обобщения фильтра Калмана

После 1960 г. было опубликовано много работ, в которых проблемы построения алгоритмов фильтрации исследовались при более общих условиях по сравнению с исходным фильтром Калмана. Среди них наибольший интерес представляют следующие вопросы:

- оценивание при наличии корреляции между входным возмущением $v(k)$ и шумом измерений $n(k)$;
- оценивание при коррелированном окрашенном входном возмущении $v(k)$;
- оценивание при коррелированном шуме измерений $n(k)$;
- анализ влияния ошибок в задании начального состояния, ковариационных матриц и параметров объекта на сходимость (расходимость) оценок;
- параллельное оценивание неизвестных ковариационных матриц;
- исследование проблем нелинейной фильтрации: одновременное получение оценок состояния и параметров объекта; оценивание состояния нелинейных объектов.

Перечисленные вопросы обсуждаются во многих работах, в частности [15.2], [15.3], [15.9] — [15.11]. В работе [2.22] демонстрируются результаты моделирования фильтра Калмана.

Связные системы управления

До сих пор при исследовании методов синтеза регуляторов и алгоритмов управления предполагалось, за исключением регуляторов состояния, что входной сигнал объекта управления и зависит только от регулируемой переменной y . При этом получается одноконтурная система. Однако в гл. 14 было показано, что введение в одноконтурную систему дополнительных связей по измеряемым переменным—например, по сигналам внешних воздействий или возмущений—позволяет улучшить качество управления. Системы управления, использующие кроме основной обратной связи дополнительные, называют *связными системами управления*. Обзор непрерывных систем управления такого типа содержится, например, в работах [5.14], [16.2], [16.3]. К основным структурным классам связных систем относятся каскадные системы управления, системы со вспомогательными обратными связями по регулируемым переменным и системы с прямыми связями.

При *каскадном управлении и введении вспомогательных обратных связей по регулируемым переменным* дополнительные (регулируемые) измеряемые переменные объекта, расположенные между точками приложения управляющих воздействий и выходными сигналами, применяются для формирования управляющих сигналов. В качестве дополнительных обратных связей часто используют (непрерывные) производные вспомогательных переменных, которые добавляются к входным или выходным сигналам регулятора. В этом случае кроме регулятора достаточно ввести в систему дифференцирующий элемент, как правило не требующий усиления по мощности. Стоимость аппаратной реализации алгоритмов управления на цифровых вычислителях является незначительной частью полной стоимости системы, поэтому основное внимание будет уделено каскадной схеме управления. Использование такой структуры позволяет использовать более систематические методы синтеза одноконтурных систем. В связи с этим ниже из всего класса систем управления со вспомогательными обратными связями будут рассмотрены только схемы каскадного управления (гл. 16). Значительный интерес представляет также применение систем с *прямыми связями* (гл. 17), в которых кроме обратных связей присутствуют связи по измеримым внешним возмущениям объекта управления.

Каскадные системы управления

При проектировании оптимальных регуляторов состояния используются обратные связи по всем переменным состояния объекта. Если же измеряются лишь некоторые из переменных состояния, например только одна переменная состояния между входом и выходом объекта, то для улучшения характеристик одноконтурной системы, например с параметрически оптимизируемым регулятором, по этой координате, которая считается вспомогательной регулируемой переменной y_2 , вводится обратная связь на вход объекта через

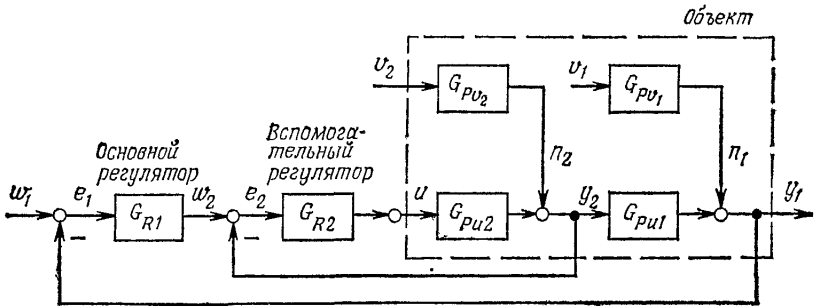


Рис. 16.1. Блок-схема каскадной системы управления.

вспомогательный регулятор, как это показано на рис. 16.1. В этом случае часть объекта с передаточной функцией G_{Pu2} и дополнительный регулятор G_{R2} составляют вспомогательный контур управления, задающим сигналом которого является выходная переменная основного регулятора G_{R1} .

Основной регулятор формирует ошибку управления в виде разности задающего сигнала w_1 и (основной) регулируемой переменной y_1 . Следовательно, основной регулятор управляет внутренним контуром управления и частью G_{Pu1} объекта управления. Таким образом, вспомогательный контур управления совместно с основным оказываются включенными каскадно.

Каскадные системы управления характеризуются лучшим качеством управления по сравнению с одноконтурными системами. Это обусловлено следующими причинами:

- Возмущения, поступающие на часть объекта G_{Pu2} , т. е. на его входную область, прежде чем воздействовать на регулируемую

переменную y_1 , подвергаются предварительным изменениям во вспомогательном контуре управления.

- Наличие вспомогательной системы с обратной связью уменьшает влияние изменения параметров входной части $G_{P_{u2}}$ объекта управления (о снижении чувствительности при введении обратной связи сказано в гл. 10). Поэтому при первоначальном синтезе регулятора G_{R1} оказывается возможным учитывать только те изменения параметров, которые относятся к выходной части $G_{P_{u1}}$ объекта. Незначительные изменения параметров вспомогательного контура управления можно учесть позже.
- Поведение регулируемой переменной y_1 становится более быстрым (менее инертным), если вспомогательный контур управления обеспечивает более быстрые собственные движения $G_{P_{u2}}$ по сравнению с исходными.

Общая передаточная функция каскадной системы управления определяется следующим образом. Считая, что входным сигналом вспомогательного контура является задающий сигнал, поступающий от основного регулятора, получим

$$G_{w\bar{2}}(z) = \frac{y_2(z)}{w_2(z)} = \frac{G_{R2}(z) G_{P_{u2}}(z)}{1 + G_{R2}(z) G_{P_{u2}}(z)}. \quad (16-1)$$

Передаточная функция этого контура относительно управляющего сигнала $w_{\bar{2}}$ равна

$$\frac{u(z)}{w_2(z)} = \frac{G_{R2}(z)}{1 + G_{R2}(z) G_{P_{u2}}(z)}. \quad (16-2)$$

Учитывая, что

$$y_1(z) = G_{P_{u1}}(z) G_{P_{u2}}(z) u(z) = G_{P_u}(z) u(z),$$

запишем передаточную функцию части каскадной системы, которую будем считать объектом управления для основного регулятора:

$$\frac{y_1(z)}{w_2(z)} = \frac{G_{R2}(z)}{1 + G_{R2}(z) G_{P_{u2}}(z)} G_{P_u}(z) = G'_{P_u}(z). \quad (16-3)$$

Таким образом, передаточная функция объекта управления для основного регулятора состоит из передаточной функции самого объекта и дополнительного члена, обладающего «ускоряющими» свойствами. Следовательно, объект становится более «быстрым».

Теперь запишем общую передаточную функцию замкнутой каскадной системы:

$$\begin{aligned} G_w(z) &= \frac{y_1(z)}{w_1(z)} = \frac{G_{R1}(z) G'_{P_u}(z)}{1 + G_{R1}(z) G'_{P_u}(z)} = \\ &= \frac{G_{R1}(z) G_{R2}(z) G_{P_u}(z)}{1 + G_{R2}(z) G_{P_u}(z) + G_{R1}(z) G_{R2}(z) G_{P_u}(z)}. \end{aligned} \quad (16-4)$$

На процесс проектирования каскадных систем управления существенное влияние оказывает расположение точек приложения

внешних воздействий, так что к расчету каждой каскадной системы следует подходить индивидуально. Рассмотрим на простом примере свойства каскадной системы.

Пример 16.1. Объект управления состоит из двух частей, непрерывные передаточные функции которых имеют вид

$$G_{P12}(s) = \frac{1}{(1+7,5s)}, \quad G_{P11}(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+5s)}.$$

При такте квантования $T_0 = 4с$ получим соответствующие передаточные функции, аналогичные полученным в разд. 3.7.2:

$$G_{P12}(z) = \frac{b_{12}z^{-1}}{1+a_{12}z^{-1}} = \frac{0,4134z^{-1}}{1-0,5866z^{-1}} = \frac{0,4134}{z-0,5866},$$

$$G_{P11}(z) = \frac{0,1087z^{-1}+0,0729z^{-2}}{1-1,1197z^{-1}+0,3012z^{-2}},$$

$$G_{P11}(z) = G_{P12}(z) G_{P11}(z) = \frac{0,0186z^{-1}+0,486z^{-2}+0,0078z^{-3}}{1-1,7063z^{-1}+0,958z^{-2}-0,1767z^{-3}} = \\ = \frac{0,0186(z+0,1718)(z+2,4411)}{(z-0,5866)(z-0,6705)(z-0,4493)}.$$

В качестве вспомогательного используем пропорциональный регулятор

$$G_{R2}(z) = q_{02}.$$

Полученная в результате передаточная функция вспомогательного контура управления имеет вид

$$G_{w2}(z) = \frac{q_{02}b_{12}z^{-1}}{1+(a_{12}+q_{02}b_{12})z^{-1}} = \frac{q_{02}b_{12}}{z+(a_{12}+q_{02}b_{12})}.$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости вспомогательного контура управления необходимо, чтобы его полюса были расположены внутри единичной окружности на плоскости z , для чего должно выполняться условие

$$-1 < -(a_{12} + q_{02}b_{12}) < 1.$$

Следовательно, коэффициент передачи пропорционального регулятора должен удовлетворять соотношению

$$-\frac{1+a_{12}}{b_{12}} < q_{02} < \frac{1-a_{12}}{b_{12}} \quad \text{или} \quad -1 < q_{02} < 3,838.$$

(Заметим, что дискретный пропорциональный регулятор, управляющий объектом первого порядка, оказывается структурно неустойчивым в отличие от непрерывного случая.) Если задано положительное значение q_{02} , то:

$$\text{для } q_{02} = 0,7 \quad G_{w2}(z) = \frac{0,2894}{z-0,2972};$$

$$\text{для } q_{02} = 1,3 \quad G_{w2}(z) = \frac{0,5374}{z-0,0492}.$$

Как видно, с возрастанием величины q_{02} полюс смещается к началу координат, достигая его при $q_{02}=1,42$. Следовательно, время установления переходных процессов в замкнутом вспомогательном контуре управления оказывается меньшим, чем для исходной части объекта $G_{P_{u2}}$. Результирующие характеристики замкнутой каскадной системы будут лучше характеристик одноконтурной системы только для $q_{02} > 1,3$. Если значение q_{02} слишком мало, то процессы в каскадной системе управления становятся слишком медленными, что объясняется меньшим значением коэффициента передачи в контуре по сравнению со случаем оптимизированного основного регулятора. Заметим, что параметры основного регулятора изменяются в зависимости от величины коэффициента передачи вспомогательного контура управления. Коэффициент передачи вспомогательного контура изменяется в диапазоне $0 < q_{02} \leq 1,3$ при $0 < G_{w2}(1) \leq 0,54$. Поэтому предпочтительнее в качестве вспомогательного использовать ПИ-регулятор с передаточной функцией

$$G_{R2}(z) = \frac{q_{02} + q_{12}z^{-1}}{1 - z^{-1}},$$

для которого $G_{w2}(1) = 1$. В этом случае дискретная передаточная функция замкнутого вспомогательного контура управления будет иметь вид

$$G_{w2}(z) = \frac{q_{02}b_{12}z^{-1} + q_{12}b_{12}z^{-2}}{1 + (a_{12} + q_{02}b_{12} - 1)z^{-1} + (q_{12}b_{12} - a_{12})z^{-2}}.$$

Если соответствующие параметры ПИ-регулятора выбраны равными $q_{02} = 2,0$ и $q_{12} = -1,4$, то эта передаточная функция будет равна

$$G_{w2}(z) = \frac{0,8268(z - 0,7000)}{(z - 0,7493)(z - 0,0105)}.$$

Здесь нуль и один из полюсов близки между собой (т. е. практически сокращаются), а второй полюс близок к началу координат. Время установления координаты $y_2(k)$ становится меньше, чем в исходной области объекта $G_{P_{u2}}(z)$ (см. рис. 16.2, а). Общая передаточная функция объекта для основного регулятора может быть получена из уравнения (16-3). Она равна

$$G'_{Pu}(z) = \frac{0,0372(z - (0,6433 + 0,0528i))(z - (0,6433 - 0,0528i)) \times}{(z - 0,7493)(z - 0,0105)} \times \frac{(z + 0,1718)(z + 2,4411)}{(z - 0,5866)(z - 0,6705)(z - 0,4493)}.$$

Наличие вспомогательного контура управления приводит к появлению в передаточной функции G'_{Pu} дополнительных полюсов G_{w2} и комплексно-сопряженной пары нулей по сравнению с передаточной функцией исходного объекта G_{Pu} . Из рис. 16. 2, б видно, что объект управления для основного регулятора оказывается

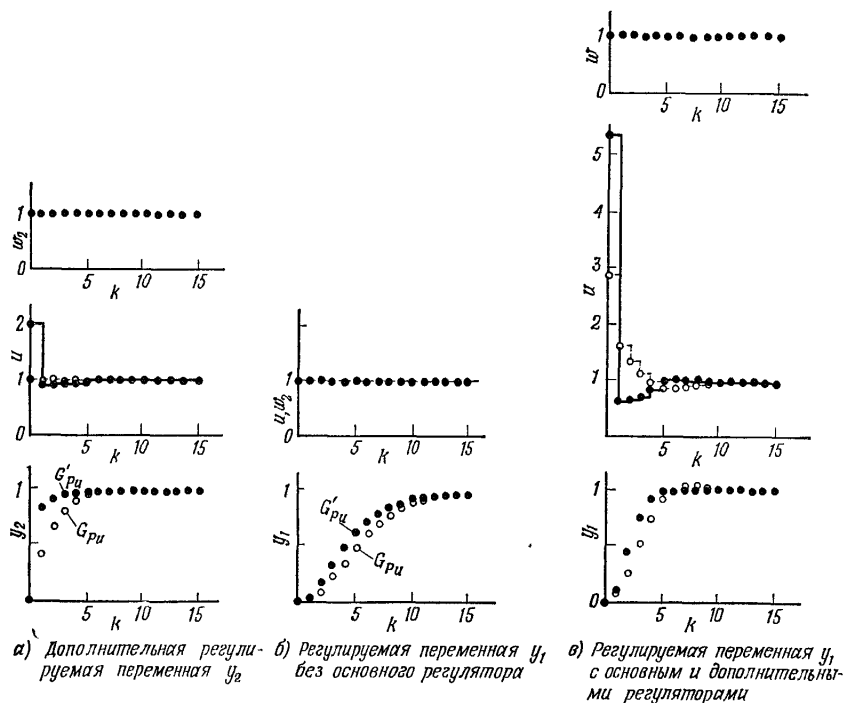


Рис. 16.2. Переходные процессы в контуре управления при наличии и отсутствии дополнительного каскадного регулятора. Основной регулятор — ПИД-типа, дополнительный — ПИ-типа.

○ без вспомогательного регулятора; ● с вспомогательным регулятором.

менее инерционным. Наконец, поведение всей системы становится более быстрым, однако достаточно хорошо демпфированным, что, естественно, требует больших отклонений управляющей переменной на входе объекта (см. рис. 16.2, в).

В табл. 16.2.1 приведены значения параметров основного регулятора, откуда видно, что при введении вспомогательного регулятора значения K и c_1 возрастают, а значение c_D уменьшается.

Алгоритмы управления для вспомогательного ПИ-регулятора и основного ПИД-регулятора, которые должны быть реализованы на управляющем вычислителе, записываются в виде следующих разностных уравнений:

$$e_1(k) = w_1(k) - y_1(k), \quad (16-5)$$

$$w_2(k) = w_2(k-1) + q_{01}e_1(k) + q_{11}e_1(k-1) + q_{21}e_1(k-2), \quad (16-6)$$

$$e_2(k) = w_2(k) - y_2(k), \quad (16-7)$$

$$u(k) = u(k-1) + q_{02}e_2(k) + q_{12}e_2(k-1). \quad (16-8)$$

Таблица 16.2.1

Оптимизированные параметры основного регулятора.
Критерий качества (5.2-6) с $\gamma=0,1$

ЗПР-3, $\gamma=0,1$	q_0	q_1	q_2	K	c_D	c_I
Без вспомогательного контура управления	2,859	-4,012	1,407	1,488	0,9456	0,1950
С вспомогательным контуром управления	2,6723	-3,3452	1,036	1,6363	0,6330	0,2219

Относительно небольшие дополнительные вычислительные затраты, обусловленные отличием структуры каскадного регулятора от обычной одноконтурной схемы, состоят в измерении переменной $y_2(k)$ и вычислении значений $e_2(k)$ и $u(k)$ в соответствии с алгоритмами (16-7) и (16-8). В качестве основных и вспомогательных регуляторов можно применять все рассмотренные ранее регуляторы для объектов с одним входом и одним выходом. Таким образом, каскадные системы управления могут состоять из различных комбинаций регуляторов.

Исчерпывающий анализ свойств каскадных систем управления с регуляторами П- и ПИ-типов для непрерывных сигналов содержится в работе [16.2], где показано, что в качестве вспомогательных следует использовать П-регуляторы, а в качестве основных — регуляторы ПИ-типа. Кроме того, при наличии возмущений на входе объекта управления в качестве вспомогательной регулируемой переменной следует выбирать ближайшую к точке приложения возмущения, а при равномерно распределенных возмущениях в объекте его часть $G_{P_{U2}}$ должна иметь порядок, примерно равный половине порядка всего объекта.

В дискретных системах управления коэффициент передачи вспомогательного регулятора следует выбирать достаточно малым, что обусловлено его малой областью устойчивости (см. пример 16.1). Это приводит к тому, что вспомогательный контур управления становится более медленным, а статические ошибки возрастают. К тому же изменения параметров части объекта $G_{P_{U2}}$ будет больше влиять на настройку параметров основного регулятора. При добавлении интегрирующего члена во вспомогательный регулятор коэффициент передачи вспомогательного контура всегда будет равен $G_{w2}(1)=1$ независимо от любых изменений параметров части объекта $G_{P_{U2}}$. В этом случае при настройке вспомогательного ПИ-регулятора, обеспечивающей выполнение необходимых требований устой-

чивости, даже большие изменения параметров первой части объекта при синтезе основного регулятора можно не учитывать, так как динамика вспомогательного контура управления оказывается значительно более быстрой по сравнению с оставшейся частью объекта управления.

В качестве *основных регуляторов* можно применять параметрически оптимизируемые и аperiodические регуляторы, а также регуляторы с минимальной дисперсией. При их синтезе в роли объекта управления (16-3) выступают вторая часть объекта и вспомогательный контур с уже настроенным П- или ПИ-регулятором. При использовании регуляторов состояния следует учитывать наличие непосредственно измеряемой вспомогательной переменной u_2 . Поэтому соответствующий наблюдатель может иметь пониженный порядок (см. разд. 8.8), поскольку эта переменная является одной из наблюдаемых переменных состояния наблюдателя полного порядка (см. разд. 8.7.2).

Наличие двух измеряемых вспомогательных регулируемых переменных позволяет построить двухкаскадную систему управления с двумя вспомогательными контурами управления [16.1]. Если же все переменные состояния объекта могут быть измерены, то получится мультикаскадная система управления, имеющая структуру, аналогичную системе с регулятором состояния. Из теории оптимального регулирования по состоянию известно, что отдельные вспомогательные регуляторы являются пропорциональными (см. гл. 8). Поэтому каскадные системы с П-регуляторами можно рассматривать как первое приближение к оптимальному управлению по состоянию.

Практическое преимущество разделения системы на контуры с основным и вспомогательным регуляторами состоит в том, что настройку их параметров можно выполнять независимо и последовательно. Причем это справедливо как в случае применения правил настройки регуляторов, так и в случае автоматизированного синтеза системы с помощью ЭВМ. Для каскадных систем управления начальные оценки параметров q_{02} для вспомогательного и q_{01} для основного регуляторов могут быть просто получены в результате задания начального значения управляющей переменной $u(0)$ при ступенчатом изменении величины задающей переменной $w_1(0)$. Из уравнений (5.2-31) и (5.2-32) получим

$$u(0) = q_{02}w_2(0), \quad w_2(0) = q_{01}w_1(0)$$

и, следовательно,

$$u(0) = q_{02}q_{01}w_1(0). \quad (16-9)$$

Это соотношение, в частности, может быть использовано при выборе значения q_{01} для параметрически оптимизируемого основного регулятора, когда начальное значение управляющей переменной $u(0)$ должно быть согласовано с допустимым диапазоном ее изменения

при условии, что параметр q_{02} вспомогательного регулятора уже задан.

Каскадные системы управления могут найти широкое применение. Для систем с повышенными требованиями к качеству при наличии в объекте измеряемой вспомогательной регулируемой переменной всегда следует использовать каскадные регуляторы. Они особенно рекомендуются для регулирования потоков с помощью вентиля. Коэффициент передачи вентиля является нелинейным, поскольку он, кроме всего прочего, зависит от перепада давления на вентиле, которое может существенно изменяться в процессе функционирования. Применение вспомогательного регулятора ПИ-типа позволяет полностью скомпенсировать эти изменения. Еще более широко могут применяться дискретные каскадные системы управления, так как дополнительная стоимость вспомогательных регуляторов мала.

Регуляторы с прямой связью

Если воздействующее на объект внешнее возмущение v можно измерить, прежде чем оно проявится в изменении регулируемой переменной y , то качество управления по отношению к этому возмущению часто может быть улучшено благодаря использованию регуляторов с прямой связью, как показано на рис. 17.0.1. Здесь одновременно с изменением возмущающего воздействия v происходит изменение управляющего сигнала объекта с помощью регулятора $G_S(z)$, что позволяет не дожидаться, пока, как в системах управления с обратной связью, это возмущение повлияет на регулируемую переменную y . Однако существенного улучшения качества управления можно добиться только в том случае, когда динамика объекта G_{Pv} не

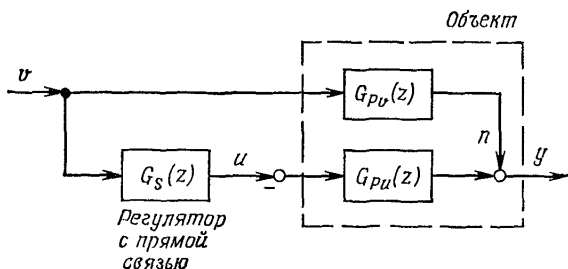


Рис. 17.0.1. Введение прямой связи в объекте с одним выходом и одним входом.

медленнее динамики части объекта G_{Pv} . Это обусловлено ограниченным диапазоном изменения управляющей переменной.

При проектировании систем управления всегда следует стремиться, насколько это возможно, уменьшить влияние измеряемых возмущений с помощью регуляторов с прямой связью, оставляя на долю регуляторов с обратной связью отработку не полностью нейтрализованных возмущений и неизмеряемых возмущений, приложенных к регулируемой переменной.

Поскольку для линейных объектов цель регулятора с прямой связью не влияет на устойчивость и параметры основного контура управления, такой регулятор может быть введен в систему после того, как настроен регулятор с обратной связью. В данной главе будут рассмотрены следующие методы синтеза регуляторов с прямой связью

Если элемент G_S можно реализовать так, что передаточная функция по возмущению G_{Pv} точно совпадает с $G_S G_{Pu}$, то любое изменение (детерминированное или стохастическое) возмущающей переменной v не будет вызывать изменения регулируемой переменной y . Это соответствует применению *идеального регулятора с прямой связью*. Вопросы его реализуемости и построения других регуляторов сокращающего типа с прямой рассмотрены в разд. 17.1. В разд. 17.2 описаны *системы управления с параметрически оптимизируемыми регуляторами с прямой связью*, в которых структура такого регулятора задана заранее и которые применимы для широкого класса объектов. При этом сразу же ограничим задачу использованием неидеальных регуляторов с прямой связью. Системы управления с параметрически оптимизируемыми регуляторами с прямой связью можно проектировать как для детерминирован-

ных, так и для стохастических возмущений. Регуляторы состояния для внешних возмущений уже содержат идеальный регулятор с прямой связью для соответствующей модели возмущения. Системы управления с регуляторами состояния с прямой связью для непосредственно измеряемых возмущений по переменным состояния, удовлетворяющие требованиям, предъявляемым к регуляторам состояния для внешних возмущений, описаны в разд. 17.3. Наконец, можно также синтезировать регуляторы с прямой связью с минимальной дисперсией (разд. 17.4), соответствующие обычным регуляторам с минимальной дисперсией.

В дальнейшем предполагается, что известны математические модели объекта по управляющей координате

$$G_{Pu}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d} \quad (17.0-1)$$

и по сигналу возмущения

$$G_{Pv}(z) = \frac{v(z)}{z} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_q z^{-q}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_q z^{-q}}. \quad (17.0-2)$$

Для управления по состоянию используется модель в пространстве состояний

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad (17.0-3)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (17.0-4)$$

которая считается известной.

17.1. КОМПЕНСАЦИОННЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ

При использовании идеального регулятора с прямой связью выполняется соотношение

$$G_S(z) G_{Pu}(z) = G_{Pv}(z). \quad (17.1-1)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_S'(z) &= \frac{u_S(z)}{v(z)} = \frac{G_{Pv}(z)}{G_{Pu}(z)} = \frac{A(z^{-1}) D(z^{-1})}{B(z^{-1}) z^{-d} C(z^{-1})} = \\ &= \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{m+q} z^{-(m+q)}}{f_d z^{-d} + f_{1+d} z^{-(1+d)} + \dots + f_{m+q+d} z^{-(m+q+d)}} = \frac{H(z^{-1})}{F(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (17.1-2)$$

Таким образом, влияние возмущения на объект может быть полностью нейтрализовано регулятором с прямой связью [17.1]. Однако этот регулятор будет более простым, если для фильтра возмущения выполняется условие $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$. В этом случае

$$G_S^0(z) = \frac{D(z^{-1})}{B(z^{-1}) z^{-d}} \quad (17.1-3)$$

и сокращается лишь числитель передаточной функции объекта управления.

Если такой регулятор с прямой связью оказывается реализуемым и устойчивым, то влияние возмущения $v(k)$ на выходную переменную полностью скомпенсировано. Одно из условий реализуемости уравнения (17.1-2) состоит в том, что если присутствует

элемент h_0 в числителе, то и в знаменателе должен присутствовать элемент f_0 . То же должно выполняться для элементов h_1 и f_1 и т. д. Это означает, что для принятой структуры модели объекта (17.0-1) и (17.0-2) должно выполняться условие $d=0$ и $d_0=0$. Поэтому с самого начала будем считать, что $d=0$, если передаточная функция $G_{PV}(z)$ не обладает свойством прямой передачи входного сигнала и не содержит запаздывания $d' \geq d$. В этом случае сокращается лишь часть В/А.

Для получения устойчивого регулятора с прямой связью корни z_j знаменателя $F(z)$ передаточной функции (17.1-2) должны удовлетворять условию $|z_j| < 1$, т. е. нули полиномов $B(z)$ и $C(z)$ должны лежать внутри единичной окружности на плоскости z . Следовательно, идеальная компенсация возмущений невозможна для объектов с запаздыванием и прямой передачей сигналов, а также для объектов, нули передаточных функций которых по управляющей или возмущающей переменным расположены вне или на окружности единичного радиуса на плоскости z (неминимально-фазовые объекты).

Пример 17.1.1. Для иллюстрации рассмотрим применение регуляторов с прямой связью для тестовых объектов I, II и III с различными передаточными функциями по управляющим сигналам и одинаковыми передаточными функциями по возмущению (см. табл. 17.1.1, 17.1.2 и приложение).

Таблица 17.1.1

Параметры передаточных функций $G_{PI}(z)$

	T_0, c	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	d
Объект I	2	-1,5	0,7	—	1,0	0,5	—	—
Объект II	2	-1,425	0,496	—	-1,102	0,173	—	—
Объект III	4	-1,5	0,705	-0,100	0,065	0,048	-0,008	1

Таблица 17.1.2

Параметры передаточных функций $G_{PV}(z)$

	T_0, c	c_1	c_2	d_1	d_2
Объект I и объект II	2	-1,027	0,264	0,144	0,093
Объект III	4	-0,527	0,070	0,385	0,158

Объект I (неминимально-фазовый второго порядка)

Из уравнения (17.1-2) следует, что

$$G_S^0(z) = \frac{d_1 + (a_1 d_1 + d_2) z^{-1} + (a_1 d_2 + a_2 d_1) z^{-2} + a_2 d_2 z^{-3}}{b_1 + (b_1 c_1 + b_2) z^{-1} + (b_1 c_2 + b_2 c_1) z^{-2} + b_2 c_2 z^{-3}} =$$

$$= \frac{0,144 - 0,123z^{-1} - 0,039z^{-2} + 0,065z^{-3}}{1,0 - 0,527z^{-1} - 0,237z^{-2} + 0,132z^{-3}} =$$

$$= \frac{(z + 0,646)(z - (0,750 + 0,369i))(z - (0,750 - 0,369i))}{(z + 0,494)(z - (0,510 + 0,0821i))(z - (0,510 - 0,0821i))}.$$

Эта передаточная функция является реализуемой и устойчивой. На рис. 17.1.1 показан переходный процесс по управляющей переменной при ступенчатом

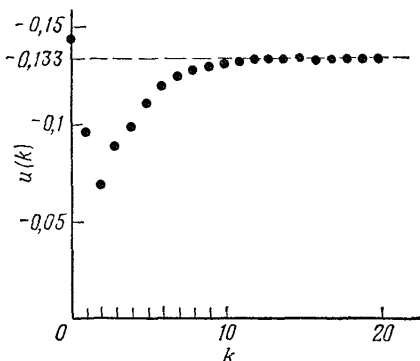


Рис. 17.1.1. Вид управляющей переменной $u(k)$ для объекта I.

изменении возмущения $v(k)$. Выходная переменная при этом не меняется, так как происходит полная компенсация.

Объект II (неминимально-фазовый второго порядка)

Регулятор для этого объекта имеет действительный полюс в точке $z = 1,695$, поскольку нуль передаточной функции $G_{P_{II}}(z)$ находится вне единичной окружности. Это значит, что регулятор с прямой связью оказывается неустойчивым. Таким образом, идеальная компенсация оказывается невозможной.

Объект III (третий порядок с запаздыванием)

Регулятор с прямой связью для объекта III, определяемый уравнением (17.1-2), оказывается нереализуемым из-за присутствия запаздывания $d \neq 0$. Если исключить запаздывание d в уравнении (16.1-2), что будет означать сокращение только множителя В/А без запаздывания, то передаточная функция регулятора с прямой связью будет иметь вид

$$G_S^0(z) = \frac{(z - 0,675)(z - 0,560)(z - 0,264)}{0,065(z + 0,879)(z - 0,140)} \frac{0,385(z + 0,441)}{z^2 - 0,527z + 0,07} =$$

$$= \frac{5,923 - 6,448z^{-1} + 0,526z^{-2} + 1,121z^{-3} - 0,243z^{-4}}{1 + 0,212z^{-1} - 0,443z^{-2} + 0,117z^{-3} - 0,009z^{-4}}.$$

Этот регулятор является реализуемым. Однако компенсация в этом случае приводит к большим отклонениям управляющего сигнала на входе объекта управления, что можно видеть из следующего уравнения:

$$u_S(0) = (0,385/0,065) v(0) = 5,923v(0).$$

Приведенные примеры показывают, что идеальная компенсация часто оказывается нереализуемой или ведет к недопустимо большим отклонениям управляющей переменной. В этих случаях

можно, как и в гл. 6, ввести в передаточную функцию регулятора с прямой связью дополнительный множитель $G_S^R(z)$:

$$G_S(z) = G_S^0(z) \cdot G_S^R(z), \quad (17.1-4)$$

что ведет к появлению колебаний по выходной переменной y . При проектировании компенсационных регуляторов можно использовать задание желаемой передаточной функции всей системы

$$G_v(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = G_{Pv}(z) + G_S(z) G_{Pu}(z)$$

и на ее основании вычислить передаточную функцию регулятора с прямой связью:

$$G_S(z) = \frac{1}{G_{Pu}(z)} [G_v(z) - G_{Pv}(z)].$$

Хотя вычисления по этому методу просты, его нельзя рекомендовать здесь, как в случае компенсационных регуляторов, из-за произвольности задания $G_v(z)$, сокращения нулей и полюсов и появления межтактовых колебаний. Поэтому рассмотрим другие методы синтеза.

17.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ОПТИМИЗИРУЕМЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ

При синтезе параметрически оптимизируемых регуляторов с прямой связью предполагается, что их структура (реализуемая) фиксирована, как и при синтезе параметрически оптимизируемых регуляторов, т. е. структура и порядок алгоритма регулятора с прямой связью заданы, а свободные параметры определяются в процессе параметрической оптимизации [17.1]. Будем считать, что структура передаточной функции такого регулятора имеет вид

$$G_S(z) = \frac{u_S(z)}{v(z)} = \frac{H(z^{-1})}{F(z^{-1})} = \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_l z^{-l}}{1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_l z^{-l}}. \quad (17.2-1)$$

Поскольку она может не точно соответствовать объекту, нами в общем случае не будет получено идеальной компенсации, в результате чего возмущение будет влиять на выходную переменную.

17.2.1. Параметрически оптимизируемые регуляторы с прямой связью без заданного начального значения управляющей переменной

Неизвестные параметры алгоритма регулятора с прямой связью

$$\alpha^T = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_l \ ; \ f_1 \ f_2 \ \dots \ f_l] \quad (17.2-2)$$

определяются при минимизации функции стоимости, например вида

$$S_{eu}^2 = \sum_{k=0}^M [y^2(k) + r \Delta u^2(k)], \quad (17.2-3)$$

т. е.

$$\frac{\partial S_{eu}^2}{\partial \alpha} = 0. \quad (17.2-4)$$

При этом сигнал возмущения может быть детерминированным или стохастическим. Для отклонения управляющей переменной можно записать

$$\Delta u(k) = u(k) - \bar{u}, \quad (17.2-5)$$

где $\bar{u} = u(\infty)$ — конечное значение, например, для ступенчатых возмущений, или $\bar{u} = E \{u(k)\}$ — среднее значение для стохастических возмущений.

Во многих случаях удается получить удовлетворительное качество подавления возмущения для $l \leq 2$. Поскольку коэффициент передачи регулятора с прямой связью определяется соотношением

$$G_S(1) = \frac{G_{Pv}(1)}{G_{Pu}(1)} = K_S = \frac{h_0 + h_1 + h_2}{1 + f_1 + f_2}, \quad (17.2-6)$$

то в результате минимизации приходится определять для $l=2$ четыре параметра, а для $l=1$ — всего два.

17.2.2. Параметрически оптимизируемые регуляторы с прямой связью с заданным начальным значением управляющей переменной

Рассмотрим теперь поведение переменной $u(k)$ при ступенчатом изменении возмущающей переменной $v(k) = 1(k)$. Для $l=2$ из уравнения (17.2-1) получим дифференциальное уравнение

$$u(k) = -f_1 u(k-1) - f_2 u(k-2) + h_0 v(k) + h_1 v(k-1) + h_2 v(k-2). \quad (17.2-7)$$

Для $v(k) = 1(k)$ из этого уравнения получим

$$\begin{aligned} u(0) &= h_0; \\ u(1) &= (1 - f_1) u(0) + h_1; \\ u(2) &= -f_1 u(1) + (1 - f_2) u(0) + h_1 + h_2; \end{aligned} \quad (17.2-8)$$

$$u(k) = -f_1 u(k-1) - f_2 u(k-2) + u(0) + h_1 + h_2.$$

Начальное значение управляющей переменной $u(0)$ равно h_0 или $h_0 v(0)$. Поэтому значение h_0 можно задать заранее, выбрав подходящую величину $u(0)$ и тем самым обеспечив выполнение требования ограниченного диапазона изменения управляющей переменной. С учетом заданного значения $u(0)$ число оптимизируемых параметров регулятора при $l=2$ сокращается до трех, а при $l=1$ — до одного параметра. Исходя из уравнений (17.2-8) и (17.2-6), для $l=1$

получим

$$h_0 = u(0); \quad (17.2-9)$$

$$f_1 = -\frac{u(1) - K_S}{u(0) - K_S}; \quad (17.2-10)$$

$$h_1 = u(1) - u(0)(1 - f_1). \quad (17.2-11)$$

Здесь $u(1)$ теперь можно выбрать в качестве единственной независимой переменной параметрической оптимизации, а его значение долж-

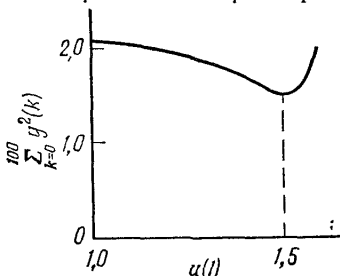


Рис. 17.2.1. Функция потерь $V[u(1)]$ для объекта II.

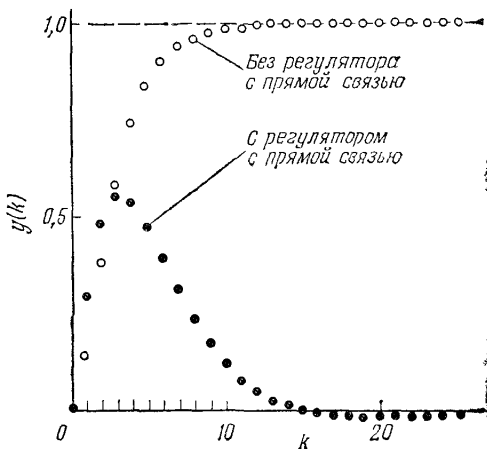
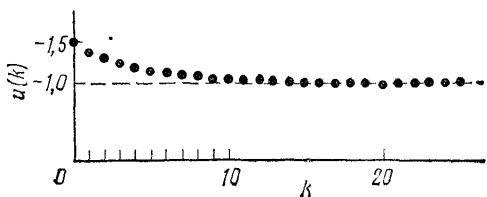


Рис. 17.2.2. Переходные процессы по управляющей $u(k)$ и регулируемой $y(k)$ переменным для объекта II при $f_1 = -0,8$; $h_0 = 1,5$; $h_1 = -1,3$.



но обеспечивать выполнение соотношения

$$\frac{dV}{d[u(1)]} = 0. \quad (17.2-12)$$

Из соображений устойчивости следует, что

$$|f_1| < 1, \quad (17.2-13)$$

и поэтому из уравнения (17.2-10) получим, что

$$u(1) < u(0), \quad (17.2-14)$$

а из уравнения (17.2-11) —

$$h_1 < f_1 u(0). \quad (17.2-15)$$

Таким образом, для $l=1$ синтез регулятора с прямой связью с заданным начальным значением управляющей переменной $u(0)$

сводится к оптимизации одного параметра с учетом ограничения (17.2-14). Вычислительные затраты на минимизацию в этом случае оказываются незначительными. Для оптимизации с использованием ЭВМ можно рекомендовать улучшенные градиентные методы, опи-

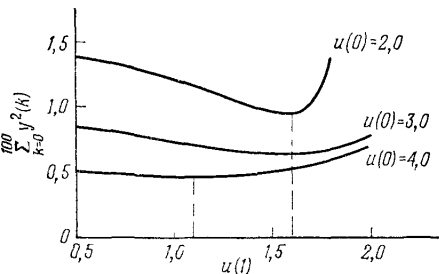


Рис. 17.2.3. Функция потерь $V[u(1)]$ для объекта III,

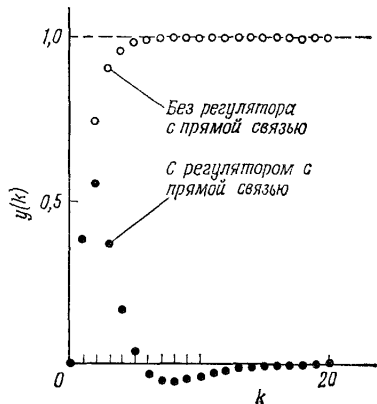
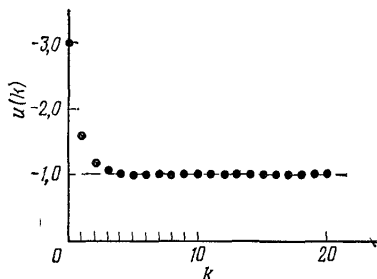


Рис. 17.2.4. Переходные процессы по управляющей $u(k)$ и регулируемой $y(k)$ переменным для объекта III при $f_1=0,3$; $h_0=3,0$; $h_1=-2,3$.



санные в разд. 5.2. Критерий прекращения оптимизации не следует выбирать слишком малым.

Ниже будут рассмотрены примеры использования параметрически оптимизируемых регуляторов с прямой связью первого порядка ($l=1$) с заданным начальным значением управляющей переменной для объектов II и III при ступенчатом изменении возмущения $v(k)$.

Пример 17.2.1

Объект II. На рис. 17.2.1 показана зависимость V от $u(1)$, а на рис. 17.2.2 соответствующие переходные процессы по управляющей и регулируемой переменным для $u(0)=1,5$. Из-за наличия в объекте неминимально-фазовой характеристики начальное отклонение $y(k)$ при наличии регулятора с прямой связью оказывается большим, однако для $k \geq 3$ отклонение убывает.

Объект III. На рис. 17.2.3 показана зависимость V от $u(1)$ для различных значений $u(0)$. Минимум для больших $u(0)$ оказывается относительно плоским. Из рис. 17.2.4 видно, что регулятор с прямой связью улучшает процесс для $k \geq 2$.

Рассмотренный выше метод синтеза систем с параметрически оптимизируемыми регуляторами с прямой связью пригоден для устойчивых объектов как минимально-фазовых, так и неминимально-фазовых. Вычислительные затраты при синтезе, однако, оказываются большими по сравнению с компенсационными регуляторами рассматриваемого типа. Тем не менее определение параметров регуляторов с прямой связью первого и второго порядка с помощью минимизации является в общем случае простой задачей для автоматизированного синтеза с помощью ЭВМ.

17.3. РЕГУЛЯТОРЫ С ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Предполагается, что измеряемые возмущения $v(k)$ воздействуют на переменные состояния $x(k+1)$:

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + x_v(k); \\ x_v(k) &= Fv(k); \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \right\} \quad (17.3-1)$$

Если переменные состояния $x(k)$ непосредственно измеряются, то отклонения переменных состояния $x_v(k)$ будут учтены при формировании сигнала управления с помощью регулятора состояния (8.1-33) $u(k) = -Kx(k)$ с запаздыванием на один такт, так что при использовании регулятора состояния дополнительной цепи прямой связи не требуется. При косвенном измерении переменных состояния измеряемые возмущения $v(k)$ могут быть добавлены к наблюдателю. Для наблюдателей рис. 8.7.1 или рис. 8.7.2 алгоритм регулятора с прямой связью имеет вид

$$\hat{x}(k+1) = Fv(k) \text{ или } \hat{e}(k+1) = Fv(k). \quad (17.3-2)$$

17.4. РЕГУЛЯТОРЫ С ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

По аналогии с соответствующими регуляторами с обратной связью регуляторы с прямой связью, обеспечивающие минимальную дисперсию выходной переменной $y(k)$, могут быть синтезированы для *измеряемых стохастических возмущений* $v(k)$. Здесь, как и при определении регуляторов с минимальной дисперсией в гл. 14 для *объектов без запаздывания*, минимизируется квадратичная функция стоимости

$$I(k+1) = E \{y^2(k+1) + \eta u^2(k)\}. \quad (17.4-1)$$

Заметим, что управляющая переменная $u(k)$ может воздействовать только на выходную переменную $y(k+1)$, так как $b_0=0$. Вывод уравнений регулятора с прямой связью выполняется так же, как и для обычных регуляторов с минимальной дисперсией [см. уравнения

(14.1-5) — (14.1-12)]. Единственное отличие состоит в том, что $v(k)$ измеряется, и в результате вместо уравнения регулятора с обратной связью $u(z)/y(z) = \dots$ нас интересует прежде всего уравнение регулятора с прямой связью $u(z)/v(z) = \dots$

Из уравнения (14.1-12) следует, что

$$zy(z) - \lambda zv(z) + \frac{r}{b_1} u(z) = 0. \quad (17.4-2)$$

В этом случае вместо $zy(z)$ вводится выражение (14.1-5), в результате чего получим передаточную функцию регулятора с прямой связью с минимальной дисперсией:

$$G_{\text{РПМД1}}(z) = \frac{u(z)}{v(z)} = - \frac{\lambda z A(z^{-1}) [D(z^{-1}) - C(z^{-1})]}{zB(z^{-1})C(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1})C(z^{-1})}. \quad (17.4-3)$$

Будем его обозначать как РПМД1.

Если $r=0$, то

$$G_{\text{РПМД2}}(z) = - \frac{\lambda z A(z^{-1}) [D(z^{-1}) - C(z^{-1})]}{zB(z^{-1})C(z^{-1})}. \quad (17.4-4)$$

Если $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$, то из уравнения (17.4-3) следует, что

$$G_{\text{РПМД3}}(z) = - \frac{\lambda z [D(z^{-1}) - A(z^{-1})]}{zB(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1})}, \quad (17.4-5)$$

и для $r=0$ получим

$$G_{\text{РПМД4}}(z) = - \frac{\lambda z [D(z^{-1}) - A(z^{-1})]}{zB(z^{-1})}. \quad (17.4-6)$$

Регуляторы РПМД2 и РПМД4 оказываются аналогичными регуляторам с минимальной дисперсией РМД2 и РМД4, за исключением коэффициента λ . Так как описанные регуляторы с прямой связью обладают в основном теми же свойствами, что и регуляторы с минимальной дисперсией в гл. 14, то ниже будут отмечаться только наиболее важные их свойства.

Поскольку рассматриваемые регуляторы с минимальной дисперсией сокращают полюса и нули объекта, как и обычные регуляторы с минимальной дисперсией, может возникнуть неустойчивость в случаях, приведенных в табл. 14.1.1. Чтобы неустойчивость не возникала, корни полинома $C(z^{-1})$ для РПМД1 и РПМД2 должны лежать внутри окружности единичного радиуса на плоскости z .

Влияние регулятора РПМД1 на выходную переменную определяется передаточной функцией

$$\begin{aligned} G_v(z) &= \frac{y(z)}{v(z)} = \frac{\lambda D(z^{-1})}{C(z^{-1})} + G_s(z) \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \\ &= \frac{\lambda D(z^{-1})}{C(z^{-1})} \left[1 + \frac{zB(z^{-1})}{zB(z^{-1}) + \frac{r}{b_1} A(z^{-1})} \left[\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} - 1 \right] \right]. \quad (17.4-7) \end{aligned}$$

Для регулятора РПМДЗ должно выполняться условие $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$. Если $\gamma \rightarrow \infty$, то $G_v(z) \rightarrow \lambda D(z^{-1})/C(z^{-1})$ и применение регулятора с прямой связью теряет смысл. При $\gamma = 0$, т. е. для регуляторов РПМД2 или РПМД4, получим

$$G_v(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = \lambda. \quad (17.4-8)$$

Последнее выражение означает, что наличие регулятора с прямой связью приводит к формированию на выходе объекта сигнала белого шума $y(z) = \lambda v(z)$ с дисперсией λ^2 . Для объектов с запаздыванием d для вывода уравнений регулятора с прямой связью с минимальной дисперсией можно использовать уравнения (14.2-2) — (14.2-9). При этом в уравнение (14.2-9) необходимо только подставить уравнение (14.2-4), чтобы получить передаточную функцию обобщенного регулятора с прямой связью:

$$G_{\text{РПМД1-3}}(z) = \frac{u(z)}{v(z)} = - \frac{\lambda A(z^{-1}) L(z^{-1})}{zB(z^{-1})C(z^{-1}) + \frac{\gamma}{b_1} A(z^{-1})C(z^{-1})} \quad (17.4-9)$$

или при $\gamma = 0$

$$G_{\text{РПМД2-3}}(z) = - \frac{\lambda A(z^{-1}) L(z^{-1})}{zB(z^{-1})C(z^{-1})}. \quad (17.4-10)$$

Если $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$, то получим

$$G_{\text{РПМД3-3}}(z) = - \frac{\lambda L(z^{-1})}{zB(z^{-1}) + \frac{\gamma}{b_1} A(z^{-1})} \quad (17.4-11)$$

или при $\gamma = 0$

$$G_{\text{РПМД4-3}}(z) = - \frac{\lambda L(z^{-1})}{zB(z^{-1})}. \quad (17.4-12)$$

Результирующая передаточная функция по выходной координате для регуляторов РПМД2-3 и РПМД4-3 будет равна

$$G_v(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = \lambda F(z^{-1}). \quad (17.4-13)$$

Таким образом, как и в случае регуляторов с минимальной дисперсией при наличии обратной связи, получаем объект порядка d со скользящим средним (14.2-19). При увеличении времени запаздывания дисперсия выходной координаты резко возрастает, как и в уравнении (14.2-20). Регулятор с прямой связью с передаточной функцией впервые был предложен в работе [25.9].

ЧАСТЬ V

Многомерные системы управления

ГЛАВА 18

Структуры многомерных объектов

Этот раздел посвящен рассмотрению методов синтеза регуляторов для линейных дискретных многомерных объектов. Как показано на рис. 18.0.1, входы u_i и выходы y_j многомерных объектов влияют друг на друга, что приводит к взаимозависимости цепей прямой передачи сигналов $u_1 \rightarrow y_1$, $u_2 \rightarrow y_2$ и т. д. Внутренняя структура многомерных объектов оказывает существенное влияние на проектирование многомерных систем управления. Такая структура может быть получена в результате теоретического моделиро-

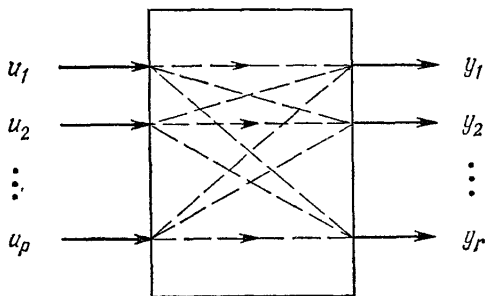


Рис. 18.0.1. Многомерный объект.

вания, если знания об объекте оказываются достаточными. Структуры различных технологических объектов имеют существенные отличия и поэтому не могут быть описаны небольшим набором стандартизованных структур. Однако реальные структуры часто можно привести к *канонической форме*, используя преобразования подобия или простые правила преобразования блок-схем. В следующем разделе рассмотрены специальные формы структур многомерных объектов, основанные на их представлении в виде передаточных функций, матричных полиномов или в пространстве состояний. Эти структуры служат основой для синтеза многомерных регуляторов, о которых речь пойдет в последующих главах.

18.1. СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ В ВИДЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

18.1.1. Канонические структуры

В качестве примера рассмотрим блок-схему испарителя и перегревателя парового котла с естественной циркуляцией, изображенную на рис. 18.1.1. Регулируемыми переменными этого двумерного объекта являются давление пара y_2 в паросборителе и температура пара y_1 на выходе перегревателя. Управляющими переменными

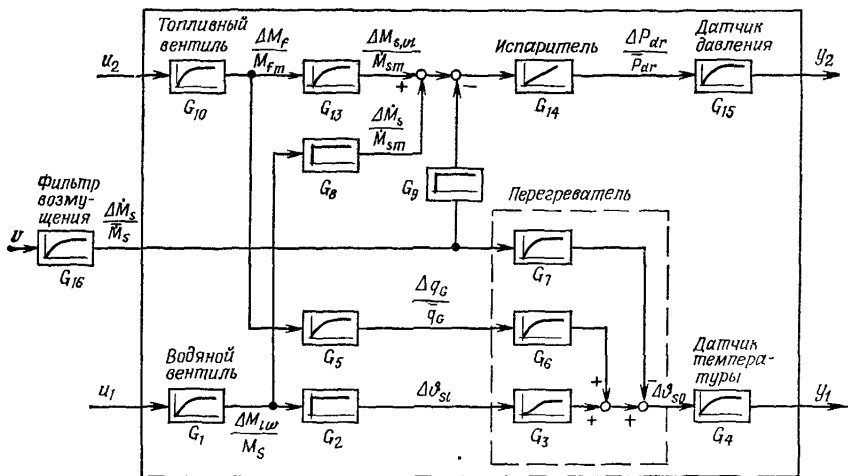


Рис 18.1.1. Блок-схема испарителя и перегревателя парового котла с естественной циркуляцией [18.5], [18.6].

являются расход топлива u_2 и расход воды u_1 . На основании блок-схемы запишем следующие непрерывные передаточные функции:

Перегреватель:

$$G_{11}(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)} = G_1(s) G_2(s) G_3(s) G_4(s).$$

Испаритель:

$$G_{22}(s) = \frac{y_2(s)}{u_2(s)} = G_{10}(s) G_{13}(s) G_{14}(s) G_{15}(s).$$

Связь перегреватель — испаритель:

$$G_{12}(s) = \frac{y_2(s)}{u_1(s)} = G_1(s) G_8(s) G_{14}(s) G_{15}(s).$$

Связь испаритель — перегреватель:

$$G_{21}(s) = \frac{y_1(s)}{u_2(s)} = G_{10}(s) G_5(s) G_8(s) G_4(s).$$

Элементы с передаточными функциями G_{11} и G_{22} называют главными, а элементы с передаточными функциями G_{12} и G_{21} — элементами связи. Предполагая, что входные и выходные сигналы квантуются синхронно с тактом квантования T_0 , получим, применяя z -преобразование, соответствующие дискретные передаточные функции указанных элементов относительно квантователей (см. приложение):

$$\begin{aligned} G_{11}(z) &= \frac{y_1(z)}{u_1(z)} = G_1 G_2 G_3 G_4(z); \\ G_{22}(z) &= \frac{y_2(z)}{u_2(z)} = G_{10} G_{13} G_{14} G_{15}(z); \\ G_{12}(z) &= \frac{y_2(z)}{u_1(z)} = G_1 G_8 G_{14} G_{15}(z); \\ G_{21}(z) &= \frac{y_1(z)}{u_2(z)} = G_{10} G_5 G_6 G_4(z). \end{aligned} \quad (18.1-1)$$

Из приведенного примера видно, что в этом представлении относительно входа/выхода передаточные функции содержат общие элементы. Полученные передаточные функции можно записать в матричной форме с помощью матрицы $\mathbf{G}(z)$:

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{21}(z) \\ G_{12}(z) & G_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{bmatrix}$$

$$\text{или } \mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z) \mathbf{u}(z). \quad (18.1-2)$$

В рассмотренном примере число входов равно числу выходов, в результате чего матрица $\mathbf{G}(z)$ оказывается квадратной. Если число входов и выходов различно, эта матрица будет прямоугольной. Следует отметить, что передаточные функции описывают только управляемые и наблюдаемые части объекта. Как известно, неуправляемые и ненаблюдаемые части объектов не могут быть представлены с помощью передаточных функций.

Наиболее важные канонические структуры, используемые для описания многомерных объектов относительно входа/выхода, показаны на рис. 18.1.2 [18.1].

В случае P -канонической структуры каждый вход действует на все выходы, а точки суммирования расположены на выходах объекта; P -канонические многомерные объекты описываются уравнением (18.1-2). Изменения в одном из передающих элементов влияют только на соответствующий выход, а число входов и выходов может быть различным. Особенность V -канонической структуры состоит в том, что каждый вход воздействует только на соответствующий выход, а каждый выход воздействует на другие входы; эта структура позволяет описать только те объекты, у которых число входов равно числу выходов. Измерения в одном из передающих элементов влияют на сигналы всех других элементов. Двумерному объекту в V -кано-

нической форме соответствует следующее уравнение:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G_{21} \\ G_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\}$$

или в обобщенной записи

$$y = G_H \{u + G_K y\}. \quad (18.1-3)$$

Здесь G_H — диагональная матрица, содержащая главные элементы передачи. В матрице G_K содержатся элементы связи, а ее диа-

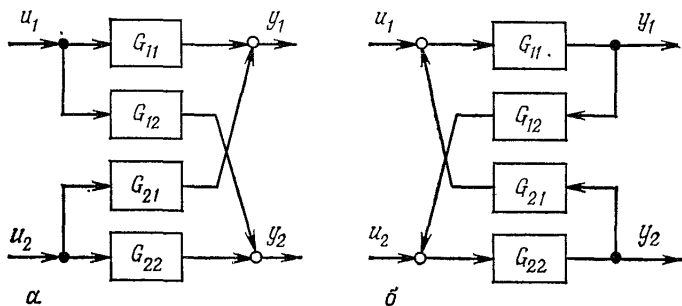


Рис. 18.1.2. Канонические структуры многомерных объектов на примере двумерных объектов: *a* — P-каноническая структура; *b* — V-каноническая структура.

гональные элементы равны нулю. Аналитическая зависимость y от u описывается выражением

$$y = [I - G_H G_K]^{-1} G_H u. \quad (18.1-4)$$

Поэтому матрица передачи объекта в V-канонической форме равна

$$G = [I - G_H G_K]^{-1} G_H. \quad (18.1-5)$$

Она существует, если $\det [I - G_H G_K] \neq 0$. Используя уравнение (18.1-5), V-каноническую структуру можно привести к P-канонической. И наоборот, квадратную P-каноническую структуру можно привести к V-канонической. Для этого необходимо выполнить следующие преобразования. Уравнение (18.1-2) нужно записать в форме, соответствующей уравнению (18.1-3) [18.4], разложив матрицу $G(z)$ на матрицу G_H , содержащую только диагональные элементы, и матрицу G_N , содержащую оставшиеся элементы. В результате получим

$$y = G_H u + G_N u = G_H [u + G_H^{-1} G_N u].$$

Если матрица G неособая, то $u = G^{-1} y$, так что

$$y = G_H [u + G_H^{-1} G_N G^{-1} y]. \quad (18.1-6)$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (18.1-3), получим

$$G_K = G_H^{-1} G_N G^{-1}. \quad (18.1-7)$$

Следовательно, каждую из канонических форм можно преобразовать в другую, однако при этом нужно учитывать их реализуемость. Для двумерных объектов вычисление элементов передачи, например, изложено в работе [18.2].

Если характеристики многомерных объектов определяются на основе непараметрических моделей, например на основе частотных характеристик или импульсных переходных функций, их описание удается получить только в виде P -канонических структур. Если же необходимо оценить другие формы внутренних структур, следует использовать соответствующие параметрические модели или методы параметрической оценки.

Обобщенная структура описывает только пути передачи сигналов. Реальное же поведение многомерных объектов определяется передаточными функциями главных и связывающих элементов, включая их знаки и взаимное расположение. Различают *симметричные многомерные объекты*, для которых

$$\left. \begin{aligned} G_{ii}(z) &= G_{jj}(z), & i &= 1, 2, \dots, \\ G_{ij}(z) &= G_{ji}(z), & j &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\}$$

и *несимметричные многомерные объекты*, для которых

$$\left. \begin{aligned} G_{ii}(z) &\neq G_{jj}(z), & i &= 1, 2, \dots, \\ G_{ij}(z) &\neq G_{ji}(z), & j &= 1, 2, \dots. \end{aligned} \right\}$$

С точки зрения времени установления для развязанных главных контуров управления *медленные элементы объекта* G_{11} могут быть связаны с *быстрыми* элементами объекта G_{ij} . В объектах с сосредоточенными параметрами сигналы на входе и выходе представляют собой изменение запасов энергии, массы или моментов. Часто главные и связывающие элементы содержат одни и те же компоненты запасов, так что главный и связывающий элементы передачи могут иметь общие множители в передаточных функциях. Поэтому часто бывает, что $G_{11} \approx G_{ij}$ или $G_{11} \approx G_{ji}$.

18.1.2. Характеристическое уравнение и коэффициент связи

Другие структурные свойства многомерных процессов далее будем рассматривать на примере дискретной системы, состоящей из двумерного объекта с P -структурой (18.1-2) и двумерного регулятора

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -R_{11}(z) & 0 \\ 0 & -R_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{bmatrix} \\ \text{или} \quad \mathbf{u}(z) &= \mathbf{R}(z) \mathbf{y}(z), \end{aligned} \quad (18.1-8)$$

состоящего только из двух главных регуляторов. Предполагается, что такты квантования во всей системе одинаковы и квантование

всех сигналов выполняется синхронно. Кроме того, будем считать, что $w_1 = w_2 = 0$. С учетом этих условий запишем

$$[\mathbf{I} - \mathbf{G}(z) \mathbf{R}(z)] \mathbf{y}(z) = 0 \quad (18.1-9)$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 + G_{11}R_{11} & G_{21}R_{22} \\ G_{12}R_{11} & 1 + G_{22}R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Умножив матрицу на вектор, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (1 + G_{11}R_{11}) y_1 + G_{21}R_{22} y_2 &= 0, \\ G_{12}R_{11} y_1 + (1 + G_{22}R_{22}) y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Разрешим первое уравнение относительно y_2 и полученное выражение подставим во второе уравнение. Результирующее выражение будет иметь вид

$$[1 + G_{11}(z) R_{11}(z)] [1 + G_{22}(z) R_{22}(z)] - G_{12}(z) R_{11}(z) G_{21}(z) R_{22}(z) y_1 = 0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение двумерной системы управления записывается следующим образом:

$$[1 + G_{11}(z) R_{11}(z)] [1 + G_{22}(z) R_{22}(z)] - G_{12}(z) R_{11}(z) G_{21}(z) R_{22}(z) = 0. \quad (18.1-10)$$

Для характеристического уравнения (18.1-9) можно записать

$$\det [\mathbf{I} - \mathbf{G}(z) \mathbf{R}(z)] = 0. \quad (18.1-11)$$

Выражения $1 + G_{11}R_{11}$ и $1 + G_{22}R_{22}$ являются характеристическими полиномами несвязанных контуров управления, состоящих из главных элементов передачи и главных регуляторов. Член $-G_{12}R_{11}G_{21}R_{22}$ описывает взаимосвязь собственных движений главных контуров управления при наличии элементов перекрестной связи G_{12} и G_{21} . Этот член определяет изменение характеристических уравнений изолированных контуров управления, обусловленное влиянием элементов связи. Если $G_{12} = 0$ и/или $G_{21} = 0$, то коэффициенты отдельных контуров управления не изменяются.

Рассмотрим теперь другую форму записи характеристического уравнения двумерной системы управления. Для этого представим уравнение (18.1-10) в следующей форме:

$$(1 + G_{11}R_{11})(1 + G_{22}R_{22}) \left[1 - \frac{G_{12}R_{11}G_{21}R_{22}}{(1 + G_{11}R_{11})(1 + G_{22}R_{22})} \right] = 0.$$

Введем передаточные функции замкнутой системы относительно задающих сигналов

$$G_{wi}(z) = \frac{y_i(z)}{w_i(z)} = \frac{G_{ii}(z) R_{ii}(z)}{1 + G_{ii}(z) R_{ii}(z)}, \quad i = 1, 2, \quad (18.1-12)$$

откуда получим

$$(1 + G_{11}R_{11})(1 + G_{22}R_{22})(1 - \kappa G_{w1}G_{w2}) = 0. \quad (18.1-13)$$

Множитель $(1 - \kappa G_{w1} G_{w2}) = 0$ содержит дополнительные собственные значения, возникающие при наличии взаимной связи между контурами управления. Здесь

$$\kappa(z) = \frac{G_{12}(z) G_{21}(z)}{G_{11}(z) G_{22}(z)} \quad (18.1-14)$$

является динамическим коэффициентом связи. Из уравнения (18.1-13) видно, что набор собственных значений многомерной системы с Р-структурой состоит из собственных значений отдельных главных контуров управления и дополнительных собственных значений, обусловленных наличием элементов связи G_{12} и G_{21} . И снова при

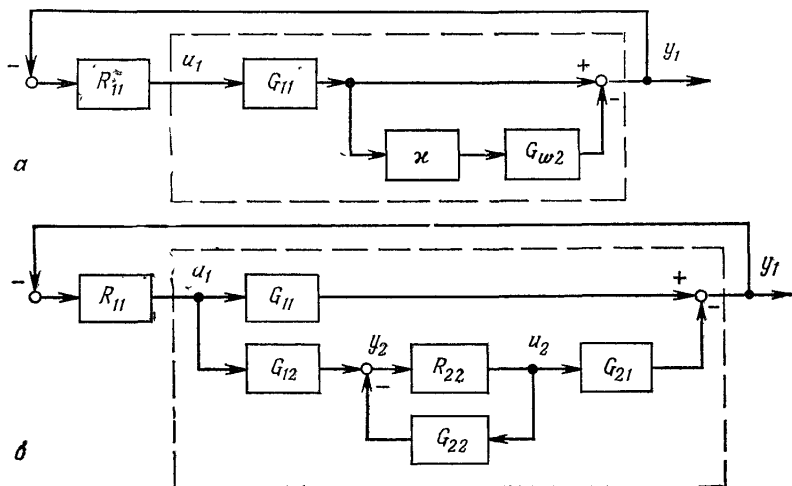


Рис. 18.1.3. Структура «объекта управления» для регулятора R_{11} .

$G_{12}=0$ и/или $G_{21}=0$ собственные значения двумерной системы идентичны собственным значениям отдельных несвязных контуров управления. Из уравнения (18.1-10) после деления на $(1 + G_{22}R_{22})$ следует, что

$$1 + G_{11}R_{11} (1 - \kappa G_{w2}) = 0 \quad (18.1-15a)$$

или, если делить на $(1 + G_{11}R_{11})$,

$$1 + G_{22}R_{22} (1 - \kappa G_{w1}) = 0. \quad (18.1-15b)$$

При наличии взаимного влияния контуров «объекты» управления главных регуляторов изменяются:

$$\begin{aligned} G_{11} &\rightarrow G_{11} (1 - \kappa G_{w2}), \\ G_{22} &\rightarrow G_{22} (1 - \kappa G_{w1}), \end{aligned}$$

как это видно из рис. 18.1.3, а. Вторые контуры передачи сигналов $G_{11}\kappa G_{w1}$ оказываются включенными параллельно главным объектам управления G_{11} .

Теперь рассмотрим, как изменяются коэффициенты передачи «объектов» управления при учете влияния соседних контуров. Для регулятора $R_{ii}(z)$ коэффициент передачи объекта равен $G_{ii}(1)$ при разомкнутом контуре j и равен $G_{ii}(1)[1 - \kappa_0 G_{wj}(1)]$ в случае замкнутого соседнего контура. Множитель $[1 - \kappa_0 G_{wj}(1)] = \varepsilon_{ii}$ определяет изменение коэффициента передачи при замыкании соседнего контура. Этот множитель называется *статическим коэффициентом связи*:

$$\kappa_0 = \kappa(1) = \frac{G_{12}(1) G_{21}(1)}{G_{11}(1) G_{22}(1)} = \frac{K_{12} K_{21}}{K_{11} K_{22}}. \quad (18.1-16)$$

Этот коэффициент существует для элементов передачи с пропорциональными или интегрирующими свойствами, причем в последнем случае оба элемента $G_{ii}(z)$ и $G_{ij}(z)$ должны обладать интег-

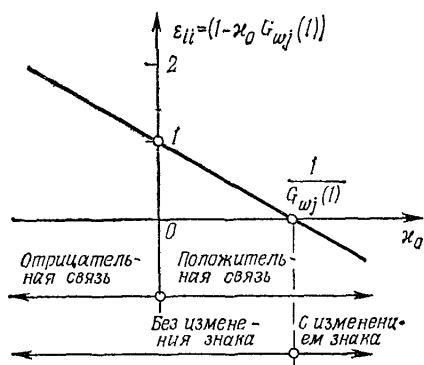


Рис. 18.1.4. Зависимость параметра ε_{ii} от статического коэффициента связи κ_0 двумерной системы управления с Р-канонической структурой.

рирующими свойствами. На рис. 18.1.4 показана зависимость коэффициента ε_{ii} от κ_0 . Для разомкнутого соседнего контура j коэффициент $\varepsilon_{ii} = 1$. Если же соседний контур замкнут, возможны следующие случаи:

- 1) $\kappa_0 < 0$ (отрицательная перекрестная связь) $\rightarrow \varepsilon_{ii} > 1$,
- 2) $\kappa_0 > 0$ (положительная перекрестная связь):

$$а) \frac{1}{G_{wj}(1)} \geq \kappa_0 > 0 \rightarrow 0 \leq \varepsilon_{ii} < 1,$$

$$б) \kappa_0 > \frac{1}{G_{wj}(1)} \rightarrow \varepsilon_{ii} < 0.$$

Таким образом, двумерный объект может быть положительно или отрицательно связанным. В случае 1 коэффициент передачи «объекта» возрастает при подключении соседнего контура, так что в общем случае коэффициент передачи регулятора может быть выбран меньшим. В случае 2а коэффициент передачи «объекта» управления убывает и коэффициент передачи регулятора может быть увеличен. Наконец, в случае 2б коэффициент передачи «объекта» управления

изменяется так, что оказывается необходимым изменять знак коэффициента передачи регулятора R_{11} . В области $\epsilon_{11} \approx 0$ управление переменной y_1 практически невозможно.

Так как коэффициент связи $\kappa(z)$ зависит только от передаточных функций объектов, включая их знаки, положительная и отрицательная перекрестная связь между контурами определяется свойствами двумерных объектов. Наличие цепи, параллельной главному элементу G_{11} (рис. 18.1.3, б), приводит к появлению дополнительного сигнала, который передается элементами связи. Если эти элементы являются достаточно инерционными, соседний контур оказывает незначительное влияние на y_1 . Если же элементы G_{12} и G_{21} не слишком инерционны по сравнению с элементом передачи G_{11} , то «быстрый» соседний контур более существенно влияет на переменную y_1 , чем «медленный».

18.1.3. Влияние внешних сигналов

Переходные процессы многомерных объектов при наличии внешних возмущений и задающих сигналов зависят как от точек их приложения, так и от того, действуют ли они последовательно или одновременно. Рассмотрим на примере двумерных процессов следующие случаи (см. рис. 19.0.1):

а) Возмущение v воздействует на оба контура

В этом случае $p_1 = G_{v1}v$ и $p_2 = G_{v2}v$. Такая ситуация возникает, например, при изменении рабочей точки или нагрузки, что в большинстве случаев выражается в одновременном изменении энергии, массопередачи или движущих сил. Отметим, что передаточные функции G_{v1} и G_{v2} могут иметь как совпадающие, так и противоположные знаки.

б) Возмущения p_1 и p_2 независимы

Оба возмущения могут изменяться одновременно, как, например, в случае статистически независимых шумов. Однако они могут появляться последовательно, как обычные детерминированные возмущения.

в) Задающие переменные

Задающие переменные w_1 и w_2 могут изменяться одновременно: $w_1(k) = w_2(k)$ или $w_1(k) \neq w_2(k)$. Они, конечно, могут изменяться и независимо.

На примере парового котла (рис. 18.1.1) эти случаи соответствуют следующим возмущениям:

- а) — изменению расхода пара из-за изменения нагрузки;
- изменению теплотворной способности топлива (угля);
- загрязнению поверхности испарителя.

- б) p_1 — загрязнению поверхности перегревателя;
 — изменению выходной температуры пара в перегревателе, вызванному колебаниями потока воды или ее температуры;
- p_2 — изменению потока воды.
- в) В случае изменения нагрузки задающие переменные w_1 и w_2 могут изменяться одновременно, в частности при выравнивании давления. Однако допустимы и их независимые изменения.

Наиболее часто в рассматриваемом примере возмущения действуют одновременно на оба контура. Эти возмущения, как правило, имеют наибольшую амплитуду.

18.1.4. Взаимодействие главных регуляторов

В зависимости от вида внешних возбуждающих воздействий и передаточных функций главных элементов и элементов связи главные регуляторы могут действовать, *усиливая или ослабляя друг друга* [18.7]. При ступенчатом изменении возмущение v воздействует на оба контура (рис. 19.0.1), где G_{v1} и G_{v2} имеют одинаковые знаки, а все главные элементы и элементы связи имеют низкочастотный характер и Р-структуру. В табл. 18.1.1 показаны четыре соответствующие группы комбинаций знаков, полученных на основании анализа по блок-схеме изменения сигналов исходных переходных процессов, где в общем случае проявляются наибольшие изменения. Разделение на группы зависит от знаков отношений

$$\frac{K_{12}}{K_{11}} \text{ и } \frac{K_{21}}{K_{22}}.$$

Их произведение равно статическому коэффициенту связи κ_0 . Поэтому для положительного коэффициента $\kappa_0 > 0$ можно выделить группы:

I) R_{11} усиливает R_{22} , R_{22} усиливает R_{11} ;

II) R_{11} ослабляет R_{22} , R_{22} ослабляет R_{11} ,

а для отрицательного коэффициента $\kappa_0 < 0$ — группы:

III) R_{11} усиливает R_{22} , R_{22} ослабляет R_{11} ;

IV) R_{11} ослабляет R_{22} , R_{22} усиливает R_{11} .

Если передаточные функции G_{v1} и G_{v2} имеют *различные знаки*, то комбинации знаков для групп I и II или III и IV должны быть изменены. Передаточная функция по возмущению

$$G_{vy1} = \frac{y_1}{v} = \frac{G_{v1} - \frac{G_{j1}}{G_{j2}} G_{w2} G_{v2}}{1 + G_{11} R_{11} (1 - \kappa G_{w1})}$$

показывает, что переходные процессы по регулируемой переменной оказываются идентичными для различных комбинаций знаков в рамках одной группы. Если же только одно возмущение p_1 воздействует

Таблица 18.1.1

Взаимное влияние главных регуляторов как функция знаков главных элементов и элементов связи для ступенчатого изменения возмущения v , одновременно воздействующего на оба контура. G_{v1} и G_{v2} имеют одинаковые знаки. (Займствовано из [18.7].)

Перекрестная связь	Знак K_{11} K_{22} K_{21} K_{12}	Взаимное влияние главных регуляторов	Группа
Положительная ($\kappa_0 > 0$)	+ + + + + - - + - + + - - - - -	Усиливают друг друга	I $\frac{K_{21}}{K_{22}} > 0$ $\frac{K_{12}}{K_{11}} > 0$
	+ + - - + - + - - + - + - - + +	Ослабляют друг друга	II $\frac{K_{21}}{K_{22}} < 0$ $\frac{K_{12}}{K_{11}} < 0$
Отрицательная ($\kappa_0 < 0$)	+ + - + + - + + - + - - - - + -	R_{11} усиливает R_{22} R_{22} ослабляет R_{11}	III $\frac{K_{21}}{K_{22}} < 0$ $\frac{K_{12}}{K_{11}} > 0$
	+ + + - + - - - - + + + - - - +	R_{11} ослабляет R_{22} R_{22} усиливает R_{11}	IV $\frac{K_{21}}{K_{22}} > 0$ $\frac{K_{12}}{K_{11}} < 0$

на выходной сигнал u_1 , а $p_2=0$, то влияние соседнего регулятора R_{22} можно оценить по табл. 18.1.2. Регулятор R_{22} ослабляет действие регулятора R_{11} при положительной связи между контурами управления и усиливает его действие при отрицательной связи.

После сравнения всех случаев:

- G_{v1} и G_{v2} имеют одинаковые знаки;
- G_{v1} и G_{v2} имеют различные знаки;
- $G_{v1}=0$, а $G_{v2} \neq 0$ или $G_{v1} \neq 0$, а $G_{v2}=0$

можно сделать вывод, что здесь нет такой комбинации знаков, при которой происходит только усиление или ослабление действия

Таблица 18.1.2

Влияние главного регулятора R_{22} на главный регулятор R_{11} при воздействии возмущения p_1 на регулируемую переменную y_1 . Комбинации знаков и группы те же, что и в табл. 18.1.1

Перекрестная связь	Влияние R_{22} на R_{11}	Группа
Положительная ($\kappa_0 > 0$)	Ослабляет »	I II
Отрицательная ($\kappa_0 < 0$)	Усиливает »	III IV

регуляторов во всех случаях. Это означает, что взаимодействие главных регуляторов для двумерного объекта всегда зависит от конкретного внешнего возмущения. С этой точки зрения каждую многомерную систему управления следует рассматривать индивидуально.

В качестве примера снова рассмотрим паровой котел (рис. 18.1.1). Возмущающие элементы имеют одинаковые знаки передачи сигналов изменения расхода пара, так что результаты, приведенные в табл. 18.1.1, оказываются в этом случае справедливыми. Анализ знаков дает комбинацию $- + + +$, что соответствует группе IV. Перегреватель и испаритель связаны отрицательно, и соответствующий статический коэффициент связи $\kappa_0 = -0,1145$. Регулятор давления пара R_{22} усиливает действие регулятора температуры пара R_{11} , см. [18.5]. Однако R_{11} незначительно ослабляет действие R_{22} , так как элемент G_8 на рис. 18.1.1 имеет относительно низкий коэффициент передачи. Изменение теплотворной способности влияет на обе выходные переменные с одним знаком, так что ее можно включить в ту же группу.

18.1.5. Представление в матричной полиномиальной форме

Кроме представления в виде передаточных функций для линейных многомерных систем используется матричное полиномиальное представление [18.10]

$$\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{y}(z) = \mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{u}(z), \text{ где} \quad (18.1-17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z^{-1}) &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_m z^{-m}, \\ \mathbf{B}(z^{-1}) &= \mathbf{B}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_m z^{-m}. \end{aligned} \quad (18.1-18)$$

Если $\mathbf{A}(z^{-1})$ — диагональная полиномиальная матрица, то объект с двумя входами и двумя выходами можно описать следующим

уравнением:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & A_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(z^{-1}) & B_{21}(z^{-1}) \\ B_{12}(z^{-1}) & B_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{bmatrix}. \quad (18.1-19)$$

Эта запись соответствует Р-канонической структуре с общими полиномами знаменателя $G_{11}(z)$ и $G_{21}(z)$ или $G_{22}(z)$ и $G_{12}(z)$ — сравните с уравнением (18.1-2). Структурам более общего вида соответствует наличие внедиагональных полиномов в $A(z^{-1})$.

18.2. СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Распространяя представление линейных объектов с одним входом и одним выходом в пространстве состояний (3.6-16), (3.6-17) на линейные многомерные объекты с p входами $u(k)$ и r выходами $y(k)$, получим следующие матричные уравнения:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (18.2-1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad (18.2-2)$$

где $x(k)$ — вектор состояния размерности $(m \times 1)$; $u(k)$ — вектор управления размерности $(p \times 1)$; $y(k)$ — вектор выхода размерности $(r \times 1)$; A — матрица системы размерности $(m \times m)$; B — матрица управления размерности $(m \times p)$; C — матрица выхода (измерений) размерности $(r \times m)$; D — матрица входа/выхода размерности $(r \times p)$.

Представление многомерных систем в пространстве состояний обладает рядом преимуществ по сравнению с записью в виде передаточных функций. Например, оно позволяет описать произвольные внутренние структуры с помощью минимального числа параметров, а также описать неуправляемые или ненаблюдаемые части объекта управления. Кроме того, переход от объектов с одним входом и одним выходом к многомерным объектам связан лишь с заменой векторов параметров b , c и коэффициента d соответствующими матрицами параметров B , C и D . Поэтому методы анализа и синтеза регуляторов для объектов с одним входом и одним выходом могут быть непосредственно использованы для объектов со многими входами и многими выходами. Однако для многомерных объектов существует большое число канонических структур представления в пространстве состояний. Поэтому выбор подходящей структуры состояния является весьма сложной задачей.

Для первоначального ознакомления с формами матриц A , B и C и соответствующими им структурами блок-схем рассмотрим, как и в разд. 18.1, три примера двумерных объектов.

а) Двумерный объект с непосредственной связью переменных состояния главных элементов передачи

На рис. 18.2.1 изображены два главных элемента передачи, переменные состояния которых непосредственно связаны между собой матрицами A'_{12} и A'_{21} . Физически это означает, что все источники энергии и переменные состояния являются составной частью

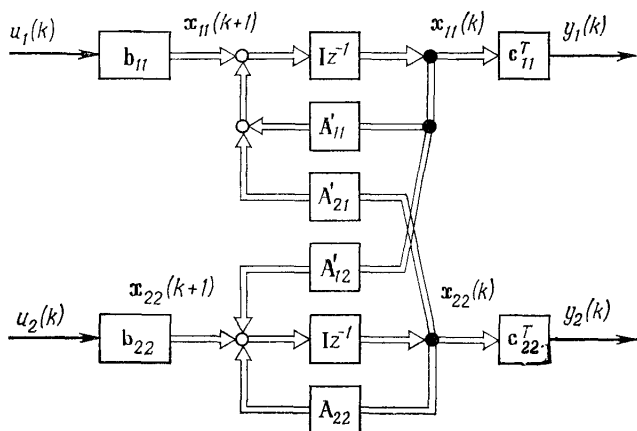


Рис. 18.2.1. Двумерный объект с непосредственными перекрестными связями между переменными состояния главных элементов.

главных элементов передачи. Элементы связи не имеют независимых источников энергии или собственных переменных состояния. Уравнения состояния в этом случае имеют вид

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}, \quad (18.2-3)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^T & 0 \\ 0 & c_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix}. \quad (18.2-4)$$

Матрицы A_{11} и A_{22} главных элементов передачи являются диагональными блоками, а матрицы связи A'_{12} и A'_{21} являются внедиагональными блоками общей матрицы системы A . Главные элементы передачи могут быть представлены в одной из канонических форм, приведенных в табл. 3.6.1. Матрицы связи содержат лишь параметры связи в соответствующей форме и нулевые элементы.

б) Двумерные объекты с P -канонической структурой

Двумерный объект в P -канонической форме, аналогичный изображенному на рис. 18.1.2, а, приведен на рис. 18.2.2. Предполагается, что главные элементы и элементы связи имеют различные

точники энергии и переменные состояния при отсутствии непосредственной связи между ними. Уравнения состояния записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{12}(k+1) \\ x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}; \quad (18.2-5)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^T & 0 & c_{21}^T & 0 \\ 0 & c_{12}^T & 0 & c_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix}. \quad (18.2-6)$$

В этом случае все матрицы главных элементов и элементов связи являются диагональными блоками матрицы A .

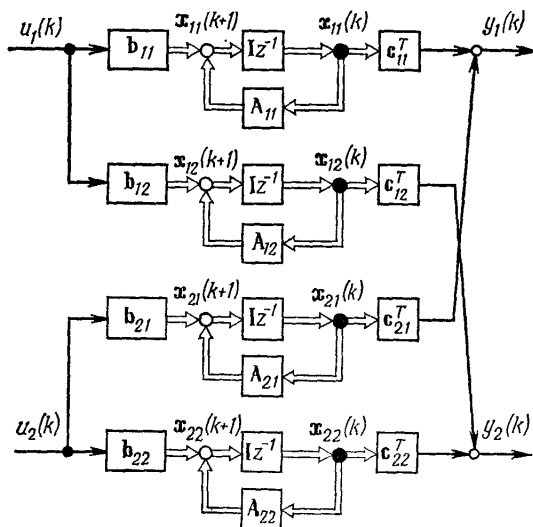


Рис. 18.2.2. Двумерный объект с P-канонической структурой.

в) Двумерные объекты с V-канонической структурой

Двумерные объекты с V-канонической структурой, изображенной на рис. 18.2.3, имеют независимые источники энергии и переменные состояния, соответствующие различным элементам передачи, в ре-

зультате чего их представление в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{12}(k+1) \\ x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & b_{11}c_{11}^T & 0 \\ b_{12}c_{11}^T & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & b_{21}c_{22}^T \\ 0 & b_{22}c_{12}^T & 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}; \quad (18.2-7)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix}. \quad (18.2-8)$$

Кроме матриц, соответствующих главным элементам передачи и элементам связи и расположенных на диагонали матрицы A , здесь

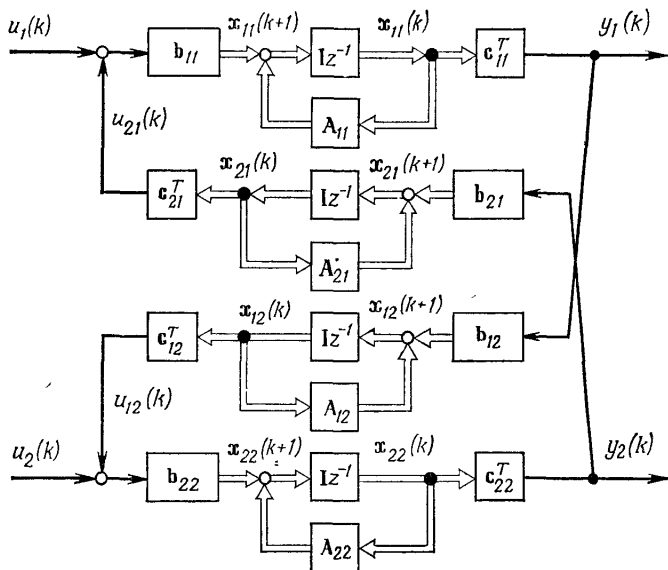


Рис. 18.2.3. Двумерный объект с V-канонической структурой.

появляются четыре дополнительные матрицы, как в случае структуры с непосредственной связью (см. (18.2-3)). Матрицы B и C имеют аналогичную структуру.

Результаты теоретического моделирования показывают, что реальные объекты в очень редких случаях имеют такие упрощенные структуры. В общем случае структуры реальных объектов описываются комбинацией различных специальных структур. Если описание в пространстве состояний формируется непосредственно по

передаточным функциям элементов рис. 18.1.2, то одни и те же переменные состояния могут быть включены в описание неоднократно. Так происходит, когда составляющие объект элементы имеют общие переменные состояния, как, например, в уравнении (18.1-1). В этом случае матрицы параметров содержат избыточные элементы. Однако если описание в пространстве состояний составлено с учетом наличия общих переменных состояния, так что они не используются двукратно или многократно, то оно содержит минимальное число состояний. Такая форма описания соответствует *минимальной реализации* объекта. Минимальная реализация является наблюдаемой и управляемой. Следовательно, неминимальное представление в пространстве состояний должно быть не полностью управляемо и/или не полностью наблюдаемо. Методы получения минимальной реализации даны, например, в работах [18.9] и [18.3].

После обсуждения некоторых структурных свойств многомерных объектов рассмотрим несколько методов синтеза многомерных систем управления, изложенных в следующих главах.

Параметрически оптимизируемые многомерные системы управления

Параметрически оптимизируемые многомерные регуляторы характеризуются тем, что имеют заданную структуру, свободные параметры которой определяются в результате оптимизации некоторого критерия или с помощью правил настройки. В отличие от обычных систем управления структура мно-

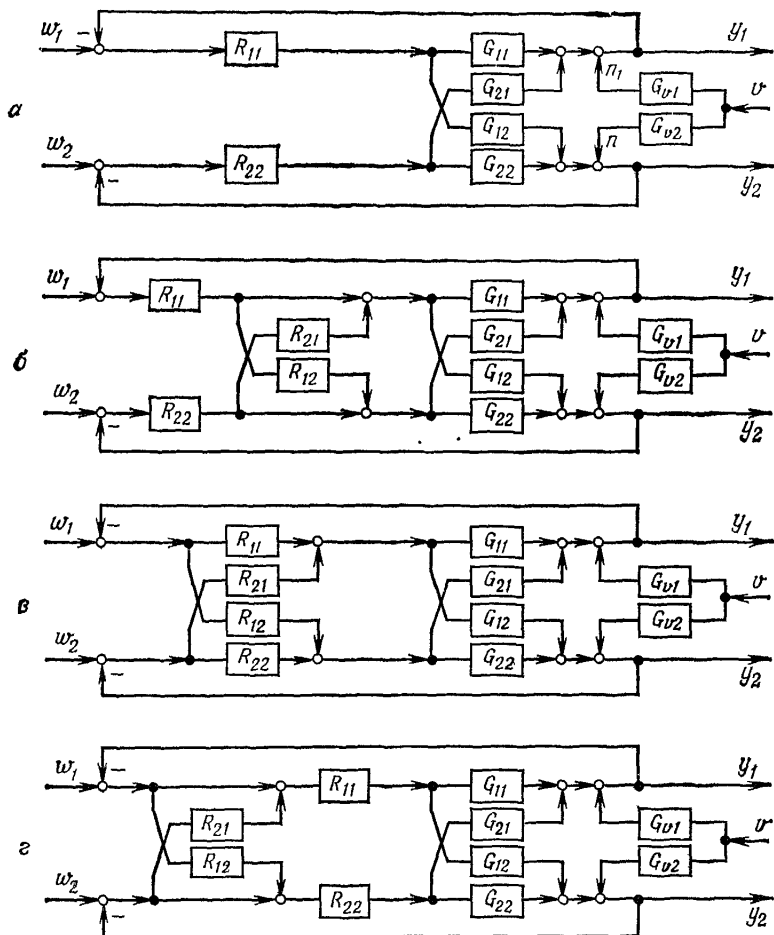


Рис. 19.0.1. Различные структуры двумерных регуляторов.

a — главные регуляторы; *б* — перекрестные регуляторы, расположенные после главных; *в* — перекрестные регуляторы, параллельные главным; *г* — перекрестные регуляторы, расположенные перед главными.

гомерных регуляторов зависит не только от порядка входящих в них алгоритмов управления, но и от структурного расположения элементов связи, как об этом было сказано в гл. 18.

Аналогично главному и связывающему элементам передачи многомерных объектов управления введем понятия *главных* и *связывающих (перекрестных) регуляторов*. Главные регуляторы R_{11} предназначены для непосредственного управления главными элементами G_{11} и обеспечивают требуемое качество переходных процессов по переменным y_1 относительно задающих переменных w_1 (рис. 19.0.1, а). Регуляторы R_{1j} используются для связи контуров управления со стороны регулятора (рис. 19.0.1, б—г). Перекрестные регуляторы можно синтезировать так, чтобы *развязать* контуры управления *полностью* или *частично* или же *усилить их взаимосвязь*. Выбор того или иного решения зависит от свойств объекта, действующих возмущающих и управляющих сигналов, а также от требований к качеству управления.

Перекрестные регуляторы могут быть синтезированы в R -канонической форме и располагаться до, параллельно или после главных регуляторов. То же можно сказать и о регуляторах в V -канонической форме. При реализации регуляторов с помощью аналоговых средств положение перекрестных регуляторов зависит от места расположения усилителя мощности. Что же касается цифровой реализации алгоритмов управления на специальном вычислителе, то в этом случае можно использовать любые структуры из приведенных на рис. 19.0.1. В дальнейшем из соображений большей простоты и наглядности будем рассматривать двумерные объекты управления. Полученные результаты могут быть легко распространены на объекты с большим числом регулируемых переменных.

19.1. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ГЛАВНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В гл. 18 уже было показано, что существует много структурных комбинаций элементов двумерных объектов и знаков их связи. Поэтому большинство исследований двумерных объектов связано с определенными вариантами их структур и передаточных функций. Способы управления и вопросы выбора параметров, описанные в работах [19.1]—[19.5] и [19.7], основаны на специальном R -каноническом представлении непрерывных объектов. Ниже обсуждаются некоторые результаты, содержащиеся в указанных публикациях, которые оказываются справедливыми для дискретных многомерных систем.

Двумерные объекты, представленные в R -канонической форме, с синхронным квантованием всех сигналов и равными тактами квантования характеризуются следующими свойствами, важными с позиций управления (см. разд. 18.1):

1. Устойчивость, качество:

а) передаточные функции главных элементов G_{11} , G_{22} и элементов перекрестной связи G_{12} , G_{21} :

● симметричные объекты

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_{22}, \\ G_{12} &= G_{21}; \end{aligned}$$

● несимметричные объекты

$$\begin{aligned} G_{11} &\neq G_{22}, \\ G_{12} &\neq G_{21}; \end{aligned}$$

б) коэффициент связи:

- динамический $\kappa(z) = G_{12}(z)G_{21}(z)/G_{11}(z)G_{22}(z)$;
- статический $\kappa_0 = K_{12}K_{21}/K_{11}K_{22}$;

$\kappa_0 < 0$: отрицательная перекрестная связь;

$\kappa_0 > 0$: положительная перекрестная связь.

2. Качество управления, параметры регулятора (в дополнение к п. 1):

а) влияние возмущений (рис. 19.0.1):

- возмущение v одновременно воздействует на оба контура (т. е. изменяется рабочая точка или нагрузка объекта) $p_1 = G_{v1}v$ и $p_2 = G_{v2}v$:
 - G_{v1} и G_{v2} имеют одинаковые знаки;
 - G_{v1} и G_{v2} имеют противоположные знаки;
- возмущения p_1 и p_2 независимы:
 - p_1 и p_2 действуют одновременно;
 - p_1 и p_2 действуют поочередно (детерминированные возмущения);

б) изменения задающих переменных w_1 и w_2 :

- одновременные $\begin{cases} w_1(k) = w_2(k), \\ w_1(k) \neq w_2(k); \end{cases}$
- поочередные;

в) взаимодействие главных результатов:

- R_{11} и R_{22} усиливают действие друг друга;
- R_{11} и R_{22} ослабляют действие друг друга;
- R_{11} усиливает R_{22} , R_{22} ослабляет R_{11} ;
- R_{11} ослабляет R_{22} , R_{22} усиливает R_{11} .

В случае дискретных сигналов *такты квантования* обоих главных контуров управления могут быть одинаковыми и различными. Квантование может также быть синхронным и асинхронным.

В следующем разделе рассмотрены области устойчивости и способы выбора параметров регуляторов для двумерных объектов, представленных в P -канонической форме. Результаты были получены главным образом для непрерывных систем управления, однако качественно они справедливы и для дискретных систем с относительно малыми тактами квантования.

19.1.1. Области устойчивости

При исследовании характеристик устойчивости двумерных систем управления с главными регуляторами пропорционального типа оказывается весьма удобным использовать зависимость границ устойчивости от величины коэффициентов передачи K_{R11} и K_{R22} .

На рис. 19.1.1 и 19.1.2 изображены области устойчивости *симметричных* двумерных объектов с передаточными функциями

$$G_{ij}(s) = \frac{K_{ij}}{(1+Ts)^3}, \quad ij = 11, 22, 12, 21, \quad (19.1-1)$$

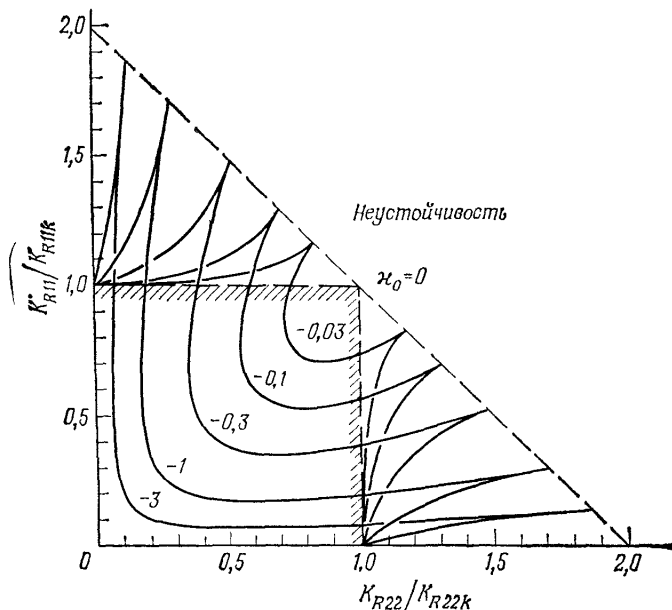


Рис. 19.1.1. Области устойчивости симметричной двумерной системы с отрицательной перекрестной связью и П-регуляторами [19.1].

для положительных и отрицательных значений коэффициента связи [19.1] $\kappa_0 = K_{12}K_{21}/K_{11}K_{22}$. Зависимость коэффициентов передачи регуляторов K_{R11} от критических значений коэффициентов передачи K_{R11k} для границ устойчивости при отсутствии связи между главными контурами, т. е. при $\kappa_0 = 0$, такова, что область устойчивости представляет собой квадрат, ограниченный линиями

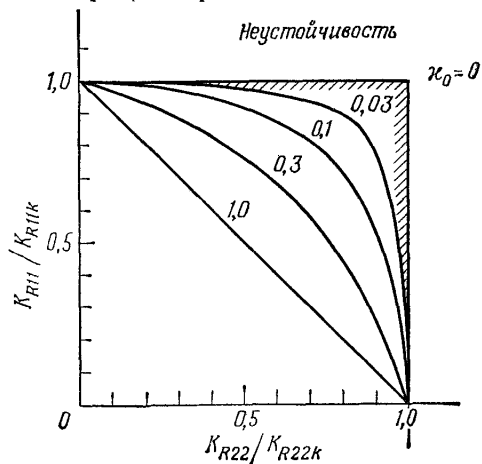


Рис. 19.1.2. Области устойчивости симметричной двумерной системы управления с положительной перекрестной связью и П-регуляторами [19.1].

$K_{R11}/K_{R11K}=1$ и осями координат. При увеличении значения отрицательного коэффициента связи ($\kappa_0 < 1$) в средней части область неустойчивости возрастает, а с обеих сторон возникают дополнительные пики (рис. 19.1.1). При увеличении значения положительного коэффициента связи ($\kappa_0 > 0$) область устойчивости уменьшается и при $\kappa_0=1$ ограничена треугольником (рис. 19.1.2). Для $\kappa_0 > 1$ двумерная система с главными регуляторами интегрирующего типа становится структурно неустойчивой, как это видно из рис. 18.1.3, а. В этом случае $G_{W1}(0)=1$, $G_{W2}(0)=1$ и при $\kappa_0=1$ возникает положительная обратная связь. Если $\kappa_0 > 1$, следует либо изменить знак коэффициента передачи регулятора, либо изменить коэффициенты связи управляющих и регулируемых переменных. Из рис. 19.1.1 и 19.1.2 видно, что область устойчивости при увеличении значения коэффициента связи убывает, если не учитывать наличия пиков при

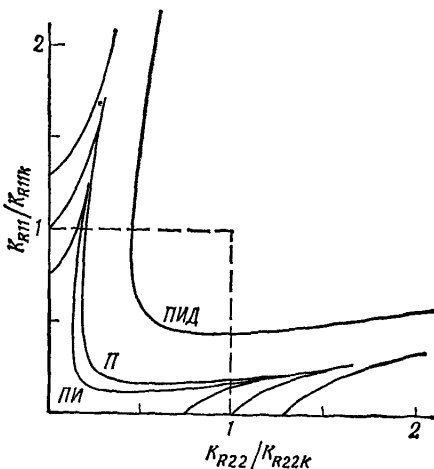


Рис. 19.1.3. Области устойчивости симметричной двумерной системы с отрицательной перекрестной связью ($\kappa_0=-1$) с непрерывными П-, ПИ- и ПИД-регуляторами [19.1]. ПИ-регулятор: $T_I=T_P$. ПИД-регулятор: $T_I=T_P$; $T_D=0,2T_P$. T_P — период колебаний при $K_{R11}=K_{R11K}$ (при критическом коэффициенте передачи на границе устойчивости), см. рис. в табл. 5.6.1.

отрицательных значениях коэффициента связи, которые на практике не используются.

На рис. 19.1.3 показано изменение областей устойчивости при введении в П-регулятор интегрирующего (ПИ-регулятор) и дифференцирующего (ПИД-регулятор) членов для случая отрицательного коэффициента связи. В первом случае область устойчивости убывает, а во втором — возрастает.

До сих пор границы устойчивости рассматривались для систем с непрерывными сигналами. Если же рассматривать дискретные регуляторы, то их области устойчивости при малых тактах квантования $T_0/T_{95} \leq 0,01$ близки к непрерывным. Однако при больших значениях тактов квантования области устойчивости существенно сокращаются, как это видно из рис. 19.1.4.

В работе [19.1] даны границы устойчивости асимметричных объектов. Постоянные времени (19.1-1) были изменены так, чтобы периоды устойчивых колебаний T_{p1} несвязанных контуров с П-регуляторами на границе устойчивости удовлетворяли условию $T_{p2}/T_{p1} > 1$. На рис. 19.1.5 изображены типовые формы областей

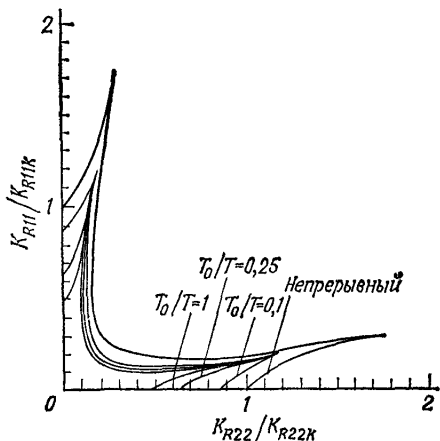


Рис. 19.1.4. Области устойчивости для той же системы, что изображена на рис. 19.1.3, при использовании дискретных регуляторов с различными тактами квантования T_0 .

устойчивости двумерных систем. На основании приведенных здесь и содержащихся в работе [18.7] исследований можно сделать следующие выводы о свойствах двумерных систем управления с R-канонической структурой:

а) При отрицательной перекрестной связи между контурами области устойчивости имеют пики, причем приближенно симметричным объектам соответствуют два пика, а остальным — только один пик.

б) При положительной перекрестной связи с возрастанием асимметрии объекта существенно увеличивается область устойчивости.

в) При возрастании асимметрии, когда, например, контур 1 оказывается более быстрым, граница устойчивости приближается к верхней части квадратной области устойчивости, соответствующей несвязанным контурам. Это означает, что более медленный контур меньше влияет на устойчивость более быстрого контура. Знание этих областей устойчивости позволяет сформулировать правила настройки двумерных регуляторов.

19.1.2. Оптимизация параметров и правила настройки двумерных регуляторов

Параметры оптимизируемых главных регуляторов с передаточной функцией

$$R_{11}(z) = \frac{u_1(z)}{e_1(z)} = \frac{Q_1(z^{-1})}{P_1(z^{-1})} = \frac{q_{01} + q_{11}z^{-1} + \dots + q_{v1}z^{-v}}{1 - z^{-1}}, \quad (19.1-2)$$

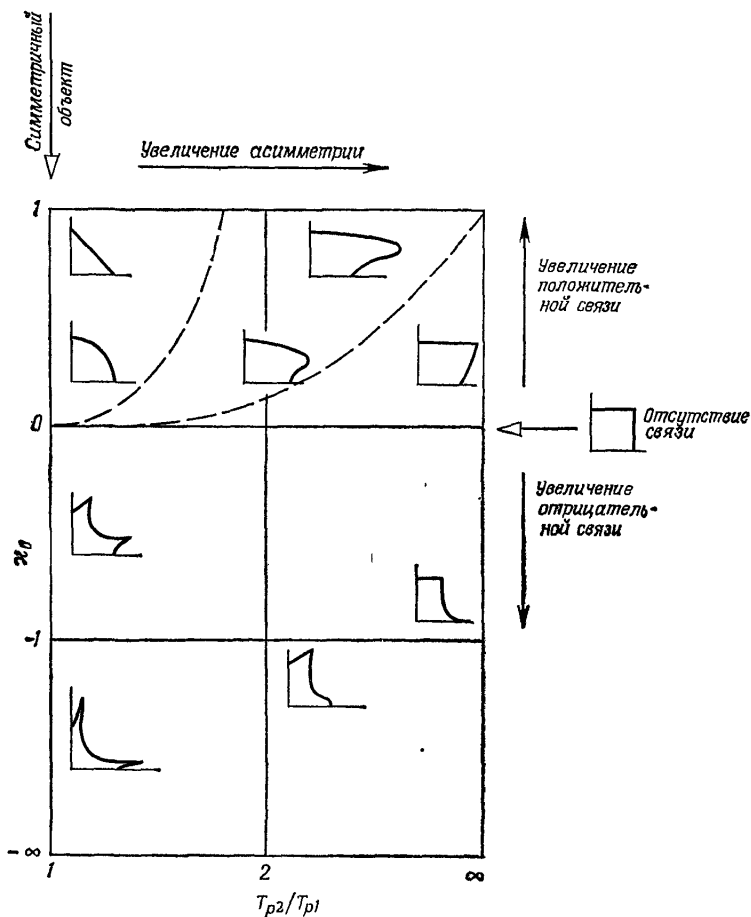


Рис. 19.1.5. Типичный вид областей устойчивости для двумерных систем управления с П-регуляторами; T_{p1} — период колебаний изолированных контуров на границе устойчивости.

где чаще всего $\nu=1$ или $\nu=2$, могут быть получены с помощью численной оптимизации критериев качества, в результате задания желаемого расположения полюсов или в соответствии с правилами настройки. В отличие от одноконтурных систем весовые коэффициенты при регулируемых переменных могут иметь различные значения, например при использовании смешанного критерия вида:

$$S_{cu}^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{k=0}^M [e_i^2(k) + r_1 \Delta u_i^2(k)]. \quad (19.1-3)$$

Здесь α_i — весовые коэффициенты главных контуров, причем $\sum \alpha_i = 1$. Если этот критерий имеет единственный минимум, удов-

лстворяющий условию

$$dS_{eu}^2/dq = 0, \quad (19.1.4)$$

то вектор оптимальных параметров регулятора будет равен

$$q^T = [q_{01}, q_{11}, \dots, q_{v1}; \dots; q_{0p}, q_{1p}, \dots, q_{vp}]. \quad (19.1.5)$$

Однако необходимые вычислительные затраты при увеличении числа p регулируемых переменных существенно возрастают. Удачный выбор начальных значений параметров регулятора может привести к ускорению сходимости процесса оптимизации. Результаты сильно

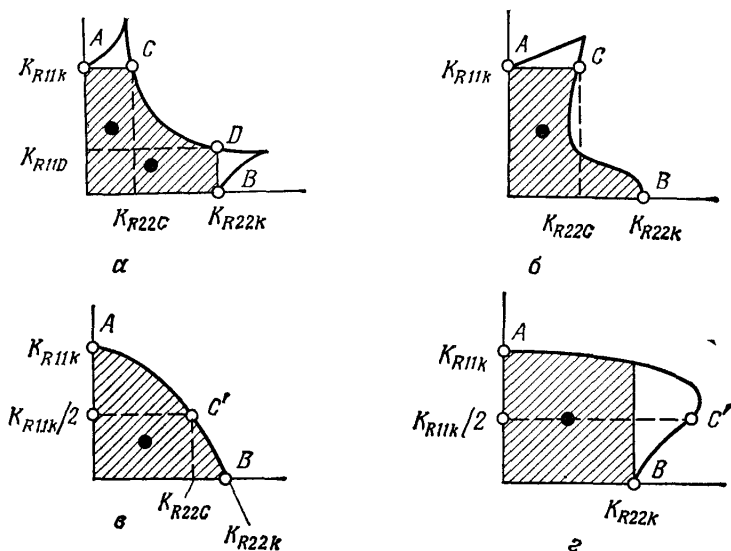


Рис. 19.1.6. Области допустимых значений коэффициентов передачи двумерных систем. Отрицательная перекрестная связь: *а* — симметричная, *б* — асимметричная. Положительная перекрестная связь: *в* — симметричная, *г* — асимметричная.

зависят от того, какие сигналы воздействуют на систему (см. разд. 19.1).

Для главных регуляторов двумерных систем были разработаны правила настройки. Они основывались на правилах Циглера — Никольса и предназначались для непрерывных систем [9.1] — [9.5] и [9.7]. Дополнительное практическое требование состоит в том, что один контур должен оставаться устойчивым, когда другой разомкнут. Поэтому их коэффициенты передачи должны удовлетворять соотношению $K_{Rii}/K_{Riik} < 1$ и лежать внутри заштрихованных областей на рис. 19.1.6.

На основании исследования областей устойчивости можно сформулировать следующие правила настройки (ссылки на *а—г* относятся к рис. 19.1.6).

1. Определение границ устойчивости

1.1. В качестве главных регуляторов берем П-регуляторы.

1.2. Задаем $K_{R22}=0$ и увеличиваем K_{R11} до тех пор, пока не достигнем границы устойчивости ($K_{R11}=K_{R11K}$, точка А).

1.3. Задаем $K_{R11}=0$ и, изменяя K_{R22} , находим точку В, т. е. K_{R22K} .

1.4. Задаем $K_{R11}=K_{R11K}$ и увеличиваем K_{R22} , пока не будут получены колебания с постоянной амплитудой (точка С для а и б).

1.5. Если в предыдущем пункте не будет наблюдаться промежуточной устойчивости, задаем $K_{R11}=K_{R11K}/2$ и увеличиваем K_{R22} , пока не получим точку С' (случай в и г).

1.6. Для случаев а и б повторим пункт 1.4, задавая $K_{R22}=K_{R22K}$ и изменяя K_{R11} , чтобы найти точку D (случай а).

Таким образом, оказывается приблизительно выясненным вид области устойчивости, а следовательно, и тип системы (т. е. соответствие случаям а—г на рис. 19.1.6).

2. Выбор коэффициентов передачи K_{Rii} (П) для П-регуляторов

Случай а. Если более важно качество управления по переменной y_1 , то $K_{R11}=0,5K_{R11K}$ и $K_{R22}=0,5K_{R22C}$. Если более важно качество управления по переменной y_2 , то $K_{R22}=0,5K_{R22K}$, $K_{R11}=0,5K_{R11D}$.

Случай б. Обычно значения коэффициентов передачи выбираются так, чтобы они лежали вблизи середины области устойчивости:

$$K_{R11}=0,5K_{R11K}, \quad K_{R22}=0,5K_{R22C}.$$

Случай в. $K_{R11}=0,25K_{R11K}$, $K_{R22}=0,5K_{R22C}$.

Случай г. $K_{R11}=0,5K_{R11K}$, $K_{R22}=0,5K_{R22K}$.

3. Выбор параметров ПИ-регуляторов

Коэффициент передачи как в случае П-регулятора.

Постоянная интегрирования:

Случаи а и б: $T_{ин(ПИ)}=(0,8\dots 1,2) T_{PC}$ или $T_{ин(ПИ)}=0,85T_{P11K}$;

Случаи в и г: $T_{ин(ПИ)}=(0,3\dots 0,8) T_{PC}$ или $T_{ин(ПИ)}=0,85T_{P11K}$.

Здесь T_{PC} или T_{P11K} — периоды устойчивых колебаний на границе устойчивости в точках С или А для $i=1$ или в точке В для $i=2$.

4. Выбор параметров ПИД-регуляторов

$$K_{Rii(ПИД)}=1,25K_{Rii(П)}, \quad T_{ин(ПИД)}=0,5T_{ин(ПИ)}, \quad T_{Дii}=0,25T_{ин(ПИД)}.$$

Приведенные правила настройки позволяют получить лишь приближенные значения параметров регуляторов, поэтому во многих случаях их приходится корректировать. Хотя эти правила были даны для непрерывных регуляторов, они могут быть использованы и для дискретных регуляторов, поскольку в этом случае также требуется обеспечить необходимый запас устойчивости.

Свойства переходных процессов различных двумерных систем управления, представленных в Р-канонической форме, были рас-

смотрены в работе [18.7]. При одновременном воздействии возмущений на обе регулируемые переменные коэффициент перекрестной связи κ_0 (как положительный, так и отрицательный) не оказывает существенного влияния на перегулирование, затухание и т. д. Качество процессов управления определяется главным образом взаимным влиянием главных регуляторов (группы с I по IV в табл. 18.1.1). Если система симметрична, то качество управления ухудшается для рассматриваемых групп в следующей последовательности $I \rightarrow III \approx IV \rightarrow II$, а для несимметричных систем $III \rightarrow I \rightarrow IV \rightarrow II$. Наилучшее качество управления достигается в системах с отрицательной перекрестной связью, если R_{11} усиливает R_{22} и R_{22} ослабляет R_{11} . В случае положительной связи аналогичный эффект достигается, если оба регулятора усиливают действие друг друга. Здесь в обоих случаях *усиливается действие главного регулятора более инерционного контура*. Наихудшим качеством регулирования характеризуются объекты с отрицательной перекрестной связью, когда R_{11} ослабляет R_{22} и R_{22} усиливает R_{11} и особенно, если перекрестная связь между регуляторами, ослабляющими действие друг друга, положительна. В последних случаях всегда ослабляется действие главного регулятора более инерционного контура. Из сказанного выше следует, что более быстрый контур мало зависит от более медленного, а влияние более быстрого контура на более медленный имеет существенное значение.

Более подробное сравнение качества связных двумерных систем с качеством их отдельных несвязанных контуров содержится в работе [18.7]. Для симметричных объектов отличия оказываются незначительными. Для несимметричных объектов показано, что качество управления более медленного контура при наличии связи улучшается в том случае, когда действие его регулятора или обоих регуляторов усиливается. В этом случае нет необходимости выполнять развязку контуров. Качество управления ухудшается, если оба регулятора ослабляют друг друга или если ослабляется действие регулятора более медленного контура. Развязку контуров следует проводить только тогда, когда перекрестные связи в объектах управления положительны, а главное, регуляторы ослабляют действие друг друга.

19.2. РАЗВЯЗКА С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕКРЕСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Если связная система управления обеспечивает низкое качество регулирования или если требуется нейтрализовать перекрестные связи в объекте, можно в дополнение к основным использовать перекрестные регуляторы. В общем случае полная развязка возможна только для определенного типа сигналов.

Рассмотрим многомерную систему управления (рис. 19.2.1), в которой $\dim u = \dim v = \dim w$. Для внешних сигналов v и w

получим

$$y = \underbrace{[I + G_p R]^{-1} G_{pv}}_{G_v} v + \underbrace{[I + G_p R]^{-1} G_p R}_{G_w} w. \quad (19.2-1)$$

Соответствующее характеристическое уравнение, определяющее собственные движения (моды) системы, имеет вид

$$[I + G_p R] y = 0. \quad (19.2-2)$$

Различают три типа развязки многомерных систем ([18.2], [19.6]).

- Развязка по задающим сигналам.

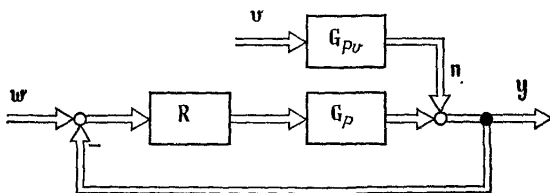


Рис. 19.2.1. Многомерная система управления.

Задающая переменная w_i влияет только на регулируемую переменную y_i и не влияет на остальные переменные y_j . В этом случае матрица

$$G_w = [I + G_p R]^{-1} G_p R = D_w \quad (19.2-3)$$

должна быть диагональной.

- Развязка по возмущающим сигналам.

Возмущение v_i влияет только на переменную y_i и не влияет на остальные y_j . При этом матрица

$$G_v = [I + G_p R]^{-1} G_{pv} = D_v \quad (19.2-4)$$

должна быть диагональной.

- Развязка по собственным движениям (модам).

Собственные движения отдельных контуров не влияют друг на друга, если отсутствуют внешние возмущения. В этом случае элементы вектора y развязаны, и из уравнения (19.2-2) следует, что матрица разомкнутой системы

$$G_p R = D_0 \quad (19.2-5)$$

должна быть диагональной. Система с независимыми модами является также развязанной по сигналам задающей переменной.

Элементы диагональных матриц могут выбираться произвольно из некоторой ограниченной области. Например, передаточные функции можно задавать так же, как и в случае несвязанных контуров. После этого следует рассчитать перекрестные регуляторы R_{ij} и оценить их реализуемость. Поскольку трудно синтезировать

развязанную систему по возмущению и она часто оказывается нереализуемой [18.2], в дальнейшем кратко будет рассмотрена развязка по собственным движениям, при которой система оказывается также развязанной по задающим сигналам.

Из уравнения (19.2-5) получим

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_P^{-1} \mathbf{D}_0 = \frac{\text{adj} \mathbf{G}_P}{\det \mathbf{G}_P} \mathbf{D}_0. \quad (19.2-6)$$

Элементы матрицы \mathbf{D}_0 и структура регулятора \mathbf{R} могут быть заданы произвольно, если выполняются условия реализуемости и входные сигналы объекта укладываются в допустимый диапазон. Кратко рассмотрим несколько вариантов двумерных систем управления.

а) *Объект P-структуры, регулятор P-структуры*

Передаточная матрица объекта в соответствии с уравнением (18.1-2) равна

$$\mathbf{G}_P = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix},$$

а матрица регулятора имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица регулятора (19.2-6) определяется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \frac{\text{adj} \mathbf{G}_P}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} \begin{bmatrix} G_{22}D_{11} & -G_{21}D_{22} \\ -G_{12}D_{11} & G_{11}D_{22} \end{bmatrix}. \quad (19.2-7)$$

Если матрица \mathbf{D} описывает поведение развязанных контуров системы, $D_{11} = G_{11}R_1$ и $D_{22} = G_{22}R_2$, тогда

$$\mathbf{R} = \frac{1}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} \begin{bmatrix} G_{22}G_{11}R_1 - G_{21}G_{22}R_2 \\ -G_{12}G_{11}R_1 & G_{11}G_{22}R_2 \end{bmatrix}. \quad (19.2-8)$$

Если регулятор оказывается нереализуемым, следует изменить матрицу \mathbf{D} .

б) *Объект P-структуры, регулятор V-структуры*

Из схемы развязки, изображенной на рис. 19.2.2, при

$$\mathbf{R}_L = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{R}_K = \begin{bmatrix} 0 & R_{21} \\ R_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

следует, что матрица, описывающая весь регулятор, определяется выражением

$$\mathbf{R} = [\mathbf{I} - \mathbf{R}_K]^{-1} \mathbf{R}_L. \quad (19.2-9)$$

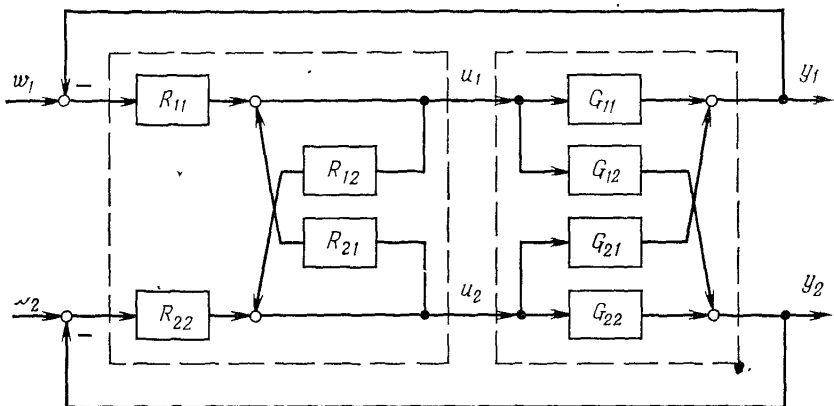


Рис. 19.2.2. Развязка P-канонического объекта с помощью V-канонических перекрестных регуляторов, расположенных после главных.

Развязка собственных движений для задающих сигналов (см. уравнение (19.2-6)) достигается, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \mathbf{R}_K]^{-1} \mathbf{R}_H &= \mathbf{G}_P^{-1} \mathbf{D}_0, \\ \mathbf{R}_H &= [\mathbf{I} - \mathbf{R}_K] \mathbf{G}_P^{-1} \mathbf{D}_0. \end{aligned} \quad (19.2-10)$$

Следовательно, для двумерной системы с $D_{11} = G_{11} R_1$

$$R_{11} = R_1, \quad R_{22} = R_2, \quad (19.2-11)$$

$$R_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{22}}, \quad R_{21} = -\frac{G_{21}}{G_{11}}. \quad (19.2-12)$$

Развязка оказывается очень простой. При этом не вводятся дополнительных элементов в главные регуляторы, а перекрестные регуляторы не зависят от главных регуляторов. Если порядки главных

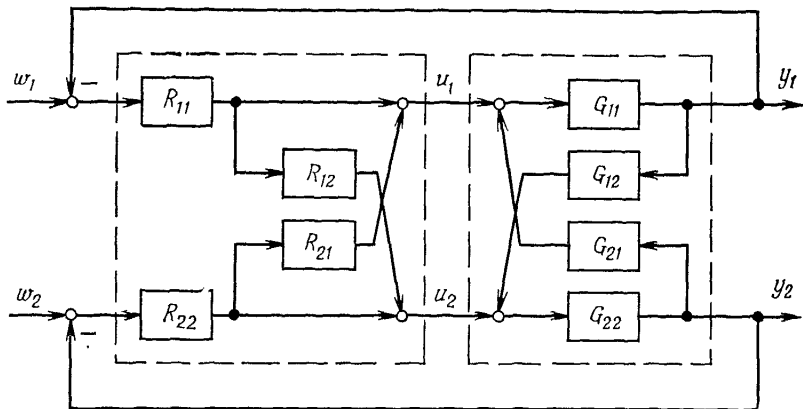


Рис. 19.2.3. Развязка V-канонического объекта с помощью P-канонических перекрестных регуляторов, расположенных после главных.

элементов объекта выше порядков элементов перекрестной связи или они имеют нули вне единичной окружности на плоскости z , то R_{12} и R_{21} будут нереализуемыми. Анализ блок-схемы показывает, что перекрестные регуляторы представляют собой идеальные регуляторы с прямой связью.

в) *Объект V-структуры, регулятор P-структуры*

Если развязка выполняется в соответствии с рис. 19.2-3, снова получим простые соотношения для регуляторов:

$$R_{11} = R_1, \quad R_{22} = R_2, \quad (19.2-13)$$

$$R_{12} = -G_{11}G_{12}, \quad R_{21} = -G_{22}G_{21}. \quad (19.2-14)$$

В этом случае проблем реализуемости не возникает.

19.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ГЛАВНЫХ И ПЕРЕКРЕСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В разд. 19.1 было показано, что перекрестные связи в объекте управления могут либо ухудшать, либо улучшать качество управления по сравнению с развязанными контурами. Поэтому введение перекрестных регуляторов должно служить для развязки контуров в первом случае и для усиления перекрестной связи во втором случае. Об этом было сказано в работе [18.7]. В качестве перекрестных регуляторов часто вполне достаточно использовать пропорциональные регуляторы:

$$u_1(z) = q_{01j}e_1(z) = K_{R1j}e_1(z).$$

Соответствующие коэффициенты передачи таких регуляторов могут быть найдены в результате численной параметрической оптимизации. Результаты моделирования показывают, что для P-структурных низкочастотных симметричных объектов введение перекрестных регуляторов не приводит к улучшению качества регулирования. Однако для несимметричных объектов можно добиться некоторого улучшения. Дополнительные регуляторы должны использоваться для усиления перекрестных связей, если главные регуляторы усиливают действие друг друга, и для развязки контуров, если главные регуляторы взаимно ослабляют друг друга.

Многомерные матричные полиномиальные системы управления

Методы синтеза несвязанных регуляторов входа/выхода могут быть перенесены на многомерный случай при использовании матричного полиномиального представления многомерных объектов управления, описанного в разд. 18.1.5, если число входов объекта равно числу его выходов

20.1. ОБОБЩЕННЫЙ МАТРИЧНЫЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР

Обобщенный матричный полиномиальный регулятор описывается уравнением

$$\mathbf{P}(z^{-1}) \mathbf{u}(z) = \mathbf{Q}(z^{-1}) [\mathbf{w}(z) - \mathbf{y}(z)] = \mathbf{Q}(z^{-1}) \mathbf{e}(z), \quad (20.1-1)$$

где полиномиальные матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z^{-1}) &= \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{P}_\mu z^{-\mu}, \\ \mathbf{Q}(z^{-1}) &= \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{Q}_\nu z^{-\nu}. \end{aligned} \quad (20.1-2)$$

Управляющие переменные вычисляются с помощью выражения

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{P}^{-1}(z^{-1}) \mathbf{Q}(z^{-1}) \mathbf{e}(z), \quad (20.1-3)$$

если матрица $\mathbf{P}(z^{-1})$ неособая. Подставляя последнее выражение в уравнение объекта

$$\mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{y}(z) = \mathbf{B}(z^{-1}) z^{-d} \mathbf{u}(z), \quad (20.1-4)$$

получим выражение, описывающее замкнутую систему

$$\mathbf{y}(z) = [\mathbf{A}(z^{-1}) + \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{P}^{-1}(z^{-1}) \mathbf{Q}(z^{-1}) z^{-d}]^{-1} \mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{P}^{-1}(z^{-1}) \times \\ \times \mathbf{Q}(z^{-1}) z^{-d} \mathbf{w}(z). \quad (20.1-5)$$

Сравнение последнего уравнения с уравнением (11.1-3) подтверждает формальное соответствие многомерного случая с одномерным.

20.2. МАТРИЧНЫЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР

Предположим, что все полиномы модели объекта имеют одинаковый порядок m и запаздывание по всем входам равно d . Тогда для получения аperiodического регулятора необходимо, чтобы выходные координаты объекта при ступенчатом изменении задающего сигнала $w(k)$ устанавливались за $m + d$ тактов, а его управляющие сигналы — за m тактов. В случае систем с одним входом и одним выходом из этого условия получим передаточные

функции (см. разд. 7.1)

$$\frac{y(z)}{w(z)} = B^{-1}(1) B(z^{-1}) z^{-d}, \quad \frac{u(z)}{w(z)} = B^{-1}(1) A(z^{-1})$$

и передаточную функцию аperiodического регулятора

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{B^{-1}(1) A(z^{-1})}{1 - B^{-1}(1) B(z^{-1}) z^{-d}}.$$

По прямой аналогии запишем уравнение синтеза для многомерного аperiodического регулятора (МАР1) [20.1]:

$$[I - B^{-1}(1) B(z^{-1}) z^{-d}] u(z) = B^{-1}(1) A(z^{-1}) e(z). \quad (20.2-1)$$

Этот регулятор обеспечивает конечное время установления переходных процессов по переменным

$$u(z) = B^{-1}(1) A(z^{-1}) w(z), \quad (20.2-2)$$

$$y(z) = A^{-1}(z^{-1}) B(z^{-1}) z^{-d} B^{-1}(1) A(z^{-1}) w(z) = R(z^{-1}) w(z), \quad (20.2-3)$$

если матрица $R(z^{-1})$ имеет порядок $m + d$. Уравнение регулятора можно также записать в следующем виде:

$$u(z) = B^{-1}(1) A(z^{-1}) [w(z) - y(z)] + B^{-1}(1) B(z^{-1}) z^{-d} u(z). \quad (20.2-4)$$

Для уменьшения величины входных сигналов объекта управления можно увеличить время установления в системе. Если увеличить время установления на один такт, до $m + 1$ и $m + d + 1$, то передаточная функция аperiodического регулятора для объекта с одним входом и одним выходом будет равна (см. (7.2-14))

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 [1 - z^{-1}/\alpha] A(z^{-1})}{1 - q_0 (1 - z^{-1}/\alpha) B(z^{-1}) z^{-d}},$$

где $1/\alpha = 1 - 1/q_0 B(1)$. Значение q_0 может быть выбрано произвольно в диапазоне

$$1/(1 - a_1) B(1) \leq q_0 \leq 1/B(1),$$

так чтобы выполнялось условие $u(1) \leq u(0)$.

Наименьшие значения управляющего сигнала объекта соответствуют значению q_0 , равному

$$q_0 = 1/(1 - a_1) B(1),$$

откуда следует, что

$$1/\alpha = a_1.$$

Соответствующее уравнение многомерного регулятора (МАР2) имеет вид

$$[I - Q_0 [I - Hz^{-1}] B(z^{-1}) z^{-d}] u(z) = Q_0 [I - Hz^{-1}] A(z^{-1}) e(z), \quad (20.2-5)$$

где

$$H = I - Q_0^{-1} B^{-1}(1). \quad (20.2-6)$$

Матрица Q_0 может быть произвольно выбрана в диапазоне

$$Q_{\text{min}} = B^{-1}(1) [I - A_1]^{-1}, \quad Q_{\text{max}} = B^{-1}(1), \quad (20.2-7)$$

причем если выбрано $Q_0 = Q_{\text{min}}$, то $u(1) = u(0)$. Таким образом, для наименьшей величины входных сигналов в этом случае

$$Q_0 = B^{-1}(1) [I - A_1]^{-1}, \quad (20.2-8)$$

откуда следует, что

$$H = A_1. \quad (20.2-9)$$

20.3. МАТРИЧНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Предположим, что матричная полиномиальная стохастическая модель описывается выражением

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1})z^{-d}u(z) + D(z^{-1})v(z), \quad (20.3-1)$$

где

$$D(z^{-1}) = D_0 + D_1z^{-1} + \dots + D_mz^{-m}. \quad (20.3-2)$$

Синтез обобщенного регулятора с минимальной дисперсией выполняется на основании минимизации критерия [20.1], который имеет вид

$$I(k+d+1) = E \{ [y(k+d+1) - w(k)]^T [y(k+d+1) - w(k)] + [u(k) - u_w(k)]^T R [u(k) - u_w(k)] \}, \quad (20.3-3)$$

где матрица $R = R^T$ положительно полуопределена. Переменная $u_w(k)$ определяет установившееся значение сигнала $u(k)$, которое вычисляется с помощью выражения

$$u_w(k) = B^{-1}(1) A(1) w(k). \quad (20.3-4)$$

Как и в случае уравнения (14.2-4), модель объекта и сигнала представляется в виде

$$z^{(d+1)}y(z) = A^{-1}(z^{-1}) [B(z^{-1})zu(z) + L(z^{-1})v(z)] + F(z^{-1})z^{(d+1)}v(z), \quad (20.3-5)$$

где матричные полиномы $F(z^{-1})$ и $L(z^{-1})$ описываются выражениями

$$F(z^{-1}) = I + F_1z^{-1} + \dots + F_dz^{-d}, \quad (20.3-6)$$

$$L(z^{-1}) = L_0 + L_1z^{-1} + \dots + L_{m-1}z^{-(m-1)}. \quad (20.3-7)$$

Параметры этих полиномов определяются из уравнения

$$D(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-(d+1)}L(z^{-1}). \quad (20.3-8)$$

После этого выполняется преобразование уравнения (20.3-5) во временную область и по аналогии с уравнениями (14.1-7)—(14.1-10)

формируется $I(k+d+1)$. Затем вычисляется $\partial I(k+d+1)/\partial u(k)=0$, в результате чего будет получено уравнение

$$\mathbf{B}_1^T [\mathbf{A}^{-1}(z^{-1}) [\mathbf{B}(z^{-1}) \mathbf{z} u(z) + \mathbf{L}(z^{-1}) \mathbf{v}(z)] - \mathbf{w}(z)] + \\ + \mathbf{R} [\mathbf{u}(z) - \mathbf{u}_w(z)] = 0, \quad (20.3-9)$$

где вектор $\mathbf{v}(z)$ может быть заменен (восстановлен) выражением

$$\mathbf{v}(z) = \mathbf{D}^{-1}(z^{-1}) [\mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{y}(z) - \mathbf{B}(z^{-1}) z^{-d} \mathbf{u}(z)]. \quad (20.3-10)$$

После подстановки выражения (20.3-4) в (20.3-9) будет получено уравнение *обобщенного матричного полиномиального регулятора с минимальной дисперсией* (МРМД1):

$$\mathbf{u}(z) = [\mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{D}^{-1}(z^{-1}) \mathbf{B}(z^{-1}) z + (\mathbf{B}_1^T)^{-1} \mathbf{R}]^{-1} \times \\ \times \{[\mathbf{I} + (\mathbf{B}_1^T)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{B}^{-1}(1) \mathbf{A}(1)] \mathbf{w}(z) - \mathbf{A}^{-1}(z^{-1}) \mathbf{L}(z^{-1}) \mathbf{D}^{-1}(z^{-1}) \times \\ \times \mathbf{A}(z^{-1}) \mathbf{y}(z)\}. \quad (20.3-11)$$

Если положить $\mathbf{R} = 0$, то из уравнений (20.3-9) и (20.3-1) будет получен *регулятор с минимальной дисперсией* (МРМД2) [20.2],

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{B}^{-1}(z^{-1}) \frac{z^{-1}}{1-z^{-(d+1)}} [\mathbf{A}(z^{-1}) [\mathbf{w}(z) - \mathbf{y}(z)] + \\ + [\mathbf{D}(z^{-1}) - \mathbf{L}(z^{-1}) \mathbf{v}(z)]], \quad (20.3-12)$$

где $\mathbf{v}(z)$ следует заменить соответствующим уравнением (20.3-10). Уравнение замкнутой системы с этим регулятором имеет следующий вид:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{v}(z) + z^{-(d+1)} \mathbf{w}(z). \quad (20.3-13)$$

Примеры приведены в разд. 25.8.

Многомерные системы управления с регуляторами состояния

Вопросы синтеза регуляторов состояния для многомерных объектов уже были рассмотрены в гл. 8. Поэтому здесь будут лишь приведены некоторые дополнительные соображения. В детерминированном случае уравнения объекта имеют вид

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (21-1)$$

$$y(k) = Cx(k). \quad (21-2)$$

Предполагается, что объект имеет m переменных состояния, p входов и r выходов. Тогда оптимальный регулятор состояния описывается уравнением

$$u(k) = -Kx(k). \quad (21-3)$$

Если каждая переменная состояния воздействует на каждый вход объекта, то матрица регулятора содержит $p \times m$ коэффициентов.

21.1. МНОГОМЕРНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ С ЗАДАНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ПОЛЮСОВ

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) = Fx(k) \quad (21.1-1)$$

определяется выражением (см. разд. 8.3)

$$\det[zI - A + BK] = \det[zI - F] = \alpha_m + \alpha_{m-1}z + \dots + \alpha_1 z^{m-1} + z^m. \quad (21.1-2)$$

Коэффициенты регулятора (их число равно $p \times m$), однако, нельзя определить однозначно, задавая m коэффициентов α_i характеристического уравнения. Поэтому необходимо задать дополнительные требования. Как показано в [2.22], выбор определенного вида структуры матрицы K или F упрощает вычисление коэффициентов α_i . Например, для введения обратной связи можно использовать только переменные состояния главного элемента передачи или кроме них учитывать перекрестные связи при формировании «прямых» связей. В такой упрощенной структуре можно однозначно определить коэффициенты регулятора, задавая коэффициенты α_i характеристического уравнения. Другие подходы к синтезу регуляторов с заданным расположением полюсов описаны, например, в работе [2.19].

21.2. МНОГОМЕРНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Об этих регуляторах речь шла в разд. 8.1. Минимизация квадратичного критерия качества приводит к получению стационарного решения матричного уравнения Риккати (8.1-31)

$$K = -(R + B^T \bar{P} B)^{-1} B^T \bar{P} A. \quad (21.2-1)$$

21.3. МНОГОМЕРНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ РАЗВЯЗКИ СИСТЕМ

Многомерная система с регулятором состояния, выходные переменные которой не влияют друг на друга, описывается уравнением

$$y(k+1) = \Lambda y(k) = \Lambda Cx(k), \quad (21.3-1)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, r$$

(развязанная система, см. разд. 19.2). Сравнивая уравнения (21.1-1) и (21.3-1), получим

$$y(k+1) = Cx(k+1) = C[A - BK]x(k). \quad (21.3-2)$$

Следовательно, уравнение регулятора будет иметь вид

$$K = [CB]^{-1}[CA - \Lambda C], \quad (21.3-3)$$

где диагональные элементы λ_i матрицы Λ являются собственными значениями системы, т. е. корнями уравнения (21.1-2).

21.4. МНОГОМЕРНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ СОСТОЯНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В разд. 15.3 рассматривались оптимальные регуляторы состояния для стохастических возмущений, синтез которых связан с минимизацией критерия качества (15.1-5) и в которых используется оценивание переменных состояния. Вывод уравнения такого регулятора состояния выполнялся на основе изложенной в гл. 8 методики построения регуляторов состояния для детерминированных возмущений. В этой главе приведен другой метод, основанный на принципе минимальной дисперсии, о котором шла речь в гл. 14. Такой подход использует предсказание характеристик шума и оказывается особенно эффективным для адаптивного управления многомерными объектами. Для получения стохастических регуляторов с минимальной дисперсией воспользуемся моделью в пространстве состояний (что оказывается удобным для идентификации)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fv(k), \quad (21.4-1)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k), \quad (21.4-2)$$

где $v(k)$ — гауссовский белый шум с нулевым средним. Квадратичный критерий, подлежащий минимизации, описывается выраже-

нием

$$I(k+1) = E \{ \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \}, \quad (21.4-3)$$

где \mathbf{Q} — положительно определенная, а \mathbf{R} — положительно полуопределенная матрицы. Этот критерий совпадает с критерием, описываемым уравнением (8.1-8). Единственное отличие состоит в том, что в данном случае входным сигналом объекта является шум $\mathbf{v}(k)$. Следовательно, мы можем непосредственно использовать результаты, полученные в гл. 8 [см. уравнения (8.1-9) и (8.1-10)], и записать

$$\frac{\partial I(k+1)}{\partial \mathbf{u}(k)} = 2\mathbf{B}^T \mathbf{Q} [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{F} \mathbf{v}(k)] + 2\mathbf{R} \mathbf{u}(k) = \mathbf{0}. \quad (21.4-4)$$

Уравнение обобщенного многомерного регулятора состояния с минимальной дисперсией (МРМДС1) имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \mathbf{v}(k)]. \quad (21.4-5)$$

Сигнал шума может быть восстановлен в соответствии с уравнением

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \mathbf{x}(k), \quad (21.4-6)$$

где $\mathbf{x}(k)$ предсказывается с помощью уравнения (21.4-1). Если запаздывание не включено в матрицу системы \mathbf{A} , уравнение регулятора принимает вид [20 1]

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} [\mathbf{A} \mathbf{x}(k+d) + \mathbf{A}^d \mathbf{F} \mathbf{v}(k)], \quad (21.4-7)$$

а уравнение предсказания запишется как

$$\mathbf{x}(k+d) = E \{ \mathbf{x}(k+d) | k-1 \} = \mathbf{A}^d \mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{d-1} \mathbf{A}^{d-i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-d+i). \quad (21.4-8)$$

Другая разновидность регулятора с минимальной дисперсией, которая была рассмотрена в гл. 14 и разд. 20.3, была получена в результате минимизации критерия

$$I(k+d+1) = E \{ \mathbf{y}^T(k+d+1) \mathbf{S} \mathbf{y}(k+d+1) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \}. \quad (21.4-9)$$

В этом критерии в отличие от (21.4-3) минимизируется дисперсия выходной координаты объекта. Вводя весовую матрицу вида $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C}$, получим уравнение регулятора МРМДС2:

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} [\mathbf{A} \mathbf{x}(k+d) + \mathbf{A}^d \mathbf{F} \mathbf{v}(k)]. \quad (21.4-10)$$

Наконец, положив $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, получим уравнение многомерного регулятора состояния с минимальной дисперсией МРМДС3:

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{A} \mathbf{x}(k+d) + \mathbf{A}^d \mathbf{F} \mathbf{v}(k)]. \quad (21.4-11)$$

Анализ уравнений регуляторов показывает, что их можно представить состоящими из двух частей — детерминированного контура управления с обратной связью, формирующего сигнал $u_x(k)$, и стохастического контура управления с прямой связью, формирующего сигнал $u_v(k)$:

$$u(k) = u_x(k) + u_v(k) = K_x x(k+d) + K_v v(k). \quad (21.4-12)$$

Детерминированный регулятор с обратной связью в обобщенном регуляторе с минимальной дисперсией представляет собой регулятор, получаемый на основании решения матричного уравнения Риккати (если матрицу \bar{P} в уравнении (21.2-1) или (8.1-34) заменить матрицей Q). Детерминированный регулятор в регуляторе с минимальной дисперсией, описываемом уравнением (21.4-11), является регулятором состояния для развязки многомерных систем (см. уравнение (21.3-3)), если $\Lambda = 0$ [20.1].

Адаптивные системы с идентификацией параметров объектов управления

ГЛАВА 22

Адаптивные системы управления

Краткий обзор

Средства цифровой техники, т. е. управляющие ЭВМ и микропроцессоры, открывают значительно более широкие возможности для построения адаптивных регуляторов (или адаптивных алгоритмов управления), нежели применявшиеся до недавних пор аналоговые вычислители. Стремительное развитие технологии производства цифровых интегральных схем создало предпосылки для практического внедрения сложных законов управления, которые либо вовсе нельзя реализовать с помощью аналоговой техники, либо принципиально возможно, но лишь ценой неприемлемых затрат. Следует отметить, что сама форма описания регуляторов и моделей динамических объектов в дискретном времени обладает существенными преимуществами по сравнению с описанием в непрерывном времени, позволяя упростить как синтез алгоритмов, так и их техническую реализацию. Для создания адаптивных алгоритмов управления, отвечающих требованиям практики, большое значение имели также результаты новых теоретических исследований в области цифрового управления и идентификации, проводившихся начиная примерно с 1965 г. Не удивительно поэтому, что интерес к проблемам адаптивного управления за последние 10 лет существенно возрос. Немало статей по вопросам адаптации публиковалось и в 1958—1968 гг. Однако большинство из них было посвящено методам обработки непрерывных сигналов с помощью аналоговых вычислителей. Обзоры первых работ по адаптивным системам можно найти в [22.1] — [22.10]. Сложность реализации систем этого типа и, самое главное, отсутствие универсальных методов их построения

привели к тому, что в последующие годы интерес к ним несколько угас.

В этой вводной главе дается краткий анализ основных схем адаптации. Сравнение различных направлений в области разработки адаптивных систем показывает, что само понятие «адаптация» зачастую толкуется по-разному. Некоторые трактовки этого термина были приведены в работе [22.15]; здесь же предложен и ряд новых определений. Ниже обсуждаются лишь такие схемы адаптивных регуляторов, которые основаны на описании систем управления по их входным и выходным сигналам. В последующих главах исследуются различные принципы адаптивного управления и соответствующие

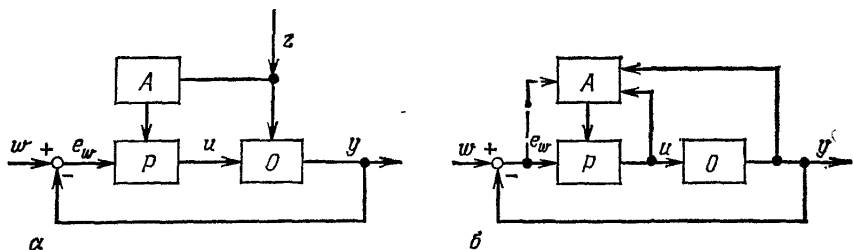


Рис. 22.1. Основные схемы настройки регуляторов. а — настройка с прямой связью (адаптация по разомкнутому циклу); б — настройка с обратной связью (адаптация по замкнутому циклу).

А — алгоритм настройки, Р — регулятор, О — объект управления.

щие вычислительные алгоритмы. С целью упрощения выкладок рассматриваются только объекты с одним входом и одним выходом.

Главное отличие *адаптивных систем управления* от систем с фиксированными параметрами и структурой состоит в том, что они могут приспосабливаться (подстраиваться) к изменяющимся характеристикам объектов и протекающих в них процессов. Существует два основных способа настройки регуляторов, которые иллюстрируются рис. 22.1.

Динамические свойства некоторых объектов полностью определяются внешними факторами, доступными прямому измерению (например, интенсивностью потока, скоростью объекта и т. п.). Если известно, как должен настраиваться регулятор в зависимости от этих факторов, можно применять *прямой метод настройки*, или адаптацию по разомкнутому циклу (см. рис. 22.1, а). В этой схеме адаптации сигналы обратной связи, идущие от замкнутого контура управления к регулятору, отсутствуют.

В условиях, когда невозможно оценить динамические свойства объекта непосредственно, приходится использовать *настройку с обратной связью*, или адаптацию по замкнутому циклу (см. рис. 22.1, б). При этом необходимый минимум информации об объекте (его порядок, параметры) получают путем обработки измерений входных и выходных сигналов. Для оценки характеристик объекта

могут применяться методы идентификации (по измерениям входа u и выхода y) или определения показателей качества управления (по измерениям e_w и u). Исходя из полученных данных производится расчет и настройка регулятора. Структурно это равносильно введению второй обратной связи и соответственно второго замкнутого контура, в котором информация циркулирует следующим образом: сигналы в контуре управления — алгоритм настройки — регулятор — сигналы в контуре управления.

Далее рассматриваются только системы с адаптацией по замкнутому циклу, поскольку настройка с прямой связью (если она вообще возможна) реализуется традиционными способами.

Все адаптивные регуляторы можно разделить на два больших класса. К первому относятся *самооптимизирующиеся регуляторы*,

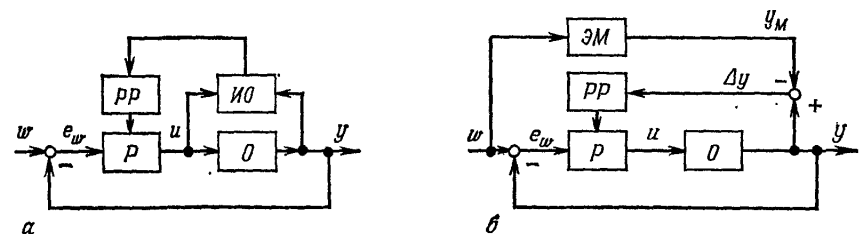


Рис. 22.2. Основные схемы адаптивных систем с настройкой регуляторов по замкнутому циклу.

а — самооптимизирующийся адаптивный регулятор (СОАР); *б* — адаптивный регулятор с эталонной моделью (АРЭМ).
 PP — расчет регулятора, IO — идентификация объекта, ЭМ — эталонная модель.

задачей которых является достижение наилучшего качества управления при заданном критерии оптимальности и наличии определенной информации об объекте и о его сигналах (рис. 22.2, *а*).

Процесс адаптации в системах управления с регуляторами этого типа проходит в три этапа:

1. Идентификация объекта или системы управления в целом.
2. Расчет регулятора.
3. Настройка регулятора (или изменение его структуры [22.16]).

Обзоры современных методов построения самооптимизирующихся регуляторов содержатся в работах [22.14], [25.6], [25.12].

Во вторую группу адаптивных регуляторов входят *регуляторы с эталонной моделью* (рис. 22.2, *б*). Их задача состоит в получении такой реакции замкнутого контура управления на определенный входной сигнал, которая была бы максимально близка к реакции на этот же сигнал заданной эталонной модели. Очевидно, данный принцип адаптации предполагает наличие некоторого измеряемого внешнего сигнала (например, задающего воздействия в следящей системе), причем адаптация производится лишь в те периоды, когда этот сигнал начинает изменяться. В данном случае процесс адаптации также состоит из трех этапов:

1. Сравнение реакций замкнутого контура управления и эталонной модели.
2. Расчет регулятора.
3. Настройка регулятора.

Если в системе используется эталонная модель с фиксированными параметрами, со временем реакция системы приближается к реакции этой модели, которая не обязательно должна быть «оптимальной». Обзоры по системам с эталонной моделью можно найти в работах [22.12], [22.13], [22.17]. Достоинством систем этого класса является их способность к быстрой адаптации при подаче входных сигналов определенной формы. Немаловажно и то, что для них разработаны хорошо себя зарекомендовавшие методы синтеза, в основе которых лежит теория устойчивости нелинейных систем. В то же время следует иметь в виду, что системы данного типа не могут адаптироваться к внешним условиям, если измеряемый входной сигнал остается неизменным. В этом смысле самооптимизирующиеся регуляторы обладают существенным преимуществом, поскольку адаптируются к внешним возмущениям даже в тех случаях, когда они не поддаются измерению.

Далее будут рассматриваться только *самооптимизирующиеся регуляторы*, основанные на *идентификации параметров объекта*. Проблемы идентификации объектов управления и моделей случайных сигналов обсуждаются в гл. 23. Идентификации объектов в замкнутом контуре посвящена гл. 24. В гл. 25 описывается специальный тип самооптимизирующихся регуляторов — регуляторы с настраиваемыми параметрами.

Методы текущей идентификации динамических объектов и моделей случайных сигналов

Задачей *идентификации* является экспериментальное определение характеристик динамических объектов и связанных с ними сигналов. Оценивание параметров системы производится в рамках математической модели определенного класса. При этом различие между реальным объектом или сигналом и соответствующей математической моделью должно быть по возможности минимально [3.12], [3.13]. *Текущей идентификацией* будем называть процедуру определения параметров путем обработки на ЭВМ данных, которые поступают от объекта идентификации непосредственно в процессе его функционирования. В некоторых случаях измеряемые сигналы объекта первоначально накапливаются в виде блоков или массивов информации. Обработку такого типа принято именовать *пакетной*. Если же сигналы обрабатываются по истечении каждого такта квантования, то говорят, что обработка ведется *в реальном масштабе времени*.

В области адаптивных систем управления основное внимание уделяется методам *текущей идентификации в реальном времени*. Кроме того, при синтезе регуляторов главным образом используются *параметрические модели объектов и возмущений*. Такие модели характеризуются конечным числом параметров. Для них разработаны эффективные алгоритмы расчета, требующие относительно небольших затрат вычислительных ресурсов. Эти алгоритмы могут применяться при проектировании систем управления объектами различных типов.

Для идентификации в реальном времени созданы *рекуррентные методы оценивания параметров* стационарных и нестационарных линейных объектов, нелинейных объектов определенного класса, а также стационарных и некоторых нестационарных случайных сигналов. В этой главе представлен краткий обзор наиболее известных рекуррентных методов параметрической идентификации. Подробное обсуждение этих методов, в том числе их вывод и анализ условий сходимости, читатель сможет найти в работах [3.12], [3.13], а также в литературе, отмеченной в ссылках.

23.1. МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ И СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Будем полагать, что исследуемый объект устойчив и может быть описан линеаризованной моделью в форме линейного разностного уравнения

$$y_u(k) + a_1 y_u(k-1) + \dots + a_m y_u(k-m) = b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m), \quad (23.1-1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u(k) &= U(k) - U_{00} \\ y(k) &= Y(k) - Y_{00} \end{aligned} \right\} \quad (23.1-2)$$

Переменные $u(k)$ и $y(k)$ являются вариациями, т. е. отклонениями «абсолютных» сигналов $U(k)$ и $Y(k)$ от их установившихся значе-

ний U_{00} и Y_{00} . Величина d определяет запаздывание, равное целому числу тактов квантования. Уравнению (23.1-1) соответствует дискретная передаточная функция

$$G_P(z) = \frac{Y_u(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d} \quad (23.1-3)$$

Измеряемый выход $y(k)$ содержит аддитивную случайную помеху $n(k)$:

$$y(k) = y_u(k) + n(k). \quad (23.1-4)$$

Модель объекта, учитывающая шум измерений, изображена на рис. 23.1.1. Сигнал помехи $n(k)$ рассматривается как авторегрес-

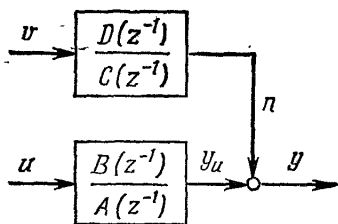


Рис. 23.1.1. Модель объекта с шумом измерений.

сионный процесс со скользящим средним (см. разд. 12.2.3):

$$n(k) + c_1 n(k-1) + \dots + c_p n(k-p) = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_p v(k-p). \quad (23.1-5)$$

Здесь $v(k)$ — последовательность нормально распределенных статистически независимых случайных величин (дискретный белый шум) с математическим ожиданием

$$E\{v(k)\} = 0$$

и ковариационной функцией

$$\text{cov}[v(k), \tau] = E\{v(k)v(k+\tau)\} = \sigma_v^2 \delta(\tau),$$

где σ_v^2 — дисперсия, $\delta(\tau)$ — функция Кронекера.

Запишем дискретную передаточную функцию фильтра шума:

$$G_v(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_p z^{-p}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_p z^{-p}}. \quad (23.1-6)$$

Объединив соотношения (23.1-3) и (23.1-6), сформируем модель объекта, в которой участвует внешняя помеха:

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} v(z). \quad (23.1-7)$$

Задача параметрической идентификации состоит в получении оценок параметров модели (23.1-7), т. е. коэффициентов полиномов

$A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$, а также $C(z^{-1})$ и $D(z^{-1})$ по результатам измерений входа $u(k)$ и выхода $y(k)$. Предполагается, что порядки моделей объекта m и помехи r известны. Если такая априорная информация отсутствует, можно воспользоваться методами определения порядка, описанными в [3.13]. Считается, что помеха является стационарной и корни полинома $C(z^{-1})$ лежат внутри единичной окружности на плоскости z .

Рассматриваемые ниже методы идентификации основываются на различных предположениях относительно типа модели шума, при которых гарантируется сходимость оценок параметров. Поэтому в дальнейшем наряду с общей моделью (23.1-7) будут использоваться две модели частного вида: *МП-модель* [23.14]

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(z) \quad (23.1-8)$$

и *НК-модель*

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{1}{A(z^{-1})} v(z). \quad (23.1-9)$$

23.2. РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (РМНК)

23.2.1. Идентификация модели динамического объекта

Подставим в уравнение (23.1-1) значения измеренных сигналов входа $u(k)$ и выхода $y(k)$, соответствующих такту k , а также оценки параметров, полученные после $(k-1)$ -го такта:

$$\begin{aligned} y(k) + \hat{a}_1(k-1) y(k-1) + \dots + \hat{a}_m(k-m) y(k-m) - \\ - \hat{b}_1(k-1) u(k-d-1) - \dots \\ \dots - \hat{b}_m(k-1) u(k-d-m) = e(k). \end{aligned} \quad (23.2-1)$$

Здесь нуль, стоящий в правой части (23.1-1) после переноса всех слагаемых в левую часть, заменен величиной $e(k)$, которую называют ошибкой уравнения или невязкой. Введение этой ошибки отражает наличие погрешностей измерения выхода и неточность оценок параметров. В уравнении (23.2-1) выделим член, который можно трактовать как предсказанное в момент $(k-1)$ значение $\hat{y}(k|k-1)$ выходного измерения $y(k)$:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1) = -\hat{a}_1(k-1) y(k-1) - \dots - \hat{a}_m(k-1) y(k-m) + \\ + \hat{b}_1(k-1) u(k-d-1) + \dots \\ \dots + \hat{b}_m(k-1) u(k-d-m) = \psi^T(k) \hat{\theta}(k-1), \end{aligned} \quad (23.2-2)$$

где

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-m) u(k-d-1) \dots u(k-d-m)] \quad (23.2-3)$$

вектор данных,

$$\hat{\theta}^T(k-1) = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_m \hat{b}_1 \dots \hat{b}_m] \quad (23.2-4)$$

— вектор оценок параметров.

Используя введенные переменные, запишем выражение для ошибки уравнения:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k | k-1). \quad (23.2-5)$$

Ошибка уравнения = Новое измерение — Предсказанное значение измерения

Предположим теперь, что измерения выполнены на интервале $k = 1, 2, \dots, m+d+N$. Тогда совокупность из $(N+1)$ уравнений вида

$$y(k) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k-1) + e(k)$$

можно представить в векторно-матричной форме

$$y(m+d+N) = \Psi(m+d+N) \hat{\theta}(m+d+N-1) - e(m+d+N), \quad (23.2-6)$$

где

$$y^T(m+d+N) = [y(m+d) \ y(m+d+1) \dots \ y(m+d+N)]; \quad (23.2-7)$$

$\Psi(m+d+N) =$

$$= \begin{bmatrix} -y(m+d-1) & -y(m+d-2) & \dots & -y(d) & \vdots \\ -y(m+d) & -y(m+d-1) & \dots & -y(d+1) & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -y(m+d+N-1) & -y(m+d+N-2) & \dots & -y(N+d) & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u(m-1) & u(m-2) & \dots & u(0) & \vdots \\ u(m) & u(m-1) & \dots & u(1) & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u(m+N-1) & u(m+N-2) & \dots & u(N) & \vdots \end{bmatrix}; \quad (23.2-8)$$

$$e^T(m+d+N) = [e(m+d) \ e(m+d+1) \ \dots \ e(m+d+N)]. \quad (23.2-9)$$

Минимум функции потерь

$$V = e^T(m+d+N) e(m+d+N) = \sum_{k=m+d}^{m+d+N} e^2(k) \quad (23.2-10)$$

находится из условия

$$\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0. \quad (23.2-11)$$

Полагая, что $N \geq 2m$, обозначим

$$P(m+d+N) = [\Psi^T(m+d+N) \Psi(m+d+N)]^{-1}. \quad (23.2-12)$$

С учетом (23.2-12) оценка, минимизирующая функцию (23.2-10), имеет вид ([3.12], [3.13])

$$\hat{\theta} (m + d + N - 1) = P (m + d + N) \Psi^T (m + d + N) y (m + d + N). \quad (23.2-13)$$

Данное выражение описывает *нерекуррентный алгоритм идентификации*, поскольку вычисление оценок параметров производится лишь после того, как сформирован массив, содержащий все измерения входных и выходных сигналов. Для получения *рекуррентного* варианта алгоритма достаточно, записав выражения для оценок $\hat{\theta} (k + 1)$ и $\hat{\theta} (k)$, вычесть второе из первого:

$$\hat{\theta} (k + 1) = \hat{\theta} (k) + \gamma (k) [y (k + 1) - \Psi^T (k + 1) \hat{\theta} (k)].$$

Новая оценка = Старая оценка + Вектор коррекции Новое измерение - Предсказанное значение нового измерения

(23.2-14)

Вектор коррекции определяется соотношением

$$\gamma (k) = P (k + 1) \psi (k + 1) = \frac{1}{\psi^T (k + 1) P (k) \psi (k + 1) + 1} P (k) \psi (k + 1), \quad (23.2-15)$$

где

$$P (k + 1) = [I - \gamma (k) \Psi^T (k + 1)] P (k). \quad (23.2-16)$$

Исходными значениями для рекуррентного алгоритма служат

$$\hat{\theta} (0) = 0 \text{ и } P (0) = \alpha I, \quad (23.2-17)$$

причем число α должно быть достаточно велико [3.13]. Отметим, что математическое ожидание матрицы P с точностью до скалярного множителя равно, ковариационной матрице вектора оценок параметров

$$E \{P (k + 1)\} = \frac{1}{\sigma_e^2} \text{cov} [\Delta \theta (k)], \quad (23.2-18)$$

где

$$\sigma_e^2 = E \{e^T e\}, \quad (23.2-19)$$

а ошибка оценивания определяется как $\Delta \theta (k) = \theta (k) - \theta_0$. Таким образом, рекуррентный алгоритм идентификации позволяет контролировать дисперсии отдельных оценок, которые определяются соответствующими диагональными элементами ковариационной матрицы. Уравнение (23.2-14) можно записать в форме

$$\hat{\theta} (k + 1) = \hat{\theta} (k) + \gamma (k) e (k + 1). \quad (23.2-20)$$

Условия сходимости оценок.

В общем случае любой метод параметрической идентификации должен задавать оценки параметров, которые являются несмещенными, т. е.

$$E \{\hat{\theta} (N)\} = \theta_0 \text{ при конечном } N, \quad (23.2-21)$$

и состоятельные в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\theta} (N) \} = \theta_0, \quad (23.2-22)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ [\hat{\theta} (N) - \theta_0] [\hat{\theta} (N) - \theta_0]^T \} = 0. \quad (23.2-23)$$

Можно показать ([3.13], [3.12]), что метод наименьших квадратов, примененный к устойчивому разностному уравнению, линейному по параметрам, отвечает указанным требованиям, если выполняются следующие условия:

- Порядок объекта m и величина запаздывания d известны.
- Измерения входного сигнала $u(k) = U(k) - U_{00}$ производятся без ошибок, и известно установившееся значение входа U_{00} .
- Входной сигнал представляет собой возбуждающий процесс порядка не ниже m ([23.15], [23.16]). При этом матрица

$$\mathbf{H} = \{ h_{ij} = \varphi_{uu}^N(i-j) \}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

положительно определена ($\det \mathbf{H} > 0$) и, кроме того, существуют пределы $U_{00} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} U(k)$ и $\varphi_{uu}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)u(k+\tau)$.

- На выходной сигнал $y(k) = Y(k) - Y_{00}$ может действовать возмущение в виде стационарного шума $p(k)$. Установившееся значение Y_{00} известно и равно величине U_{00} , умноженной на статический коэффициент усиления объекта.
- Ошибка уравнения $e(k)$ не коррелирована с элементами вектора данных $\psi^T(k)$. Это означает, что значения $e(k)$ статистически независимы.
- $E \{ e(k) \} = 0$.

Сходимость оценок, получаемых с помощью рекуррентного алгоритма, зависит и от выбора исходных значений $\mathbf{P}(0)$ и $\hat{\theta}(0)$ [3.13].

Условие, согласно которому корреляция между элементами последовательности ошибок $e(k)$ должна отсутствовать, существенно ограничивает возможность применения метода наименьших квадратов для идентификации сильно зашумленных объектов. Для получения несмещенных оценок параметров необходимо, чтобы формирующий фильтр шума имел вид

$$G_v(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{1}{A(z^{-1})}, \quad (23.2-24)$$

что на практике выполняется весьма редко. Отсюда можно сделать вывод, что для идентификации объектов с шумами высокой интенсивности целесообразно использовать другие методы. Тем не менее, как будет показано ниже, при построении адаптивных систем управления метод наименьших квадратов в конечном итоге оказывается одним из наиболее эффективных.

Методы оценивания установившихся значений

Поскольку при идентификации параметров объекта вместо сигналов $U(k)$ и $Y(k)$ приходится использовать соответствующие вариации $u(k)$ и $y(k)$, необходимо либо иметь оценки установившихся значений U_{00} и Y_{00} , либо таким образом перестроить алгоритм идентификации, чтобы данные величины в нем не участвовали. Для этого можно предложить следующие методы:

МЕТОД 1: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗНОСТЕЙ

Наиболее простой способ получения вариаций в отсутствие информации об установившихся значениях переменных состоит в переходе к разностям

$$\left. \begin{aligned} U(k) - U(k-1) &= u(k) - u(k-1) = \Delta u(k) \\ Y(k) - Y(k-1) &= y(k) - y(k-1) = \Delta y(k) \end{aligned} \right\} \quad (23.2-25)$$

При этом вместо $u(z)$ и $y(z)$ в алгоритме идентификации используются величины $\Delta u(z) = u(z)(1-z^{-1})$ и $\Delta y(z) = y(z)(1-z^{-1})$. Данное преобразование можно интерпретировать как прохождение входного и выходного сигналов через один и тот же высокочастотный фильтр. Учитывая, что фильтрации подвергаются оба сигнала, процесс получения оценок параметров не претерпевает никаких изменений по сравнению с тем случаем, когда измеряются вариации $u(k)$ и $y(k)$; лишь в процедуре идентификации эти переменные заменяются разностями $\Delta u(k)$ и $\Delta y(k)$.

Если требуются сами установившиеся значения, следует применять другие методы.

МЕТОД 2: УСРЕДНЕНИЕ

Оценку установившегося значения нетрудно получить, воспользовавшись формулой усреднения:

$$\hat{Y}_{00} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M Y(k). \quad (23.2-26)$$

Рекуррентный вариант этой формулы имеет вид

$$\hat{Y}_{00}(k) = \hat{Y}_{00}(k-1) + \frac{1}{k} [Y(k) - \hat{Y}_{00}(k-1)]. \quad (23.2-27)$$

В тех случаях, когда установившиеся значения медленно меняются, целесообразно использовать рекуррентную процедуру взвешенного усреднения

$$\hat{Y}_{00}(k) = \hat{Y}_{00}(k-1) + (1-\lambda) Y(k), \quad (23.2-28)$$

где $\lambda < 1$. Аналогичным образом можно получить и оценку U_{00} . Вариации $u(k)$ и $y(k)$ вычисляются затем по формулам (23.1-2).

МЕТОД 3; ОЦЕНИВАНИЕ КОНСТАНТЫ

Установившиеся значения U_{00} и Y_{00} можно оценивать совместно с параметрами объекта. Для этого подставим выражения (23.1-2) в уравнение (23.1-1). В результате имеем

$$Y(k) = -a_1 Y(k-1) - \dots - a_m Y(k-m) + b_1 U(k-d-1) + \dots \\ \dots + b_m U(k-d-m) + C, \quad (23.2-29)$$

причем

$$C = (1 + a_1 + \dots + a_m) Y_{00} - (b_1 + \dots + b_m) U_{00}. \quad (23.2-30)$$

Расширим вектор оценок параметров $\hat{\theta}$, введя в него константу C , а вектор данных $\psi^T(k)$ дополним еще одной составляющей, равной 1. После этих преобразований в процедуре идентификации можно непосредственно использовать измерения $Y(k)$ и $U(k)$, получая наряду с оценками параметров и оценку C . Если одно из установившихся значений известно, второе можно определить из выражения (23.2-30). В том случае, когда идентификации подвергается объект, стоящий в замкнутом контуре, полагают

$$Y_{00} = W(k) \quad (23.2-31)$$

и вычисляют U_{00} .

Пример 23.1. Рассмотрим последовательность операций, выполняемых в процессе идентификации параметров объекта первого порядка с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов.

Модель объекта описывается разностным уравнением

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_1 u(k-1) + v(k).$$

Для построения алгоритма идентификации это уравнение записывается в виде

$$y(k) = \psi^T(k) \hat{\theta}(k) + e(k),$$

где

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \ u(k-1)],$$

$$\hat{\theta}(k) = [\hat{a}_1(k) \ \hat{b}_1(k)]^T.$$

Алгоритм вычисления оценок параметров (в форме, наиболее удобной для использования в адаптивных системах) включает следующие шаги:

1. Определяются новые значения $y(k)$ и $u(k)$, соответствующие моменту времени k

$$2. e(k) = y(k) - [-y(k-1) \ u(k-1)] \begin{bmatrix} \hat{a}_1(k-1) \\ \hat{b}_1(k-1) \end{bmatrix}.$$

3. Вычисляются новые оценки параметров

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1(k) \\ \hat{b}_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1(k-1) \\ \hat{b}_1(k-1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1(k-1) \\ \gamma_2(k-1) \end{bmatrix}}_{\text{из п. 7}} e(k).$$

4. Формируется новый вектор данных

$$\psi^T(k+1) = [-y(k) \ u(k)].$$

$$5. P(k) \underbrace{\psi(k+1)}_{\text{из п. 8}} = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -p_{11}(k) y(k) + p_{12}(k) u(k) \\ -p_{21}(k) y(k) + p_{22}(k) u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = i.$$

$$6 \quad \psi^T(k+1) \underbrace{P(k) \psi(k+1)}_{\text{из п 5}} = [-y(k) u(k)]_{i_2}^{i_1} = -i_1 y(k) + i_2 u(k) = j.$$

$$7 \quad \begin{bmatrix} \gamma_1(k+1) \\ \gamma_2(k+2) \end{bmatrix} = \frac{1}{j+\lambda} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 8 \quad P(k+1) &= \frac{1}{\lambda} [P(k) - \gamma(k) \psi^T(k+1) P(k)] = \\ &= \frac{1}{\lambda} [P(k) - \gamma(k) \underbrace{[P(k) \psi(k+1)]^T}_{\text{из п 3}}] = \\ &= \frac{1}{\lambda} [P(k) - \gamma(k) I^T] = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} p_{11}(k) - \gamma_1 i_1 & p_{12}(k) - \gamma_1 i_2 \\ p_{21}(k) - \gamma_2 i_1 & p_{22}(k) - \gamma_2 i_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

9. k увеличивается на 1, и вновь выполняется вся последовательность действий, начиная с п 1

Для того чтобы можно было начать вычисления в момент $k=0$, необходимо задать исходные значения

$$\hat{\theta}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P(0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

где α — произвольное, достаточно большое число

23.2.2. Случайные сигналы

Рекуррентный метод наименьших квадратов может быть использован и для оценивания параметров моделей случайных сигналов. Будем полагать, что случайный сигнал представлен стационарным авторегрессионным процессом со скользящим средним:

$$y(k) + c_1 y(k-1) + \dots + c_p y(k-p) = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_p v(k-p). \quad (23.2-32)$$

В этом уравнении, аналогичном по форме (23.2-5), неизмеримая помеха заменена измеримым сигналом $y(k)$. Преобразуем (23.2-32) в соответствии с формулами (23.2-1) — (23.2-5):

$$y(k) = \psi^T(k) \hat{\theta}(k-1) + v(k), \quad (23.2-33)$$

где

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-p) \quad v(k-1) \dots v(k-p)], \quad (23.2-34)$$

$$\theta^T = [c_1 \dots c_p \quad d_1 \dots d_p]. \quad (23.2-35)$$

Применение рекуррентного метода наименьших квадратов, описываемого соотношениями (23.2-14) — (23.2-17), к уравнению (23.2-32) было бы возможно при известных значениях $v(k-1), \dots, v(k-p)$. В этом случае величину $v(k)$ в (23.2-33) можно было бы рассматривать как ошибку уравнения, которая, согласно определению, должна быть случайной, статистически независимой переменной.

К тому моменту, когда производится очередной замер $y(k)$, величины $y(k-1), \dots, y(k-p)$ уже известны. Считая, что к этому

моменту получены также оценки $\hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-p)$ и $\hat{\theta}(k-1)$, оценку текущего входного сигнала $\hat{v}(k)$ можно определить из уравнения (23.2-33) ([23.1], [23.2]):

$$\hat{v}(k) = y(k) - \hat{\psi}^T(k) \hat{\theta}(k-1), \quad (23.2-36)$$

где

$$\hat{\psi}^T(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-p) \hat{v}(k-1) \dots \hat{v}(k-p)]. \quad (23.2-37)$$

После этого вычисляется новая оценка

$$\hat{\psi}^T(k+1) = [-y(k) \dots -y(k-p+1) \hat{v}(k) \dots \hat{v}(k-p+1)]. \quad (23.2-38)$$

Таким образом, с помощью рекуррентного алгоритма (23.2-14) — (23.2-17) можно получить и оценку вектора параметров формирующего фильтра $\hat{\theta}(k+1)$, если использовать в алгоритме вместо точного вектора данных $\psi(k+1)$ его оценку $\hat{\psi}(k+1)$. Затем определяются оценки $\hat{v}(k+1)$ и $\hat{\theta}(k+2)$ и т. д. В качестве исходных значений берутся

$$\hat{v}(0) = \hat{y}(0), \quad \hat{\theta}(0) = 0, \quad P(0) = \alpha I.$$

Если $v(k)$ — дискретный белый шум, корреляция между $v(k)$ и $\psi^T(k)$ отсутствует. При этом условия оценки параметров оказываются несмещенными и состоятельными в среднем квадратичном. Модель (23.2-32) должна быть устойчива, ввиду чего корни знаменателя $S(z)$ и числителя $D(z)$ ее передаточной функции должны располагаться внутри единичной окружности. Как показано в [3.13], оценку дисперсии $v(k)$ можно найти по формуле

$$\hat{\sigma}_v^2(k) = \frac{1}{k+1-2p} \sum_{i=0}^k \hat{v}^2(i), \quad (23.2-39)$$

или с помощью ее рекуррентного аналога

$$\hat{\sigma}_v^2(k+1) = \hat{\sigma}_v^2(k) + \frac{1}{k+2-2p} [\hat{v}^2(k+1) - \hat{\sigma}_v^2(k)] \quad (23.2-40)$$

23.3. ОБОБЩЕННЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (ОРМК)

В тех случаях, когда вместо НК-модели (см. разд. 23.1)

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = \varepsilon(z) \quad (23.3-1)$$

с некоррелированной ошибкой $\varepsilon(z)$ объект описывается МП-моделью

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = D(z^{-1})\varepsilon(z), \quad (23.3-2)$$

в которую входит коррелированный сигнал $\varepsilon(z) = D(z^{-1})e(z)$, следует применять обобщенный метод наименьших квадратов [23.2], [23.3], объединяющий рекуррентные методы параметрической идентификации динамических объектов и случайных сигналов. Для данного метода исходным является уравнение

$$y(k) = \hat{\psi}^T(k) \hat{\theta}(k-1) + e(k), \quad (23.3.3)$$

в котором используются расширенные векторы

$$\hat{\psi}^T(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-m) \quad u(k-d-1) \dots u(k-d-m) \quad \hat{v}(k-1) \dots \hat{v}(k-p)], \quad (23.3-4)$$

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_m \quad \hat{b}_1 \dots \hat{b}_m \quad \hat{d}_1 \dots \hat{d}_m]. \quad (23.3-5)$$

Оценки параметров вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k) [y(k+1) - \hat{\psi}^T(k+1) \hat{\theta}(k)], \quad (23.3-6)$$

а также вспомогательных уравнений, аналогичных (23.2-14) — (23.2-16). Для оценки значений случайного сигнала $\bar{v}(k) = e(k)$, которые являются компонентами вектора $\psi(k+1)$, применяется соотношение (23.2-36).

Отметим, что корни уравнения $D(z) = 0$ должны лежать внутри единичной окружности на плоскости z . Если при этом все условия сходимости метода наименьших квадратов, перечисленные в разд. 23.2, остаются справедливыми и для модели (23.3-3), обобщенный метод дает несмещенные оценки параметров, состоятельные в среднем квадратичном.

23.4. РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ (РМВП)

Оценки, получаемые по методу наименьших квадратов, сходятся к истинным значениям параметров лишь в том случае, когда отсутствует корреляция между ошибкой $e(k)$ и элементами вектора $\psi(k)$. В методе вспомогательных переменных данное условие выполняется благодаря введению специальным образом сформированного вектора $w(k)$, компоненты которого не коррелированы с $e(k)$. В то же время эти вспомогательные переменные должны быть максимально коррелированы с соответствующими элементами невозмущенного вектора $\psi(k)$. Вектор вспомогательных переменных имеет вид

$$w^T(k) = [-h(k-1) \dots -h(k-m) \quad u(k-d-1) \dots u(k-d-m)], \quad (23.4-1)$$

причем в качестве

$$h(k) = \hat{y}_u(k) = w^T(k) \hat{\theta}_{aux}(k) \quad (23.4-2)$$

используются выходные сигналы дополнительной модели с параметрами $\hat{\theta}_{aux}(k)$.

Алгоритм идентификации по методу вспомогательных переменных структурно аналогичен рекуррентному алгоритму на основе метода наименьших квадратов (см. [23.5], [23.6], а также табл. 23.7.1). Для того чтобы уменьшить степень корреляции между вспомогательными переменными и ошибкой $e(k)$, в работе [23.6] параметры дополнительной модели предлагается определять как выход низкочастотного дискретного фильтра первого порядка с запаздыванием, на вход которого подается оценка параметров объекта

$$\hat{\theta}_{aux}(k) = (1 - \beta)\hat{\theta}_{aux}(k-1) + \beta\hat{\theta}(k - \delta), \quad 0,01 \leq \beta \leq 0,1. \quad (23.4-3)$$

На начальном этапе вычислений данный вариант метода вспомогательных переменных весьма чувствителен к выбору исходных значений $\hat{\theta}(0)$ и $P(0)$, а также коэффициента β . Учитывая это, для повышения устойчивости рекомендуется вначале применять метод наименьших квадратов [23.11].

Перечислим условия, при которых метод вспомогательных переменных обеспечивает получение несмещенных и состоятельных оценок параметров:

- $E\{n(k)\} = 0$ и $E\{u(k)\} = \text{const}$

или

- $E\{n(k)\} = \text{const}$ и $E\{u(k)\} = 0$.

- $E\{u(k - \tau)n(k)\} = 0$ при $|\tau| \geq 0$.

- Должны быть известны вариации

$$u(k) = U(k) - U_{00}.$$

- Должно быть известно установившееся значение Y_{00} , если $E\{u(k)\} \neq 0$.

Важным достоинством метода вспомогательных переменных является то, что он не накладывает никаких ограничений на структуру формирующего фильтра шума. Благодаря этому полиномы его передаточной функции $C(z^{-1})$ и $D(z^{-1})$ не обязательно должны быть связаны с полиномами передаточной функции объекта $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$. Метод вспомогательных переменных позволяет вычислять только оценки параметров объекта идентификации a_1 и b_1 . Если же требуются и оценки параметров модели шума c_1 и d_1 , то их можно определять с помощью метода наименьших квадратов (см. разд. 23.2.2), используя в качестве оценки сигнала помехи величину

$$\hat{n}(k) = y(k) - \hat{y}_u(k) = y(k) - h(k). \quad (23.4-4)$$

23.5. РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ (РММП)

Для идентификации параметров по методу максимального правдоподобия наиболее удобно описывать объект МП-моделью (23.1-8):

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1})z^{-d}u(z) + D(z^{-1})v(z). \quad (23.5-1)$$

Если воспользоваться обозначениями

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-m) \\ u(k-d-1) \dots u(k-d-m) v(k-1) \dots v(k-m)], \quad (23.5-2)$$

$$\theta^T = [a_1 \dots a_m \ b_1 \dots b_m \ d_1 \dots d_m], \quad (23.5-3)$$

модель (23.5-1) можно представить в виде

$$y(k) = \psi^T(k) \theta + v(k). \quad (23.5-4)$$

Здесь, как и при выводе обобщенного метода наименьших квадратов, будем полагать, что переменная $v(k)$ играет роль ошибки уравнения $e(k)$, а значения сигнала помехи $v(k-1), \dots, v(k-m)$ заменим их оценками, которые вычисляются из уравнения (23.2-32). В результате получаем модель

$$y(k) = \hat{\psi}^T(k) \hat{\theta}(k-1) + e(k), \quad (23.5-5)$$

где $\hat{\psi}^T(k)$ определяется согласно формуле (23.3-4). В работах [3.12], [3.13] показано, что в случае нормально распределенного сигнала ошибки метод максимального правдоподобия дает то же выражение для функции потерь, что и метод наименьших квадратов:

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (23.5-6)$$

Для получения искомых оценок данная функция минимизируется по отношению к параметрам a_1 , b_1 и d_1 . Поскольку в функцию потерь указанные параметры входят нелинейно, ее минимизацию осуществляют с помощью численных итерационных алгоритмов, например градиентных. Ввиду этого метод максимального правдоподобия в своем исходном виде может быть реализован только в нерекуррентной форме. Однако путем внесения некоторых изменений в градиентный алгоритм можно получить и рекуррентный вариант ММП [23.7], [23.8].

Вначале рассмотрим основные соотношения, описывающие нерекуррентный метод максимального правдоподобия. Разложим функцию потерь в ряд Тейлора:

$$V(\theta + \Delta\theta) = V(\theta) + \mathbf{V}_\theta^T(\theta) \Delta\theta + \frac{1}{2} \Delta\theta^T \mathbf{V}_{\theta\theta}(\theta) \Delta\theta + \dots, \quad (23.5-7)$$

где $\mathbf{V}_\theta(\theta)$ обозначает вектор первых производных по параметрам, а $\mathbf{V}_{\theta\theta}(\theta)$ — матрицу вторых производных. Выполним минимизацию этой функции, ограничившись первыми тремя членами разложения (23.5-7). В результате приходим к известному алгоритму Ньютона — Рафсона:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \mathbf{V}_{\theta\theta}^{-1}(\hat{\theta}(k), k+1) \mathbf{V}_\theta(\hat{\theta}(k), k+1). \quad (23.5-8)$$

Для построения рекуррентной процедуры идентификации запишем в рекуррентной форме функцию потерь:

$$V(\hat{\theta}, k+1) = V(\hat{\theta}, k) + \frac{1}{2} e^2(\hat{\theta}, k+1). \quad (23.5-9)$$

Отсюда можно получить следующие выражения:

$$V_{\theta}(\hat{\theta}, k+1) = \underbrace{V_{\theta}(\hat{\theta}, k)}_{\approx 0} + e(\hat{\theta}, k+1) \frac{\partial e(\hat{\theta}, k+1)}{\partial \theta}, \quad (23.5-10)$$

$$V_{\theta\theta}(\hat{\theta}, k+1) = V_{\theta\theta}(\hat{\theta}, k) + \left[\frac{\partial e(\hat{\theta}, k+1)}{\partial \theta} \right]^T \frac{\partial e(\hat{\theta}, k+1)}{\partial \theta} + e(\hat{\theta}, k+1) \underbrace{\frac{\partial^2 e(\hat{\theta}, k+1)}{\partial \theta^2}}_{\approx 0}. \quad (23.5-11)$$

В этих формулах отмечены составляющие, которые можно считать равными нулю [23.8]. Объединяя соотношения (23.5-8)—(23.5-11), получаем рекуррентный алгоритм идентификации по методу максимального правдоподобия (РММП):

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k) e(k+1), \quad (23.5-12)$$

где

$$\gamma(k) = P(k+1) \varphi(k+1) = \frac{P(k) \varphi(k+1)}{1 + \varphi^T(k+1) P(k) \varphi(k+1)}, \quad (23.5-13)$$

$$P(k) = V_{\theta\theta}^{-1}(\hat{\theta}(k-1), k), \quad (23.5-14)$$

$$P(k+1) = (I - \gamma(k) \varphi^T(k+1)) P(k), \quad (23.5-15)$$

$$\varphi(k+1) = \left[-\frac{\partial e(\hat{\theta}(k), k+1)}{\partial \theta} \right], \quad (23.5-16)$$

$$e(k+1) = y(k+1) - \psi^T(k+1) \hat{\theta}(k), \quad (23.5-17)$$

$$\hat{v}(k+1) = e(k+1). \quad (23.5-18)$$

В данном случае вектор $\psi^T(k+1)$ в уравнении (23.5-5) имеет вид $\hat{\psi}^T(k+1) = [-y(k) \dots -y(k-m+1) \ u(k-d) \dots u(k-d-m+1) \ e(k) \dots e(k-m+1)]$. (23.5-19)

Уравнение (23.5-15) является результатом применения леммы об обращении матрицы ([23.8], [3.13]) к выражению (23.5-11). Элементы вектора

$$\varphi^T(k+1) = - \left[\frac{\partial e(k+1)}{\partial a_1} \dots \frac{\partial e(k+1)}{\partial a_m} \frac{\partial e(k+1)}{\partial b_1} \dots \frac{\partial e(k+1)}{\partial b_m} \frac{\partial e(k+1)}{\partial d_1} \dots \frac{\partial e(k+1)}{\partial d_m} \right] \quad (23.5-20)$$

можно определить из уравнения (23.5-1), положив $e(k) = \hat{v}(k)$:

$$z \frac{\partial e(z)}{\partial a_i} = \frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} y(z) z^{-(i-1)} = y'(z) z^{-(i-1)},$$

$$z \frac{\partial e(z)}{\partial b_i} = -\frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} u(z) z^{-(i-1)} z^{-d} = -u'(z) z^{-(i-1)} z^{-d}, \quad (23.5-21)$$

$$z \frac{\partial e(z)}{\partial d_i} = -\frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} e(z) z^{-(i-1)} = -e'(z) z^{-(i-1)},$$

$$i = 1, \dots, m.$$

Вводя новые обозначения для этих элементов,

$$\Phi^T(k+1) = [-y'(k) \dots -y'(k-m+1) \quad u'(k-d) \dots \\ \dots u'(k-d-m+1) \quad e'(k) \dots e'(k-m+1)], \quad (23.5-22)$$

будем рассматривать их как выходные сигналы одинаковых фильтров, описываемых разностными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} y'(k) &= y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_m y'(k-m), \\ u'(k-d) &= u(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \\ &\quad - \hat{d}_m u'(k-d-m), \\ e'(k) &= e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_m e'(k-m), \end{aligned} \right\} \quad (23.5-23)$$

причем в качестве коэффициентов \hat{d}_i берутся текущие оценки $\hat{d}_i(k)$.

Необходимо отметить, что рекуррентный алгоритм на основе метода максимального правдоподобия является лишь приближением исходного нерекуррентного метода, поскольку при его выводе были допущены некоторые упрощения. Начальные значения для алгоритма задаются следующими:

$$\hat{\theta}(0) = 0, \quad \mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}, \quad \Phi(0) = 0. \quad (23.5-24)$$

Рекуррентный вариант ММП отличается от обобщенного рекуррентного метода наименьших квадратов ОРМНК тем (см. табл. 23.7.1), что вместо $\Psi(k+1)$ в нем при вычислении вектора коррекции $\gamma(k)$ используется $\Phi(k+1)$. Перечислим условия, необходимые для получения несмещенных и состоятельных оценок с помощью описанного метода:

1. Должны быть известны точные значения вариаций $u(k) = U(k) - U_{00}$.

2. Должно быть известно точное установившееся значение Y_{00} , соответствующее U_{00} .

3. Для того чтобы ошибки $e(k)$ не были коррелированы, формирующий фильтр шума должен иметь передаточную функцию вида $\hat{D}(z^{-1})/A(z^{-1})$.

4. Необходимо, чтобы уравнения (23.5-23) были устойчивы. Данное условие выполняется, если корни полинома $\hat{D}(z)$ лежат внутри единичной окружности на плоскости z .

23.6. МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (МСА)

Методы стохастической аппроксимации рекуррентны по своей природе и отличаются малой трудоемкостью. В них поиск минимума функции потерь осуществляется с помощью градиентных алгоритмов, которые применяются к стохастическим уравнениям так, как если бы это были уравнения детерминированные. Предлагались различные способы стохастической аппроксимации ([3.12], [3.13]). Один из возможных вариантов описывается соотношением

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \rho(k+1) \underbrace{\psi(k+1) [y(k+1) - \psi^T(k+1) \hat{\theta}(k)]}_{e(k+1)}. \quad (23.6-1)$$

Данный алгоритм минимизирует функцию потерь $V = (1/2)e^2(k)$. По форме он совпадает с алгоритмом РМНК (23.2-14), отличаясь от последнего лишь наличием переменного коэффициента $\rho(k+1)$. Сам метод не дает возможности определить этот коэффициент, и он выбирается произвольно, но таким образом, чтобы гарантировалась сходимости оценок параметров. Наиболее часто, выбрав соответствующую константу α , полагают

$$\rho(k+1) = \alpha / (1+k). \quad (23.6-2)$$

К сожалению, этот простой алгоритм обеспечивает несмещенность оценок только в случае статистически независимых сигналов ошибки $e(k)$. Кроме того, при сравнительно небольших объемах измерений оценки параметров характеризуются значительным разбросом [3.13].

23.7. ОБЩАЯ СХЕМА РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Все рассмотренные выше рекуррентные алгоритмы параметрической идентификации — РМНК, ОРМНК, РМВП, РММП и МСА — могут быть приведены к единой форме описания, включающего следующие уравнения:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k) e(k+1), \quad (23.7-1)$$

$$\gamma(k) = \mu(k+1) \mathbf{P}(k) \boldsymbol{\varphi}(k+1), \quad (23.7-2)$$

$$e(k+1) = y(k+1) - \boldsymbol{\psi}^T(k+1) \hat{\theta}(k). \quad (23.7-3)$$

Для различных алгоритмов уравнения (23.7-1) — (23.7-3) отличаются только векторами параметров $\hat{\theta}$, векторами данных $\boldsymbol{\psi}(k+1)$ и векторами коррекции $\gamma(k)$. Основные формулы, используемые в алгоритмах, сведены в табл. 23.7.1.

До сих пор считалось, что параметры идентифицируемого объекта на интервале измерений $k=0, \dots, N$ остаются постоянными, ввиду чего как отдельные измерения $u(k)$, $y(k)$, так и ошибки уравнения $e(k)$ входили во все соотношения с одинаковыми весами,

Таблица 23.7.1

Единая схема описания рекуррентных алгоритмов параметрической идентификации ($b_0 = d = 0$).
 $\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1)$; $\gamma(k) = \mu(k+1)P(k)\Phi(k+1) - \Psi^T(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$.

Алгоритм	$\hat{\theta}$	$\Psi^T(k+1)$	$\mu(k+1)$	$P(k+1)$	$\Phi(k+1)$	Тип фильтра шума, при котором оценка не смещена и состоятельна
РМНК	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -y(k) \dots - \\ -y(k-m+1) \\ u(k) \dots \\ \dots u(k-m+1) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)}$	$[I - \gamma(k)\Psi^T(k+1)] \times$ $\times P(k)$	$\Phi(k+1)$	$\frac{1}{A(z^{-1})}$
РМВП	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$	Как в РМНК	$\frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)}$	$[I - \gamma(k)\Psi^T(k+1)] \times$ $\times P(k)$	$\begin{bmatrix} -h(k) \dots - \\ -h(k-m+1) \\ u(k) \dots \\ \dots u(k-m+1) \end{bmatrix}$	$\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}$
МСА	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$	Как в РМНК	1	$\rho(k+1)I = \frac{\alpha}{k+1}I$	$\Psi(k+1)$	$\frac{1}{A(z^{-1})}$
ОРМНК	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -y(k) \dots - \\ -y(k-m+1) \\ u(k) \dots \\ \dots u(k-m+1) \\ e(k) \dots \\ \dots e(k-m+1) \end{bmatrix}$	Как в РМНК	Как в РМНК	$\Psi(k+1)$	$\frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}$
РММП	$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$	Как в ОРМНК	$\frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)}$	$[I - \gamma(k)\Psi^T(k+1)] \times$ $\times P(k)$	$\begin{bmatrix} -y'(k) \dots - \\ -y'(k-m+1) \\ u'(k) \dots \\ \dots u'(k-m+1) \\ e'(k) \dots \\ \dots e'(k-m+1) \end{bmatrix}$	$\frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}$

не зависящими от переменной k . Если же с помощью алгоритма идентификации требуется отслеживать медленно меняющиеся *параметры нестационарного объекта*, новым измерениям следует придавать большие веса, нежели тем, что были получены ранее. Следовательно, в алгоритмах идентификации должен быть предусмотрен своего рода механизм *постепенного забывания*. В методе наименьших квадратов он может быть реализован путем введения в функцию потерь множителя, зависящего от времени (метод наименьших взвешенных квадратов [3.13]):

$$V = \sum_{k=(m+d)}^{(m+d+N)} w(k) e^2(k). \quad (23.7-4)$$

В табл. 23.7.2 показано, как меняются весовые коэффициенты при ошибках $e(k)$, если указанный множитель задается в виде $w(k) = \lambda^{(m+d+N)-k} = \lambda^{N'-k}$, где $0 < \lambda < 1$, (23.7-5)

для $N' = 50$.

Если используется функция потерь (23.7-4) с множителем (23.7-5), отдельные формулы, приведенные в табл. 23.7.1, необходимо изме-

Таблица 23.7.2

Значения множителя (23.7-5) для различных k при $N' = 50$

k	1	10	20	30	40	47	48	49	50
$\lambda = 0,99$	0,61	0,67	0,73	0,82	0,90	0,97	0,98	0,99	1
$\lambda = 0,95$	0,08	0,13	0,21	0,35	0,60	0,85	0,90	0,95	1

нить: в знаменателе $\mu(k+1)$ единица заменяется константой λ . В частности, для РМВП

$$\mu(k+1) = \frac{1}{\lambda + \Phi^T(k+1) P(k) \Phi(k+1)}, \quad (23.7-6)$$

матрица $P(k+1)$ умножается на $1/\lambda$:

$$P(k+1) = [I - \gamma(k) \Phi^T(k+1)] P(k) \frac{1}{\lambda}. \quad (23.7-7)$$

Задаваясь показателем затухания λ , приходится выбирать между более высокой степенью подавления шума и лучшим отслеживанием меняющихся параметров объекта. Обычно λ выбирается в диапазоне $0,90 < \lambda < 0,995$.

Было отмечено, что на начальном этапе вычислений в методах РММП и ОРМНК из-за отсутствия точных значений $e(k) = \hat{v}(k)$ оценки сходятся весьма медленно. Однако скорость сходимости можно повысить, умножая сигнал ошибки на переменный коэффи-

циент $\lambda(k)$, который имеет относительно небольшое начальное значение и, постепенно возрастая, приближается к 1. Например, в работе [23.13] предлагалось использовать формулу

$$\lambda(k+1) = \lambda_0 \lambda(k) + (1 - \lambda_0), \quad (23.7-8)$$

где $\lambda_0 < 1$; $\lambda(0) < 1$. В частности, при $\lambda_0 = \lambda(0) = 0,95$, согласно этой формуле, имеем $\lambda(5) = 0,9632$; $\lambda(10) = 0,9715$; $\lambda(20) = 0,9829$, причем нетрудно видеть, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(k+1) = 1$.

Свойства весовых множителей (23.7-8) и (23.7-5) сочетаются в следующем алгоритме:

$$\lambda(k+1) = \lambda_0 \lambda(k) + \lambda(1 - \lambda_0). \quad (23.7-9)$$

Первоначально этот алгоритм дает небольшие значения весов, зависящие от выбора λ_0 и $\lambda(0)$, а при больших k они стремятся к коэффициенту затухания, определенному в (23.7-5):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(k+1) = \lambda.$$

Сравнительный анализ рекуррентных алгоритмов параметрической идентификации с точки зрения точности получаемых оценок, их сходимости и требуемого объема вычислений проводился различными способами: путем математического моделирования ([23.9], [3.13], [23.10], [23.13]), по результатам практических экспериментов ([23.11], [23.12]), с использованием теоретических методов ([23.13]). Следует отметить, что теоретический анализ рекуррентных алгоритмов идентификации весьма сложен вследствие их нелинейности и нестационарности. В работе [23.17] было показано, что асимптотические свойства оценок, получаемых с помощью таких алгоритмов, можно приближенно описать посредством разностного уравнения первого порядка с параметрами, зависящими от времени. После перехода к новой временной шкале оно преобразуется в обыкновенное стационарное дифференциальное уравнение.

Результаты многочисленных исследований различных рекуррентных алгоритмов идентификации можно обобщить в виде следующего краткого перечня их свойств:

РМНК: Применим при малых отношениях интенсивности шума к полезному сигналу; в противном случае дает сильно смещенные оценки параметров. Отличается надежной сходимостью оценок. Требует относительно небольшого объема вычислений.

ОРМНК: Если справедлива модель шума вида D/A , применим при более высоких отношениях шума к сигналу. На начальном этапе оценки сходятся медленно. Иногда наблюдается расходимость оценок (ср. с РММП). Вычисляются оценки параметров числителя формирующего фильтра D , которые сходятся более медленно, чем оценки параметров B и A . Требует несколько большего объема вычислений по сравнению с РМНК.

РМВП: Обеспечивает достаточно высокую точность оценок параметров. Для ускорения сходимости на начальном этапе рекомендуется использовать РМНК. Объем вычислений больше, чем в РМНК.

РММП: Если справедлива модель шума вида D/A , обеспечивает высокую точность оценок параметров. На начальном этапе оценки сходятся медленно. Расходимость наблюдается реже, чем в ОРМНК. Вычисляются параметры полинома D , но оценки сходятся весьма медленно. Требуется большего объема вычислений, нежели РМНК, ОРМНК и РМВП.

МСА: Приемлемая точность оценок достигается лишь при очень большом числе измерений. Сходимость определяется выбором параметра α . Объем вычислений невелик.

При небольшой продолжительности измерений и шуме высокой интенсивности все методы (исключая МСА) обеспечивают примерно одинаковое качество оценок параметров. Ввиду этого предпочтение обычно отдают РМНК, поскольку он проще других методов идентификации и гарантирует надежную сходимость оценок. Преимущества РМВП и РММП, позволяющих получать более точные оценки параметров, проявляются лишь при больших объемах измерений.

23.8. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В некоторых случаях идентификация параметров связана с решением *плохо обусловленных систем уравнений*. В этих условиях один из способов повышения точности оценок состоит в переходе к методу взвешенных наименьших квадратов, в котором роль весовой матрицы играет ковариационная матрица вектора ошибок W . Запишем функцию потерь с этой матрицей, представленной в виде произведения квадратных корней:

$$V = e^T W e = [W^{1/2} e]^T [W^{1/2} e]. \quad (23.8-1)$$

Вектор ошибок в (23.8-1) определяется выражением

$$e = y - \Psi \theta = [\Psi y] \begin{bmatrix} -\theta \\ 1 \end{bmatrix} = D \tilde{\theta}. \quad (23.8-2)$$

Основная идея метода заключается в приведении матрицы D к верхней треугольной форме D_t ,

$$D_t = T D, \quad (23.8-3)$$

с помощью ортогонального преобразования T , которое не изменяет значения функции потерь

$$V = e^T T^T W T e = e^T W e, \quad (23.8-4)$$

так как $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$. Минимизация (23.8-4) приводит в итоге к оценке параметров в форме

$$\hat{\theta} = \mathbf{F}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{F}_{\theta R}, \quad (23.8-5)$$

где $\mathbf{F}_{\theta\theta}$ и $\mathbf{F}_{\theta R}$ — верхние треугольные матрицы, что весьма упрощает решение уравнения (23.8-5). Подробное изложение этого *дискретного алгоритма фильтрации по методу квадратного корня* можно найти в работах [23.20], [23.19], [23.18]. В данном алгоритме не нужно задавать никаких начальных значений, благодаря чему и в нерекуррентном, и в рекуррентном вариантах он обеспечивает быструю сходимость оценок. В [23.20] приведен также *модифицированный алгоритм фильтрации по методу квадратного корня*. Предлагались и другие усовершенствования известных рекуррентных методов идентификации. Все они имеют своей целью *сокращение вычислений*, выполняемых в каждом такте. Эти методы, в которых используются свойства инвариантности матриц определенных типов к сдвигам во времени, получили наименование *быстрых алгоритмов идентификации* [23.21].

Таблица 23 8.1

Характеристики модифицированных вычислительных алгоритмов на основе РМНК

Тип алгоритма	Число операций умножения	Объем памяти (в словах)	Сходимость	Дисперсия оценок параметров
РМНК	$2n^2 + 5n$	354	Надежная; скорость средняя	Средние
БРМНК	$(p^2 + 7p + 2)n + 2p^3 + 3p^2$	1136	Чувствительна к начальным значениям; иногда медленная	Большие
МСА	$2n$	134	Недостаточно надежная; очень медленная	Очень большие
ДФКК	$\frac{5}{2}(n+1)^2 + \frac{15}{2}(n+1) + \frac{n}{2}(n+1)$	385	Надежная; очень быстрая	Малые
МФКК	$\frac{5}{2}n^2 + \frac{13}{2}n$	371	Надежная; очень быстрая	Малые

РМНК — рекуррентный метод наименьших квадратов;

БРМНК — быстрый рекуррентный метод наименьших квадратов;

МСА — метод стохастической аппроксимации;

ДФКК — дискретный алгоритм фильтрации по методу квадратного корня;

МФКК — модифицированный алгоритм фильтрации по методу квадратного корня;

n — число параметров;

p — число обновляемых элементов в векторе Ψ^T (РМНК; $p=2$).

В работе [23.22] было проведено сравнение модифицированных рекуррентных алгоритмов идентификации по продолжительности вычислений, требованиям к памяти, сходимости и точности оценок. Этот анализ базировался на результатах моделирования шести различных тестовых объектов (тестовых объектов I, II, III и IV, описание которых приведено в приложении, а также двух других объектов). Программы алгоритмов идентификации были составлены на языке Фортран и выполнялись на 16-разрядной управляющей ЭВМ. Основные результаты исследования представлены в табл. 23.8.1. Для сравнения в ней приведены также соответствующие показатели для РМНК. Как следует из этой таблицы, по объему вычислений быстрый алгоритм идентификации имеет преимущество перед РМНК, лишь когда число параметров $n > 10$ (порядок $m > 5$). В то же время он требует значительно больше памяти, чем другие алгоритмы, и весьма чувствителен к выбору исходных значений. При несколько большем объеме измерений очень точные оценки параметров дает дискретный алгоритм фильтрации по методу квадратного корня. Однако на начальном этапе его оценки характеризуются значительной колебательностью, что делает этот алгоритм не слишком удобным для применения в адаптивных системах управления. В целом наилучшие показатели демонстрирует модифицированный алгоритм фильтрации по методу квадратного корня, но для типовых объектов он незначительно превосходит РМНК. Лишь в тех случаях, когда требуются оценки повышенной точности, а использование РМНК сопряжено с трудностями вычислительного характера, можно рекомендовать МФКК. Однако в большинстве приложений наиболее эффективным оказывается простейший рекуррентный алгоритм идентификации на основе метода наименьших квадратов или его расширения (ОРМНК, РММП).

Идентификация в замкнутом контуре

В самооптимизирующихся адаптивных системах настройка регуляторов осуществляется в соответствии с оценками параметров объекта, получаемых в процессе его функционирования внутри замкнутого контура управления. Есть и другие приложения, в которых идентификация динамических объектов может выполняться только в замкнутом контуре. В связи с этим возникает вопрос: возможно ли использование методов, предназначенных для идентификации объектов, не охваченных обратными связями, для оценивания параметров объектов в замкнутых контурах управления? Очевидно, что при этом должны соблюдаться условия, при которых обеспечивается сходимость оценок. В отношении корреляционных методов данная проблема решается достаточно просто. Для того чтобы сходилась взаимная корреляционная функция входного сигнала $u(k)$ и выходного сигнала $y(k)$, необходимо, чтобы вход $u(k)$ не был коррелирован с шумом измерений выхода $p(k)$. Однако любая обратная связь нарушает это условие, ввиду чего корреляционные методы в их исходном виде для идентификации в замкнутом контуре непригодны. Что же касается методов параметрической идентификации, то здесь ситуация несколько иная. Для их сходимости достаточно того лишь, чтобы сигнал ошибки $e(k)$ не был коррелирован с элементами вектора $\psi(k)$. Данное обстоятельство, как будет показано ниже, существенно расширяет возможности применения этих методов для идентификации в замкнутом контуре.

В разд 24.1 и 24.2 обсуждаются условия сходимости оценок параметров при идентификации в замкнутом контуре в отсутствие и при наличии внешних возмущающих сигналов. Затем в разд 24.3 проводится сравнение методов с точки зрения эффективности их использования для идентификации в замкнутом контуре. Для того чтобы более систематично подойти к анализу проблем, возникающих при оценивании параметров в замкнутом контуре, выделим ряд типовых случаев (см рис. 24.1.1 и 24.2.1):

Случай А: Косвенная идентификация объекта управления. Оцениваются параметры замкнутого контура. Если параметры регулятора известны, модель объекта определяется на основе полученной модели замкнутого контура

Случай Б: Прямая идентификация объекта управления. Параметры модели объекта определяются непосредственно, минуя промежуточный этап идентификации модели замкнутого контура. Параметры регулятора не используются.

Случай В: Измеряется только выходной сигнал $y(k)$.

Случай Г: Измеряются только входной сигнал $u(k)$ и выходной сигнал $y(k)$.

Случай Д: Внешние возмущения отсутствуют.

Случай Е: На объект воздействует внешнее возмущение $u_s(k)$ — неизмеримое или поддающееся измерению, но не используемое непосредственно в алгоритмах идентификации

Случай Ж: Внешнее измеримое возмущение $u_s(k)$ используется в алгоритме идентификации.

Ниже будут рассматриваться следующие комбинации перечисленных случаев:

$A+B+D$ и $B+Г+D$ разд. 24.1

$A+Ж$ и $B+Г+Е$ разд. 24.2 и 24.3.3

В этой главе, если специально не оговорено иное, предполагается, что объекты управления линейны, а регуляторы линейны, стационарны и не подвергаются воздействию помех.

24.1. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ОТСУТСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ

На рис. 24.1.1 изображен линейный стационарный объект с дискретной передаточной функцией

$$G_P(z) = \frac{Y_u(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_{m_b} z^{-m_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m_a} z^{-m_a}} z^{-d} \quad (24.1-1)$$

и формирующий фильтр шума

$$G_{Pv}(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{m_d} z^{-m_d}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m_a} z^{-m_a}}, \quad (24.1-2)$$

идентификация которых должна проводиться внутри замкнутого контура управления. Задача определения искомым оценок парамет-

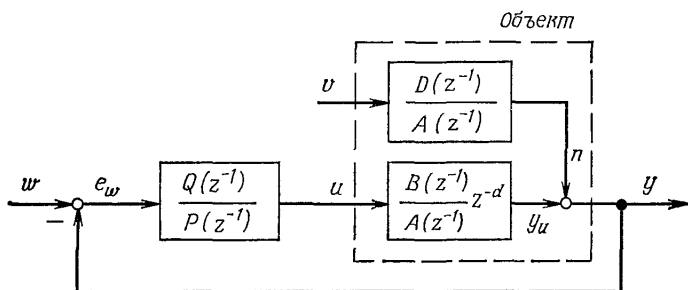


Рис. 24.1.1. Схема идентификации объекта в замкнутом контуре без внешних возмущений.

ров в отсутствие внешних возмущений существенно упрощается, если положить $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$. При этом передаточная функция регулятора имеет вид

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e_w(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}. \quad (24.1-3)$$

В контуре формируются следующие сигналы:

$$\begin{aligned} y(z) &= y_u(z) + u(z), \\ e_w(z) &= w(z) - y(z). \end{aligned}$$

Обычно считается, что $w(z) = 0$ и тем самым $e_w(z) = -y(z)$. Будем полагать, что случайный сигнал $v(k)$ представляет собой неизмеримый статистически независимый шум с математическим ожиданием $E\{v(k)\} = 0$ и дисперсией σ_v^2 .

24.1.1. Косвенная идентификация объекта управления (случай $A+B+D$)

Реакция замкнутого контура на шум, играющий роль входного сигнала, определяется передаточной функцией

$$\begin{aligned} \frac{y(z)}{v(z)} &= \frac{G_{PV}(z)}{1 + G_R(z)G_P(z)} = \\ &= \frac{D(z^{-1})P(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})} = \\ &= \frac{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_r z^{-r}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_l z^{-l}} = \frac{\mathcal{B}(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (24.1-4)$$

Из полученного выражения следует, что регулируемая переменная $y(k)$ является случайным авторегрессионным процессом со скользящим средним (АРСС). Он вырабатывается в контуре в ответ на подачу шума $v(k)$, причем замкнутый контур действует в этом случае как формирующий фильтр шума. Полиномы в (24.1-4) имеют следующие порядки:

$$\left. \begin{aligned} l &= \max [m_a + \mu, m_b + v + d] \\ r &= m_d + \mu \end{aligned} \right\}. \quad (24.1-5)$$

Если измеряется только выход $y(k)$, параметры АРСС

$$\hat{\theta}_{\alpha, \beta}^T = [\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_l \hat{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_r] \quad (24.1-6)$$

можно оценить с помощью одного из методов, изложенных в гл. 23. Для этого необходимо, чтобы нули уравнения $\mathcal{A}(z) = 0$ лежали внутри единичной окружности на плоскости z и отсутствовали одинаковые корни у полиномов $D(z^{-1})$ и $\mathcal{A}(z^{-1})$.

Далее, имея оценки $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\beta}_1$, можно определить искомые параметры

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{m_a} \hat{b}_1 \dots \hat{b}_{m_b} \hat{d}_1 \dots \hat{d}_{m_d}]. \quad (24.1-7)$$

Однозначное восстановление этих параметров возможно лишь при соблюдении определенных условий, которые именуются условиями идентифицируемости.

Условия параметрической идентифицируемости

Объект (входящий в состав замкнутого контура управления) будем называть *параметрически идентифицируемым*, если с помощью некоторого метода идентификации можно получить состоятельные оценки его параметров. Последнее означает, что должен существовать предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\theta}(N) \} = \theta_0, \quad (24.1-8)$$

где θ_0 обозначает истинный вектор параметров, а N — число выполненных измерений. Выведем условия параметрической идентифицируемости, полагая, что *измеряется только выходной сигнал* $y(k)$.

Первое условие идентифицируемости

Запишем в компактной форме z -преобразование для уравнения объекта управления:

$$Ay = Bu + Dv.$$

После подстановки уравнения регулятора оно приобретает вид

$$Ay = B \left(-\frac{Q}{P} \right) y + Dv.$$

Обе части полученного выражения дополним произвольным полиномом $S(z^{-1})$:

$$\begin{aligned} (A + S)y &= B \left(-\frac{Q}{P} \right) y + Sy + Dv, \\ (A + S)y &= \left(B - S \frac{P}{Q} \right) \left(-\frac{Q}{P} y \right) + Dv, \\ \underbrace{(A + S)Qy}_{A^*} &= \underbrace{(BQ - SP)}_{B^*} \underbrace{\left(-\frac{Q}{P} y \right)}_u + \underbrace{DQv}_{D^*}. \end{aligned}$$

В результате имеем новое выражение

$$A^*y = B^*u + D^*v. \quad (24.1-9)$$

Нетрудно видеть, что замена моделей объекта B/A и шума D/A соответствующими моделями

$$\frac{B^*}{A^*} = \frac{BQ - SP}{AQ + SQ} \quad \text{и} \quad \frac{D^*}{A^*} = \frac{DQ}{AQ + SQ} \quad (24.1-10)$$

не приводит к изменению сигналов $u(k)$ и $y(k)$ при одном и том же $v(k)$. Поскольку полином $S(z^{-1})$ выбирался произвольно, это означает, что порядки полиномов A и B нельзя установить однозначно по измерениям $u(k)$ и $y(k)$. Следовательно, порядки моделей объекта и шума должны быть точно известны заранее [24.1].

Второе условие идентифицируемости

Оценки параметров объекта управления \hat{a}_l и \hat{b}_l , число которых равно $m_a + m_b$, определяются из уравнения (24.1-4) по l параметрам α_l . Если у полиномов D и A нет общих корней, то для получения однозначного решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $l \geq m_a + m_b$ или эквивалентные ему неравенства

$$\left. \begin{aligned} \max [m_a + \mu, m_b + \nu + d] &\geq m_a + m_b \\ \max [\mu - m_b, \nu + d - m_a] &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (24.1-11)$$

Отсюда следуют условия, которым должны подчиняться порядки полиномов в уравнении регулятора:

$$\begin{aligned} v > \mu - d + m_a - m_b \rightarrow v \geq m_a - d \\ \text{или } v > \mu - d + m_a - m_b \rightarrow \mu \geq m_b. \end{aligned} \quad (24.1-12)$$

Если в объекте показатель запаздывания $d=0$, порядки полиномов передаточной функции регулятора должны удовлетворять условиям $v \geq m_a$ или $\mu \geq m_b$. Соответственно, если $d > 0$, необходимо, чтобы $v \geq m_a - d$ или $\mu \geq m_b$. Согласно (24.1-4), при этом не имеет значения, где возникает запаздывание — в объекте управления или в регуляторе. В частности, из этого следует, что второе условие идентифицируемости не нарушается, если берется регулятор с запаздыванием $d = m_a$ и $v = 0$ или $\mu = 0$. Оценки параметров \hat{d}_1 числителя передаточной функции (24.1-2) однозначно определяются по коэффициентам $\hat{\beta}_1$ (24.1-4), если $r \geq m_d$, что эквивалентно

$$\mu \geq 0. \quad (24.1-13)$$

Последнее условие выполняется при любом регуляторе. Если у полиномов $\mathcal{A}(z^{-1})$ и $D(z^{-1})$ имеется p одинаковых корней, они сокращаются и оценить их, следовательно, невозможно. В этом случае могут быть определены только $l-p$ параметров $\hat{\alpha}_1$ и $r-p$ параметров $\hat{\beta}_1$, ввиду чего второе условие идентифицируемости приобретает вид

$$\max[\mu - m_b, v + d - m_a] \geq p. \quad (24.1-14)$$

Заметим, что в (24.1-14) учитываются лишь общие корни \mathcal{A} и D , в то время как соотношение между корнями \mathcal{A} и \mathcal{B} может быть любым, поскольку $\mathcal{B} = DP$, а коэффициенты полинома P известны. Таким образом, имеет значение только число общих нулей у числителя и знаменателя передаточной функции

$$G_{id}(z) = \frac{D(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} = \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})}. \quad (24.1-15)$$

Если порядок регулятора недостаточно велик, идентификацию в замкнутом контуре можно проводить дважды, для двух различных наборов параметров регулятора ([24.2], [24.3]). При этом получается дополнительное уравнение, благодаря чему искомые оценки определяются однозначно. Ниже приводятся примеры, поясняющие второе условие идентифицируемости.

Пример 24.1.1. Требуется определить параметры объекта первого порядка ($m_a = m_b = m = 1$), $y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + v(k) + dv(k-1)$, включенного в замкнутый контур управления. Рассматриваются регуляторы различных типов.

а) Один П-регулятор: $u(k) = -q_0y(k)$ ($v=0$; $\mu=0$).

Передаточной функции (24.1-4) соответствует авторегрессионный процесс скользящим средним (АРСС)

$$y(k) + (a + bq_0)y(k-1) = v(k) + dv(k-1)$$

или
$$y(k) + \alpha y(k-1) = v(k) + \beta v(k-1).$$

Приравнивая коэффициенты, получаем уравнения относительно \hat{a} и \hat{b} :

$$\hat{\alpha} = \hat{a} + \hat{b}q_0$$

$$\hat{\beta} = \hat{d}.$$

Однозначно определить \hat{a} и \hat{b} невозможно, так как $\hat{a}_0 = \hat{a}_0 + \Delta a$ и $\hat{b} = b_0 - \frac{\Delta a}{q_0}$ являются решениями этих уравнений при любом Δa . Следовательно, в данном случае параметры a и b не могут быть идентифицированы. Действительно, согласно (24.1-12), должны выполняться условия $v \geq 1$ или $\mu \geq 1$.

б) **Один ПД-регулятор:** $u(k) = -q_0 y(k) - q_1 y(k-1)$ ($v=1$; $\mu=0$).

В этом случае имеем процесс АРСС второго порядка:

$$y(k) + (a + bq_0)y(k-1) + bq_1 y(k-2) = v(k) + dv(k-1),$$

$$y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) = v(k) + \beta v(k-1).$$

Приравнивая коэффициенты этих уравнений, получаем искомые оценки параметров объекта управления: $\hat{a} = \hat{\alpha}_1$; $\hat{b} = \hat{\alpha}_2 / q_1$.

в) **Два П-регулятора:** $u(k) = -q_{01} u(k)$; $u(k) = -q_{02} u(k)$.

Действуя аналогично п. а), запишем два уравнения относительно \hat{a} и \hat{b} :

$$\hat{\alpha}_{11} = \hat{a} + \hat{b}q_{01}; \quad \hat{\alpha}_{12} = \hat{a} + \hat{b}q_{02}.$$

Отсюда
$$\hat{a} = \left[\hat{\alpha}_{11} - \frac{q_{01}}{q_{02}} \hat{\alpha}_{12} \right] / \left[1 - \frac{q_{01}}{q_{02}} \right], \quad \hat{b} = \frac{1}{q_{02}} [\hat{\alpha}_{12} - \hat{a}].$$

Параметры объекта идентифицируемы, если $q_{01} \neq q_{02}$.

Если оба условия идентифицируемости выполнены, оценку вектора параметров объекта $\hat{\theta}$ обычно определяют путем подстановки ранее найденных параметров АРСС $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_1$ в выражение (24.1-4). В том случае, когда $d=0$, а $m_a = m_b$, число параметров АРСС $l = 2m$. Поэтому для того, чтобы удовлетворялись условия (24.1-12), порядки полиномов в передаточной функции регулятора должны подчиняться соотношениям $v = m$, $\mu \leq m$. Положив $p_0 = 1$, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 & & + b_1 q_0 & & & = \alpha_1 - p_1, \\ a_1 p_1 + a_2 & & + b_1 q_1 & + b_2 q_0 & & = \alpha_2 - p_2, \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \end{aligned}$$

$$a_1 p_{j-1} + a_2 p_{j-2} + \dots + a_m p_{j-m} + b_1 q_{j-1} + \dots + b_m q_{j-m} = \alpha_j - p_j. \quad (24.1-16)$$

Эту систему можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & q_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 & | & q_1 & q_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p_1 & \cdot & \cdot & | & \cdot & q_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_\mu & \cdot & \cdot & 1 & | & \cdot & \cdot & q_0 & a_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & p_\mu & p_1 & \cdot & | & q_m & \cdot & q_1 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & | & 0 & q_m & \cdot & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p_\mu & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - p_1 \\ \alpha_2 - p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\mu - p_\mu \\ \alpha_{\mu+1} \\ \alpha_{\mu+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{2m} \end{bmatrix} \quad (24.1-17)$$

$S \qquad \theta \qquad = \qquad \alpha^*$

Если матрица S квадратная, вектор параметров объекта находится по формуле

$$\hat{\theta} = S^{-1}\alpha^*. \quad (24.1-18)$$

Из соотношения (24.1-17) вновь следует, что однозначное решение может быть получено только в том случае, когда матрица S имеет ранг $r \geq 2m$, т. е. когда справедливы неравенства $v \geq m$ или $\mu \geq m$. Если $v > m$ или $\mu > m$, система (24.1-17) становится переопределенной и для ее решения используется формула псевдообращения:

$$\hat{\theta} = [S^T S]^{-1} S^T \alpha^*. \quad (24.1-19)$$

Как уже говорилось в разд. 24.3, оценки параметров объекта сходятся крайне медленно, если для его идентификации применяются косвенные методы. Достоинство такого подхода лишь в том, что он позволяет непосредственно установить условия параметрической идентифицируемости в замкнутом контуре.

24.1.2. Прямая идентификация объекта управления (случай Б+Г+Д)

Рассматривая метод косвенной идентификации, мы полагали, что параметры регулятора заданы. Поэтому использовались только измерения выхода $y(k)$, так как при наличии уравнения регулятора входной сигнал $u(k)$ однозначно восстанавливается по $y(k)$ и, следовательно, не несет никакой дополнительной информации. Можно, однако, проводить прямую идентификацию объ-

екта, не прибегая к разложению уравнения замкнутого контура, включив в процедуру вычисления оценок измерения входа. При этом отпадает необходимость в знании параметров регулятора.

Для идентификации объекта с передаточной функцией $G_P(z)$, входящего в замкнутый контур, можно было бы воспользоваться непараметрическими методами, например корреляционными, применяя их непосредственно к измеряемым сигналам $u(k)$ и $y(k)$. Однако можно показать, что в силу соотношений

$$\frac{u(z)}{v(z)} = \frac{-G_R(z) G_{Pv}(z)}{1 + G_R(z) G_P(z)}, \quad (24.1-20)$$

$$\frac{y(z)}{v(z)} = \frac{G_{Pv}(z)}{1 + G_R(z) G_P(z)} \quad (24.1-21)$$

результат идентификации в этом случае представлял бы собой передаточную функцию

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{y(z)/v(z)}{u(z)/v(z)} = -\frac{1}{G_R(z)}, \quad (24.1-22)$$

обратную передаточной функции регулятора, взятой с противоположным знаком. Причина этого в том, что отсутствует информация о невозмущенном выходном сигнале $y_u(k) = y(k) - n(k)$. Если бы этот сигнал был доступен измерению, то можно было бы идентифицировать передаточную функцию регулятора, так как

$$\frac{y_u(z)}{u(z)} = \frac{y(z) - n(z)}{u(z)} = \frac{y(z)/v(z) - n(z)/v(z)}{u(z)/v(z)} = G_P(z). \quad (24.1-23)$$

Приведенные выкладки показывают, что прямая идентификация объекта в замкнутом контуре связана с необходимостью определения параметров формирующего фильтра шума $n(z)/v(z)$. Ввиду этого в дальнейшем используется модель, объединяющая уравнения объекта и шума:

$$\hat{A}(z^{-1}) y(z) = \hat{B}(z^{-1}) z^{-d} u(z) + \hat{D}(z^{-1}) v(z). \quad (24.1-24)$$

В то же время для косвенной идентификации основной моделью служит процесс АРСС, определяемый соотношением (24.1-4):

$$[\hat{A}(z^{-1}) P(z^{-1}) + \hat{B}(z^{-1}) z^{-d} Q(z^{-1})] y(z) = \hat{D}(z^{-1}) P(z^{-1}) v(z). \quad (24.1-25)$$

Подставляя в (24.1-25) уравнение регулятора

$$Q(z^{-1}) y(z) = -P(z^{-1}) u(z), \quad (24.1-26)$$

получаем выражение

$$\hat{A}(z^{-1}) P(z^{-1}) y(z) - \hat{B}(z^{-1}) z^{-d} P(z^{-1}) u(z) = \hat{D}(z^{-1}) P(z^{-1}) v(z), \quad (24.1-27)$$

которое после сокращения $P(z^{-1})$ переходит в уравнение, по форме аналогичное уравнению модели объекта в разомкнутом контуре

(24.1-23). Между ними, однако, имеется принципиальное различие, поскольку, согласно (24.1-26), управление $u(z)$ или $P(z^{-1})u(z)$ зависит от выхода $y(z)$ или $Q(z^{-1})y(z)$ и не может задаваться произвольно.

Условия идентифицируемости для случая прямой идентификации в замкнутом контуре будем рассматривать с двух точек зрения. Сначала мы обсудим условия существования единственного минимума функции потерь

$$V = \sum_{k=1}^N e^2(k), \quad (24.1-28)$$

полагая, что модель объекта имеет вид

$$\hat{A}(z^{-1})y(z) - \hat{B}(z^{-1})z^{-d}u(z) = \hat{D}(z^{-1})e(z), \quad (24.1-29)$$

а управляющий сигнал $u(z)$ определяется соотношением (24.1-26). Учитывая это, запишем уравнение для ошибки:

$$\frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} \left[\hat{A}(z^{-1}) + \hat{B}(z^{-1})z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y(z) = e(z). \quad (24.1-30)$$

Для того чтобы функция потерь V имела единственный минимум в пространстве неизвестных параметров объекта, эти параметры, объединенные в выражение

$$\frac{1}{\hat{D}} \left[\hat{A} + \hat{B}z^{-d} \frac{Q}{P} \right] = \frac{\hat{A}P + \hat{B}z^{-d}Q}{\hat{D}P} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}, \quad (24.1-31)$$

должны однозначным образом зависеть от сигнала ошибки e . Отношение (24.1-31) совпадает с правой частью уравнения (24.1-4). Последняя содержит полиномы \hat{A} , \hat{B} и \hat{D} , параметры которых однозначно определяются исходя из передаточной функции $y(z)/v(z)$, если выполнены первое и второе условия идентифицируемости. Следовательно, для сходящихся оценок при $e(z) = v(z)$ в случае прямой идентификации условия параметрической идентифицируемости сохраняют прежний вид. Сравнивая уравнения (24.1-4) и (24.1-30, 24.1-31), заметим, что сигнал ошибки $e(k)$ как при косвенной, так и при прямой идентификации определяется одним и тем же выражением. Действительно, если оценки сходятся, $\hat{A} = A$; $\hat{B} = B$; $\hat{D} = D$ и, таким образом, в обоих случаях $e(k) = v(k)$.

Второй подход к выводу второго условия идентифицируемости базируется на анализе основных соотношений, описывающих любой из нерекуррентных методов параметрической идентификации. В частности, для метода наименьших квадратов, согласно (23.2-2),

$$\begin{aligned} y(k) &= \psi^T(k) \theta = [-y(k-1) \dots y(k-m_a) \\ &u(k-d-1) \dots u(k-d-m_b)] \theta. \end{aligned} \quad (24.1-32)$$

Здесь $\psi^T(k)$ обозначает одну из строк матрицы ψ в системе уравнений (23.2-6). В присутствии обратной связи, определяемой урав-

нием (24.1-26), между элементами вектора $\psi(k)$ существует функциональная зависимость:

$$u(k-d-1) = -p_1 u(k-d-2) - \dots - p_\mu u(k-\mu-d-1) - \\ - q_0 y(k-d-1) - \dots - q_\nu y(k-\nu-d-1). \quad (24.1-33)$$

Следовательно, при $\mu \leq m_b - 1$ и $\nu \leq m_a - d - 1$ переменная $u(k-d-1)$ является линейной комбинацией остальных элементов $\psi(k)$. Только в том случае, когда $\mu \geq m_b$ или $\nu \geq m_a - d$, данная линейная связь отсутствует. Приведенные рассуждения справедливы и для всей системы уравнений (23.2-6). Таким образом, если второе условие идентифицируемости не выполнено, эта система, описывающая метод наименьших квадратов, содержит линейно зависимые уравнения.

Теперь остается выяснить, можно ли при непосредственном оценивании параметров объекта в замкнутом контуре пользоваться теми же *методами идентификации*, которые ранее применялись в разомкнутом контуре. Согласно (23.2-5) и (23.5-5), для обоих основных методов — наименьших квадратов и максимального правдоподобия — невязка или ошибка предсказания на один такт идентификации задается выражением

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = y(k) - \psi^T(k) \hat{\theta}(k). \quad (24.1-34)$$

Условием сходимости оценок является отсутствие статистической зависимости между ошибкой $e(k)$ и элементами вектора данных $\psi(k)$. Последний в МНК имеет вид

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \dots u(k-d-1) \dots],$$

в ММП —

$$\psi^T(k) = [-y(k-1) \dots u(k-d-1) \dots \hat{v}(k-1) \dots].$$

Если оценки сходятся, можно положить $e(k) = v(k)$. Поскольку сигнал $v(k)$ воздействует только на $y(k)$, $y(k+1)$, ..., а эти величины не входят в $\psi(k)$, ошибка $e(k)$ не может зависеть от элементов вектора $\psi(k)$. Данный вывод справедлив и в том случае, когда на $u(k)$ действует обратная связь через регулятор. Это означает, что в замкнутом контуре ошибка $e(k)$ и элементы $\psi(k)$ статистически независимы. Следовательно, если выполняются условия идентифицируемости, все методы оценивания параметров, основанные на минимизации невязок, могут использоваться для идентификации в замкнутом контуре точно так же, как и в разомкнутом. Вопросы применимости методов, основанных на других критериях, обсуждаются в разд. 24.3. Обстоятельное исследование задач идентификации в замкнутом контуре содержится в работах [24.2], [24.4]. Там же рассмотрены проблемы, связанные с использованием нестационарных и нелинейных регуляторов.

Сформулируем наиболее важные выводы относительно возможностей идентификации *в замкнутом контуре в отсутствие внешних возмущений* для случаев линейного стационарного детерминированного регулятора:

1. При проведении идентификации параметров в замкнутом контуре (прямой или косвенной) должны удовлетворяться первое и второе условия идентифицируемости.
2. Для прямого оценивания параметров в замкнутом контуре методы идентификации, использующие невязки или ошибки предсказания, могут применяться таким же образом, как и в разомкнутом контуре. При этом информация о регуляторе не нужна.
3. Если структура регулятора не отвечает второму условию идентифицируемости (он имеет недостаточно высокий порядок), для получения сходящихся оценок параметров рекомендуются следующие способы:
 - а) попеременное подключение двух регуляторов с различными параметрами ([24.4], [24.5]);
 - б) введение запаздывания $d \geq m_a - v + p$ в обратной связи;
 - в) использование нелинейных или нестационарных регуляторов.

24.2. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Предположим теперь, что на замкнутый контур действует внешнее возмущение $u_s(k)$, как показано на рис. 24.2.1. В этом случае на входе объекта присутствует сигнал

$$u(k) = u_R(k) + u_s(k), \quad (24.2-1)$$

причем

$$u_R(z) = -\frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} y(z). \quad (24.2-2)$$

Можно считать, что дополнительное воздействие $u_s(k)$ возникает в результате подачи сигнала $s(k)$, проходящего через некоторый фильтр:

$$u_s(z) = G_s(z) s(z). \quad (24.2-3)$$

Если $G_s(z) = G_R(z) = Q(z^{-1})/P(z^{-1})$, сигнал $s(k)$ играет роль задающего воздействия $w(k)$. Возмущение $u_s(k)$ может формироваться различными способами. Важно лишь, чтобы это был внешний сигнал, не коррелированный с шумом объекта $v(k)$.

Учитывая, что косвенная идентификация обычно неэффективна, ниже рассматривается только задача *прямой идентификации объекта*. Выход замкнутого контура управления описывается выражением

$$y(z) = \frac{DP}{AP + Bz^{-d}Q} v(z) + \frac{Bz^{-d}P}{AP + Bz^{-d}Q} u_s(z) \quad (24.2-4)$$

или эквивалентным ему уравнением

$$[AP + Vz^{-d}Q] u(z) = DPv(z) + Vz^{-d}Pu_s(z).$$

Подставим в это уравнение соотношения (24.2-1) и (24.2-2):

$$\Lambda(z^{-1})P(z^{-1})u(z) - B(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})u(z) = D(z^{-1})P(z^{-1})v(z). \quad (24.2-5)$$

Сократив затем обе части (24.2-5) на $P(z^{-1})$, получаем следующее уравнение объекта:

$$A(z^{-1})u(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = D(z^{-1})v(z). \quad (24.2-6)$$

Оно не тождественно (24.1-27), поскольку в $u(k)$ присутствует не только составляющая, вырабатываемая регулятором из сигнала

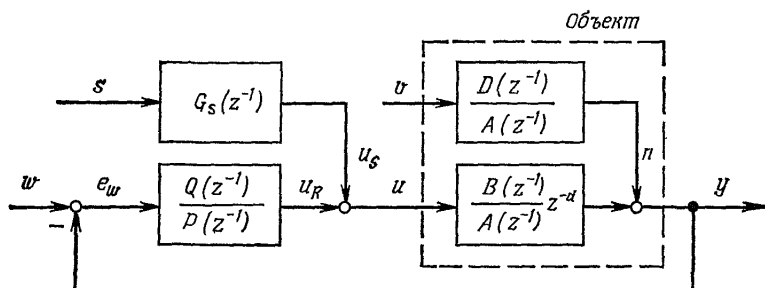


Рис. 24.2.1. Схема идентификации объекта в замкнутом контуре при наличии внешнего возмущения s .

$u(k)$, но и возмущение $u_s(k)$. Следовательно, сигнал обратной связи, ранее определявшийся выражением (24.1-33), в данном случае равен

$$u(k-d-1) = -p_1u(k-d-2) - \dots - p_\mu u(k-\mu-d-1) - q_0y(k-d-1) - \dots - q_v y(k-v-d-1) + u_s(k-d-1) + p_1u_s(k-d-2) - \dots - p_\mu u_s(k-\mu-d-1).$$

Если $u_s(k) \neq 0$, $u(k-1)$, согласно (24.1-32), при любых порядках полиномов передаточной функции регулятора μ и v не является линейной комбинацией элементов вектора данных $\psi(k)$. Таким образом, прямая идентификация объекта, описываемого уравнением (24.2-6), всегда возможна, если внешнее воздействие представляет собой возбуждающий процесс достаточно высокого порядка. При этом выполнение второго условия идентифицируемости уже не обязательно. В то же время первое условие идентифицируемости должно соблюдаться. Отметим также, что сигнал возмущения можно не измерять и состоятельность результатов обеспечивается при любом формирующем фильтре шума D/C . Для получения оценок могут применяться те же методы идентификации, основанные на предсказании выходного сигнала, которые использовались для оценивания параметров в разомкнутом контуре.

24.3. МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ В ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

В этом разделе обсуждаются возможности применения методов идентификации, рассмотренных в гл. 23, для оценивания параметров в замкнутом контуре.

24.3.1. Косвенная идентификация параметров объекта в отсутствие возмущений

Для определения параметров α_1 и β_1 случайного авторегрессионного процесса со скользящим средним (АРСС) вида (24.1-4) можно использовать рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) (разд. 23.2.1) или рекуррентный алгоритм оценивания корреляционной функции на основе метода наименьших квадратов РКОР-МНК [24.3]. При этом, однако, следует иметь в виду, что из-за большого числа коэффициентов ($l \geq m_a + m_b$, $r = m_d + \mu$), а также невозможности измерения входного сигнала помехи $v(k)$ оценки параметров сходятся крайне медленно. Поэтому в большинстве случаев предпочтение отдается прямым методам идентификации.

24.3.2. Прямая идентификация параметров объекта в отсутствие возмущений

Как было показано в разд. 24.1, все ранее описанные методы, в основе которых лежит минимизация ошибок предсказания (навязок), т. е. РМНК, РОМНК и РММП, могут применяться для идентификации в замкнутом контуре. Эти методы, использующие измерения сигналов $u(k)$ и $y(k)$, обеспечивают получение несмещенных и состоятельных оценок параметров, если формирующий фильтр шума имеет передаточную функцию вида $1/A$ (для МНК) или D/A (для РОМНК и РММП). Несмещенные оценки параметров могут быть получены и с помощью РМВП, но лишь в том случае, когда вектор вспомогательных переменных $w^T(k)$, определяемый выражением (23.4-1), не коррелирован с ошибкой $e(k)$. Отсюда следует, что он не должен быть коррелирован и с шумом измерений $p(k)$ [3.13]. Однако в замкнутом контуре существует корреляция между входными сигналами $u(k-\tau)$ и помехой $p(k)$ при $\tau \geq 0$. Таким образом, если вектор вспомогательных переменных выбирается в соответствии с (23.4-1), РМВП в замкнутом контуре дает смещенные оценки параметров. Корреляция между $u(k-\tau)$ и $e(k)$ при $\tau \geq 1$ отсутствует только тогда, когда ошибки $e(k)$ независимы, а это означает, что для РМВП, как и для РМНК, фильтр шума должен описываться передаточной функцией вида $1/A$ (см. [3.13], стр. 66, 67).

24.3.3. Прямая идентификация параметров объекта при наличии возмущений

Если измерению доступны только сигналы $u(k)$ и $y(k)$, для вычисления оценок параметров следует применять такие методы, как РМНК, РОМНК и РММП. Измеримое возмущение можно использовать для формирования вектора вспомогательных переменных, и в этом случае идентификация параметров может осуществляться с помощью метода РМВП.

Особенности применения в замкнутом контуре метода РКОР-МНК [3.13] для всех трех способов идентификации параметров объекта проанализированы в работе [24.3].

Если стоящий в контуре управления регулятор таков, что второе условие идентифицируемости для него не выполняется, оценки параметров объекта тем не менее можно получить, периодически включая в контур другой регулятор (см. пример 24.1.1, в). Как показано в работе [24.5], оценки параметров в этом случае имеют минимальный разброс, если период переключения регуляторов выбирается в пределах $(5-10) T_0$.

Регуляторы с подстройкой параметров

В данной главе рассматриваются алгоритмы управления с подстройкой параметров, основанные на применении обычных алгоритмов управления совместно с рекуррентными методами оценивания параметров. В соответствии с определениями, данными в гл. 22, такие регуляторы относятся к классу самооптимизирующихся адаптивных регуляторов. Рекуррентные методы оценивания параметров и их применение для определения параметров замкнутых контуров управления рассматривались в гл. 23 и 24. Данная глава посвящена главным образом обсуждению различных сочетаний методов оценивания параметров и алгоритмов управления. Отдельные принципы построения самооптимизирующихся адаптивных регуляторов излагаются в разд. 25.1. В разд. 25.2 дается краткий обзор соответствующих алгоритмов управления. Различные типы регуляторов с подстройкой параметров описываются в разд. 25.3, их сравнительный анализ дается в разд. 25.4. Примеры реализации регуляторов указанного типа приводятся в разд. 25.5. Наконец, в разд. 25.6 рассматриваются многомерные регуляторы с подстройкой параметров.

25.1. ВВЕДЕНИЕ

Кратко изложим принципы построения *самооптимизирующихся адаптивных регуляторов, основанных на оценивании параметров*. Будем полагать, что объект управления является линейным, а его параметры либо постоянны, либо меняются во времени. Адап-

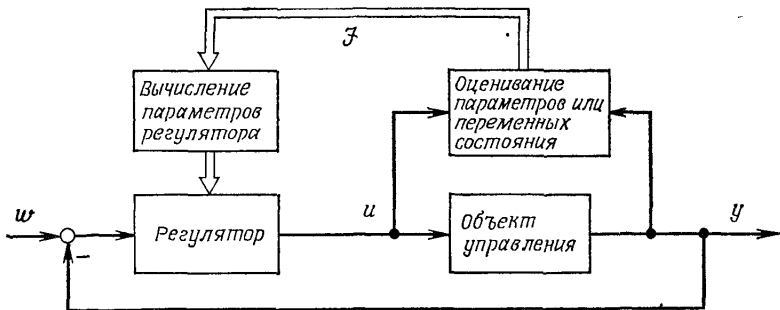


Рис. 25.1.1. Структурная схема самооптимизирующихся адаптивных регуляторов, основанных на идентификации объекта управления.

тивные регуляторы рассматриваемого класса различаются по следующим признакам:

- тип математической модели объекта управления;
- метод оценивания параметров и переменных состояния;
- априорная информация об объекте управления;

- критерий, используемый при расчете регулятора;
 - тип алгоритма управления.
- Рассмотрим наиболее важные случаи.

а) Математические модели объекта управления

Классификация математических моделей объектов управления была проведена в гл. 3. Применительно к системам с самонастройкой интерес представляют лишь *параметрические модели объекта управления*:

— *модели вход-выход* в виде стохастических разностных уравнений или дискретных передаточных функций

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = D(z^{-1})v(z) \quad (25.1-1)$$

(модель максимального правдоподобия \rightarrow МП),

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = v(z) \quad (25.1-2)$$

(модель наименьших квадратов \rightarrow НК). Здесь $v(k)$ является последовательностью независимых случайных величин с математическим ожиданием $E\{v(k)\} = 0$ и дисперсией σ_v^2 . Предполагается, что элементы вектора параметров $\theta^T = [a_1 \dots a_m; b_1 \dots b_m; d_1 \dots d_m]$ постоянны или медленно меняются во времени;

— *модели состояния* в виде векторных стохастических разностных уравнений

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) + Fv(k), \\ y(k) &= C(\theta)x(k) + n(k). \end{aligned} \quad (25.1-3)$$

В общем случае $v(k)$ и $n(k)$ являются статистически независимыми случайными векторами (гл. 15). Элементы вектора θ постоянны, медленно меняются во времени или могут быть описаны с помощью случайного процесса

$$\theta(k+1) = \Phi\theta(k) + \xi(k), \quad (25.1-4)$$

где $\xi(k)$ последовательность статистически независимых случайных векторов.

Приведенные модели учитывают случайные возмущения. Если возмущения v_1 и n_1 являются детерминированными сигналами или отсутствуют, используются обычные скалярные или векторные разностные уравнения.

б) Оценка параметров и переменных состояния

Используемые на практике методы оценивания параметров замкнутых контуров управления рассмотрены в гл. 23 и 24. Методы оценивания и наблюдения переменных состояния изложены в разд. 8.6 и 15.4.

в) Информация об объекте управления

Информация об объекте управления \mathcal{Y} , получаемая в виде оценок параметров и переменных состояния, является основой для расчета систем управления и может содержать следующие компоненты:

● При оценивании параметров:

— оценки параметров объекта управления

$$\mathcal{Y}_{11} = [\hat{\theta}] = [\hat{a}_1, \hat{b}_1]^T \text{ или } [\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{d}_1]^T, \quad (25.1-5)$$

— оценки параметров объекта управления и их погрешности

$$\mathcal{Y}_{12} = [\hat{\theta}, \Delta \hat{\theta}]^T. \quad (25.1-6)$$

● При оценивании переменных состояния:

— оценки состояний

$$\mathcal{Y}_{21} = [\hat{x}(k+1)], \quad (25.1-7)$$

— оценки состояний и их погрешности

$$\mathcal{Y}_{22} = [\hat{x}(k+1), \Delta \hat{x}(k+1)]^T. \quad (25.1-8)$$

● При оценивании сигналов:

— если при оценивании параметров используется модель шума, то неизмеряемые величины $v_1(k)$ и $n_1(k)$ могут быть описаны с помощью оценок

$$\mathcal{Y}_3 = [\bar{v}_1(k)] \text{ или } [\hat{n}_1(k)]; \quad (25.1-9)$$

— будущие значения выходного сигнала $y(k+j)$, $j \geq 1$, могут быть предсказаны по известным входам $u_1(k-l)$, $l \geq 0$ и оценкам шума $\hat{v}_1(k-l)$, $l \geq 0$.

В зависимости от вида используемой информации можно выделить несколько типов адаптивных регуляторов. Излагаемые далее принципы самонастройки рассмотрены для случая стохастических систем управления. Следует отметить, что терминология, используемая в литературе, не всегда совпадает (см. [25.1], [25.2] и [22.14]).

УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА РАЗДЕЛЕНИЯ

Стохастический регулятор функционирует в соответствии с принципом разделения, если процедура оценивания параметров или переменных состояния выполняется раздельно с вычислением параметров устройства управления (см. гл. 15 и [22.14]). Закон управления в этом случае имеет вид

$$u(k) = f_S[y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots, \hat{\theta}(k), \hat{x}(k)].$$

УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СТОХАСТИЧЕСКОЙ
ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Стохастический регулятор подчиняется принципу стохастической эквивалентности, если закон управления

$$u(k) = f_D[u(k), u(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots, \theta_0, x_0(k)]$$

получен относительно истинных значений параметров θ_0 и переменных состояния $x_0(k)$, которые затем заменяются своими оценками

$$u(k) = f_G[u(k), u(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots, \hat{\theta}(k), \hat{x}(k)].$$

Этот принцип является частным случаем принципа разделения. Принцип стохастической эквивалентности теоретически обоснован для решения задачи синтеза управления линейным объектом с известными параметрами по квадратичному критерию качества [25.2]. При этом оценивание переменных состояния производится при наличии возмущений $v(k)$ и $n(k)$ в виде белого шума. Для систем управления со случайно изменяющимися параметрами объекта принцип стохастической эквивалентности справедлив только для случая статистической независимости параметров [25.3], [25.4], [22.14]. Для синтеза стохастического управления с подстройкой параметров принцип стохастической эквивалентности, вообще говоря, неприменим. Однако он часто используется в качестве специального метода проектирования.

Реализация изложенных выше принципов приводит к созданию двух типов адаптивных регуляторов [22.14]:

СТОХАСТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Регуляторы, синтезированные в соответствии с принципом стохастической эквивалентности, будем называть «стохастически эквивалентными регуляторами». При вычислении их параметров предполагается, что оценки параметров и переменных состояния совпадают с их действительными значениями. В полученном законе управления не учитываются погрешности оценок, а используется информация только в форме \mathcal{Y}_{11} или \mathcal{Y}_{21} .

РЕГУЛЯТОРЫ Пониженной чувствительности

Регуляторы, реализующие принцип разделения и использующие оценки параметров совместно с характеристиками их ошибок, будем называть «регуляторами пониженной чувствительности». В этом случае используется информация в форме \mathcal{Y}_{12} или \mathcal{Y}_{22} . Учет при управлении характеристик ошибок обеспечивает более «осторожное» воздействие на объект.

е) Критерий, используемый при расчете регулятора

ДУАЛЬНЫЕ АДАПТИВНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Качественные характеристики самооптимизирующихся адаптивных систем управления зависят главным образом от точности идентификации параметров объекта управления и свойств используемых алгоритмов управления. Сигнал на входе объекта управления должен быть определен из условия одновременного выполнения двух требований:

- хорошей компенсации текущих возмущений;
- хорошей сходимости последующего процесса идентификации объекта управления.

Это приводит к возникновению дуальных регуляторов [25.5]. Указанные требования могут быть противоречивыми. Если, например, оценки параметров объекта неверны, регулятор должен «действовать осторожно», т. е. мало изменять величину входного сигнала $u(k)$; в то же время для улучшения оценок параметров необходимы значительные изменения $u(k)$. Поэтому дуальные регуляторы должны обеспечивать приемлемый компромисс между выдвинутыми требованиями. Следовательно, при выборе критерия надо учитывать как текущие сигналы управления, так и будущую информацию Y .

НЕДУАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Эти регуляторы используют сигналы, выработанные в текущий и предшествующие моменты времени, а также текущую информацию Y , описывающую объект управления. Критерии качества и методы, наиболее часто используемые при синтезе нед дуальных регуляторов, были рассмотрены в предшествующих главах. Это главным образом квадратичный критерий или специальные критерии, такие, как принцип конечного времени установления переходного процесса, методы компенсации нулей и полюсов или обеспечения заданного расположения полюсов.

д) Алгоритмы управления

Фактический синтез алгоритма управления осуществляется до его реализации на вычислительной машине. А затем вычисляются параметры регулятора как функции параметров объекта управления. Алгоритмы управления, используемые в адаптивных системах управления, должны обладать следующими свойствами:

- удовлетворять второму условию идентифицируемости замкнутого контура управления;
- обладать малыми потребностями в объеме памяти и быстродействии ЭВМ для расчета параметров регулятора;
- быть применимыми ко многим классам объектов управления и сигналов.

В следующем разделе рассмотрим алгоритмы управления, отвечающие перечисленным требованиям. В классе самооптимизирующихся адаптивных регуляторов с идентификацией объекта управления недуальные методы, основанные на *принципе стохастической эквивалентности и рекуррентном оценивании параметров*, зарекомендовали себя положительно как в теории, так и в практике. Полученные с их помощью алгоритмы будем называть *алгоритмами управления с подстройкой параметров*; также будет встречаться термин *самонастраивающиеся регуляторы* [26.8], [26.13]. Следует различать понятия «самонастраивающийся» и «адаптивный», поскольку использование первого предполагает постоянство параметров объекта управления. Однако при анализе применения этих терминов выясняется, что разграничения между ними не делается, поэтому будем считать, что различия между ними второстепенны.

25.2. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

При реализации алгоритма управления с подстройкой параметров минимальных затрат на расчет параметров требуются регуляторы следующего типа:

- аperiodические регуляторы $AP(v)$, $AP(v+1)$;
- регуляторы с минимальной дисперсией РМДЗ, РМД4;
- регулятор с оптимизируемыми параметрами $iPP-j$.

Большой объем вычислений необходим для:

- обычного линейного регулятора, обеспечивающего заданное расположение полюсов — ЛРП;
- регулятора с управлением по состоянию — РС.

Далее перечисленные алгоритмы управления рассматриваются с точки зрения выполнения второго условия идентифицируемости (24.1-14) и требуемого объема вычислений. Для алгоритмов управления, основанных на сокращении нулей и полюсов объекта управления, следует различать случаи точной и неточной настройки регулятора. Приводятся методы, ускоряющие вычисление параметров регулятора.

25.2.1. Алгоритмы управления с конечным временем установления

Дискретная передаточная функция алгоритма $AP(v)$ имеет вид

$$G_R(z) = \frac{\hat{q}_0 \hat{A}(z^{-1})}{1 - \hat{q}_0 \hat{B}(z^{-1}) z^{-d}}. \quad (25.2-1)$$

Порядки числителя и знаменателя соответственно равны $v = m_a$ и $\mu = m_b + d$. Для случая неточной настройки параметров регулятора (см. (24.1-15)) передаточная функция алгоритма управления

равна

$$G_{id}(z) = \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1}) [1 - \hat{q}_0 \hat{B}(z^{-1}) z^{-d}] + \hat{q}_0 B(z^{-1}) z^{-d} \hat{A}(z^{-1})}. \quad (25.2-2)$$

Здесь второе условие идентифицируемости удовлетворяется, так как сокращение нуля и полюса не происходит ($p=0$). Полагая в уравнении (25.2-2) $\hat{A} = A$ и $\hat{B} = B$, получим дискретную передаточную функцию регулятора

$$G_{id}(z) = \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (25.2-3)$$

при точной настройке его параметров. В этом случае также не происходит никаких сокращений и объект управления остается идентифицируемым. Аналогичные результаты получены для регулятора $AP(v+1)$ повышенного порядка с $v = m_a + 1$ и $\mu = m_b + d + 1$.

25.2.2. Регуляторы с минимальной дисперсией

Алгоритмы РМД3 и РМД4 целесообразно использовать при воздействии на систему окрашенного шума (см. (24.1-2)).

Дискретная передаточная функция алгоритма РМД3-з (14.2-12) имеет вид

$$G_R(z) = \frac{\hat{L}(z^{-1})}{z \hat{B}(z^{-1}) z^{-d} \hat{F}(z^{-1}) + \frac{r}{\hat{b}_1} \hat{D}(z^{-1})}, \quad (25.2-4)$$

где

$$\hat{D}(z^{-1}) = \hat{F}(z^{-1}) \hat{A}(z^{-1}) + z^{-(d+1)} \hat{L}(z^{-1}). \quad (25.2-5)$$

Коэффициенты f_i и l_i определяются на основе рекуррентной формулы [25.16]

$$f_0 = 1,$$

$$f_i = d_i - \sum_{p=0}^{i-1} f_p a_{i-p}, \quad i = 1, \dots, d;$$

$$l_i = d_{i+d+1} - \sum_{p=0}^d a_{i+d+1-p} f_p, \quad i = 0, \dots, m-1$$

$$(a_i = d_i = 0 \text{ для } i \geq m+1).$$

Порядки полиномов равны

$$\left. \begin{aligned} v &= \max[m_d, m_a] - 1 \\ \mu &= \max[m_b - 1, m_d] \end{aligned} \right\} d = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \max[m_d - d - 1, m_a - 1] \\ \mu &= \max[m_b + d - 1, m_d] \end{aligned} \right\} d \geq 1.$$

Для $d=0$ из второго условия идентифицируемости следует

$$\max [m_d - m_b, m_d - m_a - 1] \geq p, \quad (25.2-6)$$

и для $d \geq 1$

$$\max [d - 1, m_d - m_b, m_d - m_a + d - 1] \geq p. \quad (25.2-7)$$

При неточной настройке регулятора

$$G_{id} = \frac{D}{\hat{D} \left[zB + \frac{r}{b_1} A \right] + z\hat{F} [A\hat{B} - B\hat{A}]}. \quad (25.2-8)$$

Обычно в этом случае общих корней не возникает ($p=0$) и условие идентифицируемости удовлетворяется при $m_d \geq m_b$ или $m_d \geq m_a + 1$ для $d=0$ или $d \geq 1$ соответственно. Однако если рассматривать регулятор с точной подстройкой под объект управления, т. е. $\hat{A} = A$, $\hat{B} = B$, $\hat{D} = D$, то из уравнения (25.2-8) получим

$$G_{id} = \frac{D}{D \left[zB + \frac{r}{b_1} A \right]}. \quad (25.2-9)$$

При этом возникает $p = m_d$ общих корней, и объект становится неидентифицируемым при $d=0$. При $d \geq 1$ уравнение (25.2-7) принимает вид

$$\max [d - 1, m_d - m_a + d - 1] \geq m_d. \quad (25.2-10)$$

Отсюда следуют окончательные требования

$$d \geq m_d + 1 \text{ или } d \geq m_a + 1, \quad (25.2-11)$$

которые удовлетворяются только при относительно большом запаздывании. Полагая $r=0$, получим регулятор РМД4-з (см. (14.2-13))

$$G_R(z) = \frac{\hat{L}(z^{-1})}{z\hat{B}(z^{-1})\hat{F}(z^{-1})}. \quad (25.2-12)$$

Для $d=0$ идентифицируемость в случае неточной настройки имеет место при $m_d \geq m_a + 1$, для $d \geq 1$ — при произвольном соотношении порядков. В случае точной настройки ($p = m_d$) при $r=0$ появляются общие корни (см. 25.2-9) и для $d=0$ объект становится неидентифицируемым. Для $d \geq 1$ снова должно выполняться условие

$$d \geq m_d + 1 \text{ или } d \geq m_a + 1. \quad (25.2-13)$$

Если РМД-регуляторы дополняются пропорциональным и интегральным членом (14.3-3), порядки ν и μ возрастают на единицу и объект управления становится идентифицируемым при тех же условиях, что и для неточно настроенных регуляторов РМД3-з и РМД4-з.

25.2.3. Регуляторы с оптимизируемыми параметрами

Регулятор с дискретной передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e_w(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_v z^{-v}}{1 - z^{-1}} \quad (25.2-14)$$

удовлетворяет условию идентифицируемости (24.2-12), если его порядок связан с параметрами объекта управления неравенством $v \geq m_a - d$ и в уравнении (24.1-15) отсутствуют общие корни. Следовательно, ПИД-регуляторы пригодны для работы с объектами, у которых $m_a \leq 2 + d$. Если объект управления не обладает запаздыванием, его максимально допустимый порядок равен двум. Для объектов управления более высокого порядка можно увеличить такт квантования настолько, чтобы коэффициенты при старших степенях стали близкими к нулю, и тем самым получить модель второго порядка (см. табл. 3.7.1). Небольшие временные задержки аппроксимируются с помощью запаздывания d . Следовательно, некоторые типы объектов управления могут быть описаны с помощью моделей второго порядка $m=2$ и элемента запаздывания $d=0, 1, 2, \dots$. Существуют различные способы расчета ПИД-регуляторов в качестве регуляторов с подстраиваемыми параметрами.

а) Расчет по заданному расположению полюсов

Вид передаточной функции относительно задающей входной переменной приводился в уравнении (11.1-3). При $m=2$ и $d=0, 1, 2, \dots$ соответствующее характеристическое уравнение запишется в виде

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d} = 0$$

или

$$(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})z^{-d} = 0 \\ = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_{4+d} z^{-(4+d)} = 0, \quad (25.2-15)$$

где коэффициенты α_i определяются следующим образом:

$$d = 0: \\ \alpha_1 = -1 + a_1 + q_0 b_1, \\ \alpha_2 = a_2 - a_1 + q_0 b_2 + q_1 b_1, \\ \alpha_3 = -a_2 + q_1 b_2 + q_2 b_1, \\ \alpha_4 = q_2 b_2.$$

$$d = 1: \\ \alpha_1 = a_1 - 1, \\ \alpha_2 = a_2 - a_1 + q_0 b_1, \\ \alpha_3 = -a_2 + q_0 b_2 + q_1 b_1, \\ \alpha_4 = q_1 b_2 + q_2 b_1, \\ \alpha_5 = q_2 b_2.$$

Поскольку для определения трех коэффициентов регулятора имеются четыре уравнения, необходимо задать только три коэффициента характеристического уравнения. Эти коэффициенты в свою очередь определяются заданными полюсами замкнутой системы (см. уравнения (11.1-14), (11.1-15)). А коэффициенты регулятора вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$d = 0:$$

$$q_0 = \frac{1}{b_1} (\alpha_1 - a_1 + 1),$$

$$q_1 = \frac{1}{b_1} (\alpha_2 - a_2 + a_1 - q_0 b_2),$$

$$q_2 = \frac{1}{b_1} (\alpha_3 + a_2 - q_1 b_2) \text{ или } q_2 = \frac{\alpha_4}{b_2}.$$

$$d = 1:$$

$$q_0 = \frac{1}{b_1} (\alpha_2 - a_2 + a_1),$$

$$q_1 = \frac{1}{b_1} (\alpha_3 + a_2 - q_0 b_2),$$

$$q_2 = \frac{1}{b_1} (\alpha_4 - q_1 b_2) \text{ или } q_2 = \frac{\alpha_5}{b_2}.$$

Параметр регулятора q_0 может быть определен с помощью формулы (7.2-13)

$$q_0 = \frac{1}{(1 - a_1)(b_1 + b_2)},$$

и остается вычислить только величины q_1 и q_2 . Здесь следует отметить, что результаты расчета, конечно, зависят от правильного задания полюсов.

б) Расчет путем аппроксимации аperiodического регулятора

Поскольку аperiodический регулятор повышенного порядка AP ($v+1$) легко поддается расчету и во многих случаях при выборе $q_0 = \frac{1}{(1+a_1)\Sigma b_i}$ обеспечивает хорошее качество управления, быстрый расчет ПИД-регулятора в дискретной передаточной функцией

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e_w(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (25.2-16)$$

может быть осуществлен с помощью аппроксимации передаточной функции регулятора AP ($v+1$) (см. уравнения (7.2-11) и (7.2-14)).

$$G_R^*(z) = \frac{u^*(z)}{e_w^*(z)} = \frac{q_0^* + q_1^* z^{-1} + \dots + q_{m+1}^* z^{-(m+1)}}{1 - p_1^* z^{-(d+1)} \dots - p_{m+d+1}^* z^{-(m+1+1)}} \quad (25.2-17)$$

для $k=0$ и $k \rightarrow \infty$ (см. рис. 5.2.2 и 7.2.2). Реакция регулятора АР ($v+1$) на ступенчатое входное воздействие определяется из соотношения

$$u^*(k) = \sum_{j=1}^{m+1} p_{j+d}^* u^*(k-d-j) + \sum_{j=0}^{m+1} q_j e(k-j) \quad (25.2-18)$$

для $k=0, 1, 2, \dots$, полагая, что при $k < 0$ $u^*(k)=0$ и $e_w(k)=0$. С учетом уравнения (7.2-13) отсюда следует

$$u(0) = q_0^* = \frac{1}{(1-a_1) \sum b_1}. \quad (25.2-19)$$

Поведение регулятора при больших k определяется рекуррентно с помощью уравнения (25.2-18). Приращение δ выходного сигнала регулятора за такт квантования T_0 определяется соотношением

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} [u^*(k) - u^*(k-1)], \quad (25.2-20)$$

из которого для достаточно больших значений M , например $M = 4(m+d)$, следует, что

$$\delta \approx u^*(M) - u^*(M-1)$$

или

$$\delta \approx \frac{1}{\xi} [u^*(M) - u^*(M-\xi)]. \quad (25.2-21)$$

С другой стороны, это приращение можно найти для $k > m+d$, последовательно применяя соотношение

$$\delta \approx \Delta u^*(k) = u^*(k) - u^*(k-1) \quad (25.2-22)$$

до тех пор, пока не выполняется условие

$$\Delta u^*(k) - \Delta u^*(k-1) < \varepsilon u^*(k), \quad (25.2-23)$$

где ε полагается равным, например, 0,02. Используя уравнение (25.2-17) для $i=1, 2, \dots, m$, определим приращение δ явным образом:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} [u(k) - u(k-1)] = \frac{\sum a_1}{[d+1 - q_0^* \sum b_1] \sum b_1 + \sum_1 b_1}. \quad (25.2-24)$$

Тогда для определения параметров ПИД-регулятора типа ЗПР-2 получим следующие выражения (см. рис. 5.2.2):

$$а) \quad q_0 = q_0^*; \quad (25.2-25)$$

$$б) \quad q_0 - q_2 = u^*(M) - M\delta, \\ q_2 = q_0 - [u^*(M) - M\delta]; \quad (25.2-26)$$

$$в) \quad q_0 + q_1 + q_2 = \delta, \\ q_1 = \delta - q_0 - q_2. \quad (25.2-27)$$

Указанный метод расчета ПИД-регулятора не представляет сложности. Однако он применим лишь в том случае, когда запаздывание d у объекта управления либо отсутствует, либо мало.

25.2.4. Линейные регуляторы, обеспечивающие заданное расположение полюсов

В разд. 11.1.1 показано, что для заданного набора полюсов параметры регулятора могут быть однозначно определены из уравнения (11.1-21), если полиномы его знаменателя и числителя имеют порядки $\nu = m_a$ и $\mu = m_b + d$ соответственно. Второе условие идентифицируемости удовлетворяется при $d \geq 0$, если в уравнении (24.1-15) не происходит сокращения корней. Недостатком регулятора является относительно большой объем вычислений.

25.2.5. Регуляторы состояния

При выводе условий идентифицируемости в гл. 24 были рассмотрены регуляторы с управлением по входу/выходу. Эти результаты применимы при рассмотрении регуляторов, использующих для управления переменные состояния, с наблюдателями или оцениванием вектора состояния, если алгоритмы управления могут быть представлены в виде связи входных и выходных сигналов (см. разд. 8.7). В соответствии с (8.7-19) характеристическое уравнение имеет порядок $l \geq 2m$. Поэтому второе условие идентифицируемости выполняется при отсутствии в уравнении $D(z^{-1}) = 0$ общих корней со знаменателем модели объекта. Регулятор с управлением по состоянию может быть рассчитан с помощью методов, обеспечивающих желаемое расположение полюсов или на основе рекуррентного решения матричного уравнения Риккати, достигаемого за несколько итераций (см. разд. 8.1).

В табл. 25.2.1 представлены сравнительные характеристики различных алгоритмов управления. В табл. 25.2.2 даны оценки вычислительных затрат и необходимого объема памяти.

25.3. СОЧЕТАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ (СЛУЧАЙ СКАЛЯРНЫХ ВХОДА И ВЫХОДА)

Синтез алгоритмов управления с подстройкой параметров осуществляется на основе методов оценивания параметров, описанных в гл. 23 и 24, а также алгоритмов управления, рассмотренных в разд. 25.2. Для сходимости процесса адаптации необходимо, чтобы алгоритмы оценивания параметров обеспечивали идентификацию параметров замкнутого контура управления, а алгоритмы управления удовлетворяли условию идентифицируемости этого контура. В разд. 25.1 раскрыты широкие возможности для создания различных сочетаний алгоритмов идентификации и уп-

Таблица 25.2.1

Характеристики алгоритмов управления с точки зрения их использования для адаптивного управления

Тип регулятора	Второе условие идентификации — возможность замкнутого контура	Вычислительные затраты		Условие возникновения неустойчивости ¹⁾	Возможности применения в адаптивных системах управления
		вычисление параметров	реализация управления		
Апериодические регуляторы AP (ν), AP ($\nu+1$)	Выполняется	Очень малые	Средние	$A^-(z) = 0$	Применим для асимптотически устойчивых объектов управления
Регулятор с мин. дисперсией РМД3-з	$d \geq m_d + 1$	Малые	»	$D^-(z) = 0$	Применим при наличии случайных возмущений
Регулятор с мин. дисперсией РМД4-з	$d \geq m_d + 1$	»	»	$B^-(z) = 0$ $D^-(z) = 0$	Применим для объектов управления с нулями внутри единичного круга и при наличии случайных возмущений
Регулятор с оптимизируемыми параметрами ИП- j	$\nu \geq m_a - d$	Средние	Малые ($\nu = 2$)	—	Применим при корректности метода синтеза
Линейный регулятор ЛРП	$\nu = m_a$ $\mu = m_b + d$	Большие	Средние	—	Применим при возможности обеспечить заданное расхождение полюсов
Регулятор по состоянию с наблюдением	Выполняется	Средние или большие	Большие	—	Применим при отсутствии ограничений на объем вычисления

1) См. табл. 11.1.1.1. и 14.1.1.1.

Таблица 25.2.2

**Вычислительные затраты и требования к объему памяти
для различных алгоритмов управления [25.16]**

Алгоритм управления	Вычисление параметров регулятора		Реализация алгоритма управления	
	количество предложений ФОРТРАНА	объем памяти, бит	количество алгебраических операций	количество операций пересылок
АР (v)	12	171	$4m + 2$	$2m + d$
АР ($v + 1$)	19	328	$4m + 6$	$2m + d + 2$
РМД4	32	508	$4m + 2d + 2$	$2m + d + 2$
РМД3	39	612	$\max [4m, 4m + 2d - 2]$	$\max [2m - 1, 2m + 2d - 2]$
ЗПР-2	34	631	8	3 [см. (25.2-23) — (25.2-27)]
ЛРП	78	1187	$4m + 2d - 2$	$2m + d$

равления. Так, например, использование принципа разделения приводит к адаптивным стохастически эквивалентным регуляторам или к регуляторам с пониженной чувствительностью. Применение принципа дуальности в свою очередь приводит к дуальным адаптивным регуляторам.

25.3.1. Стохастически эквивалентные регуляторы с подстройкой параметров

В этом разделе рассматриваются алгоритмы управления с подстройкой параметров, основанные на *принципе стохастической эквивалентности* и не нуждающиеся для сходимости во внешних возмущающих воздействиях. На основании изложенного в предыдущих главах, помимо алгоритмов оценивания и управления в систему необходимо включать дополнительные алгоритмы для оценивания постоянной составляющей сигналов и компенсации смещения. Таким образом, регуляторы с подстройкой параметров, использующие принцип стохастической эквивалентности, состоят (на данном этапе) из следующих алгоритмов:

- 1) рекуррентного оценивания параметров $\rightarrow \hat{\theta}(k)$;
- 2) оценивания постоянной составляющей сигналов $\rightarrow U_{00}(k)$, $Y_{00}(k)$;
- 3) управления $\rightarrow u(k+1) = f[y(k), w(k); \hat{\theta}(k)]$;
- 4) компенсации смещения, если $\lim_{k \rightarrow \infty} e_w(k) \neq 0$.

Как было показано в предыдущей главе, для *рекуррентного оценивания параметров* замкнутых контуров управления в наибольшей степени пригодны:

- рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК);
- рекуррентный обобщенный метод наименьших квадратов (РОМНК);
- рекуррентный метод максимального правдоподобия (РММП).

Они могут быть объединены с *алгоритмами управления*, реализованными в виде следующих регуляторов:

- аperiodического регулятора AP (v), AP ($v+1$);
- регулятора с минимальной дисперсией РМДЗ, РМД4;
- регулятора с оптимизируемыми параметрами iПР-j;
- обычного линейного регулятора, обеспечивающего заданное расположение полюсов, ЛРП;
- регулятора состояния РС.

Для определения постоянных составляющих U_{00} и Y_{00} могут быть использованы методы, рассмотренные в разд. 23.2. Предполагая, что на контур управления воздействуют только случайные возмущения с математическим ожиданием $E\{v(k)\}=0$, U_{00} и Y_{00} могут быть получены простым усреднением (метод 2 в разд. 23.2) перед началом работы адаптивной системы управления. Регуляторы, минимизирующие дисперсию, и регуляторы с управлением по состоянию не требуют дополнительных средств для компенсации смещения, так как последнее отсутствует. Однако, если возмущения имеют ненулевые средние (как бывает в большинстве случаев) и имеют место изменения задающей переменной $w(k)$, следует учитывать величину постоянной составляющей, и для регуляторов, минимизирующих дисперсию, а также регуляторов с управлением по состоянию, не обладающих астатизмом, необходимо рассматривать задачу *компенсации смещения*. Простейшим способом решения этой проблемы является использование при оценивании параметров разностей первого порядка $\Delta u(k)$ и $\Delta y(k)$ (метод 1 в разд. 23.2). Смещение может быть исключено введением в модель оцениваемого процесса дополнительного полюса в точке $z_1=1$ путем добавления множителя $\beta/(z-1)$ и последующим расчетом регулятора для расширенной модели. Это тем не менее приводит к возникновению смещения при постоянных возмущающих воздействиях на входе объекта управления и не позволяет обеспечить наилучшее качество управления. Другая возможность заключается в замене $y(k)$ на $[y(k)-w(k)]$ и $u(k)$ на $\Delta u(k)=u(k)-u(k-1)$ как при оценивании параметров, так и в алгоритме управления [25.9]. Однако это приводит к ненужным изменениям оценок параметров при изменении уставок и, следовательно, к отрицательному влиянию на переходный процесс. Относительно хорошие результаты были получены при оценивании константы (метод 3 в разд. 23.2). Полагая $Y_{00}=w(k)$, можно легко вычислить постоянную составляющую U_{00} таким образом, чтобы смещение не возникало. Затем можно непосредственно использовать регулятор, не обладающий интегрирующими свойствами.

На выбор соответствующих комбинаций методов (1), (2), (3) и (4) влияют главным образом следующие свойства результирующих алгоритмов управления с подстройкой параметров:

- устойчивость системы управления с подстраиваемыми параметрами;
- сходимость и поведение управления вблизи установившегося состояния (асимптотическое поведение);
- сходимость и поведение управления в переходном процессе (короткопериодическое поведение);
- вычислительные затраты.

а) Устойчивость

Как правило, системы управления с подстройкой параметров являются нелинейными, нестационарными и стохастическими. Поэтому очень сложно получить общие критерии устойчивости. Однако следующие два условия устойчивости являются очевидными: *Первое условие устойчивости (необходимое)*

Замкнутый контур с точно настроенным фиксированным регулятором является устойчивым.

Второе условие устойчивости (достаточное)

Все оценки параметров, требуемые для синтеза алгоритмов управления, должны сходиться к их истинным значениям.

Чтобы обеспечить первое условие, необходимо учитывать задачу компенсации нулей и полюсов, решение которой зависит от структуры объекта управления и регулятора. В табл. 25.2.1 приведены объекты управления и регуляторы, которые не следует объединять из-за возникновения неустойчивости.

Что касается второго условия устойчивости, то здесь возможны следующие комбинации. Так как алгоритм РМНК идентифицирует только модель объекта управления (в виде отношения полиномов В/А), выбор регулятора в первую очередь ограничен такими типами детерминированных регуляторов, как АР, iПР-j, ЛРП, РС. Алгоритмы РОМНК и РММП позволяют идентифицировать как модель объекта управления В/А, так и модель шума Д/А. Следовательно, совместно с ними могут быть использованы стохастические регуляторы типа РМД.

Однако РОМНК и РММП могут также быть объединены с детерминированными регуляторами, а РМНК — со стохастическими регуляторами, если $D(z^{-1})=1$ и замкнутый контур управления устойчив. Поэтому, основываясь на структурах моделей объекта управления и шума, можно рассматривать всевозможные комбинации алгоритмов, используя их соответствующие модификации.

Требуемая сходимость к истинным значениям параметров означает, что

- выполнено условие идентифицируемости замкнутого контура управления;
- оценки параметров являются состоятельными оценками.

Для анализа условий идентифицируемости замкнутого контура управления рассмотрим два типа внешних воздействий.

Пусть на систему действует стационарное случайное возмущение $v(k)$. Допустим, что объект управления и фильтр шума описываются уравнением

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(z), \quad (25.3-1)$$

точно известны порядки m и d , коэффициент значимости оценки $\lambda=1$ и что задающее воздействие $w(k)=0$. Для рассматриваемого случая подходят регуляторы РМДЗ и РМД4, минимизирующие дисперсию. Во время переходного процесса, когда регулятор еще не подстроился к объекту управления и его параметры предполагаются кусочно-постоянными, второе условие идентифицируемости

$$\max [\mu - m_b, \nu + d - m_a] \geq p \quad (24.1-14)$$

выполняется при $m_a = m_b = m_d = m$, если $d \geq 0$, для алгоритма РМДЗ и, если $d \geq 1$, для алгоритма РМД4, поскольку $p=0$ (см. уравнения (25.2-6), (25.2-7)). В гл. 24 показано, что условие идентифицируемости замкнутого контура управления выполняется для любого регулятора с нестационарными параметрами. Поэтому в обоих рассмотренных случаях оценки параметров сходятся при возрастании k к истинным значениям параметров

$$\hat{A}(z^{-1}) \rightarrow A(z^{-1}),$$

$$\hat{B}(z^{-1}) \rightarrow B(z^{-1}),$$

$$\hat{D}(z^{-1}) \rightarrow D(z^{-1}).$$

Однако если алгоритм управления становится точно настроенным, то в уравнениях (24.1-15) или (25.2-9) появляются $p=m_d$ общих корней и условие идентифицируемости, описываемое уравнением (24.1-14), нарушается. Это означает, что не существует единственного решения задачи оценивания (при возобновлении процедуры получения оценки). Тем не менее при $k \rightarrow \infty$ оценки сходятся:

$$\hat{A}(z^{-1}) = A(z^{-1}),$$

$$\hat{B}(z^{-1}) = B(z^{-1}),$$

$$\hat{D}(z^{-1}) = D(z^{-1}),$$

что является общим решением и в процессе настройки при $0 < k < \infty$, и для точно настроенного регулятора при $k = \infty$. Поэтому алгоритмы управления с подстройкой параметров, основанные на сочетании рекуррентного обобщенного метода наименьших квадратов

(РОМНК) или рекуррентного метода максимального правдоподобия (РММП) с алгоритмами управления, минимизирующими дисперсию РМДЗ ($d \geq 0$) и РМД4 ($d \geq 1$), могут сходиться к точным значениям параметров регулятора при выполнении менее жесткого условия идентифицируемости [25.16]

$$\max [\mu - m_b, \nu + d - m_a] \geq 0. \quad (25.3-2)$$

Условие идентифицируемости (24.1-14) остается справедливым для регуляторов с фиксированными параметрами. Эти свойства сходимости оценок показаны на рис. 25.3.1. Оценки параметров замкнутого контура для алгоритма управления с точно настроенными и зафиксированными параметрами не сходятся, в то время как для алгоритма с подстройкой параметров имеет место хорошая сходимость.

В работе [25.16] показано, что для комбинации РОМНК или РММП с РМДЗ точная настройка регулятора достигается при $d=0$. Применение метода РМНК для оценивания параметров объекта управления, описываемого уравнением (25.3-1), дает смещенные оценки и не позволяет обеспечить точные настройки регуляторов РМДЗ или АР. Однако сочетание РМНК и РМД4 обеспечивает точную настройку регулятора РМД4 [25.8]. Это означает, что второе условие устойчивости является лишь достаточным.

Рассмотрим случай, когда изменяется *задающее воздействие* $w(k)$, а шум отсутствует ($v(k)=0$). Объект управления описывается уравнением

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z). \quad (25.3-3)$$

В дальнейшем будем полагать, что порядки m и d точно известны, коэффициент значимости оценки $\lambda=1$, а задающая переменная $w(k)$ (детерминированная или стохастическая) является сигналом возбуждения, описываемым функцией порядка $n \geq m$. Поскольку задающая переменная $w(k)$ может рассматриваться как возмущение, действующее на объект управления извне относительно измерений $u(k)$ и $y(k)$, то второе условие идентифицируемости в этом случае нарушается (см. разд. 24.2). Однако при правильном использовании методов оценивания, например РОМНК, РММП или РМНК, оценки параметров при $k \rightarrow \infty$ сходятся к истинным значениям

$$\begin{aligned} \hat{A}(z^{-1}) &= A(z^{-1}), \\ \hat{B}(z^{-1}) &= B(z^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, сочетание с любым регулятором, проектируемым с использованием параметров $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$, обеспечивает сходимость параметров последнего к своим точным значениям. Оценивание коэффициентов $D(z^{-1})$ с помощью РОМНК и РММП дает произвольное значение оценок из-за отсутствия возбуждения

фильтра шума. Поэтому алгоритмы управления с минимизацией дисперсии могут применяться только при фиксированном полиноме $D(z^{-1})$. Если $D(z^{-1})=1$, то вместо РОМНК и РММП следует использовать РМНК.

При воздействии на адаптивную систему изменений как задающего воздействия $w(k)$, так и случайного возмущения $v(k)$ сочетание соответствующих методов оценивания (РОМНК и РММП)

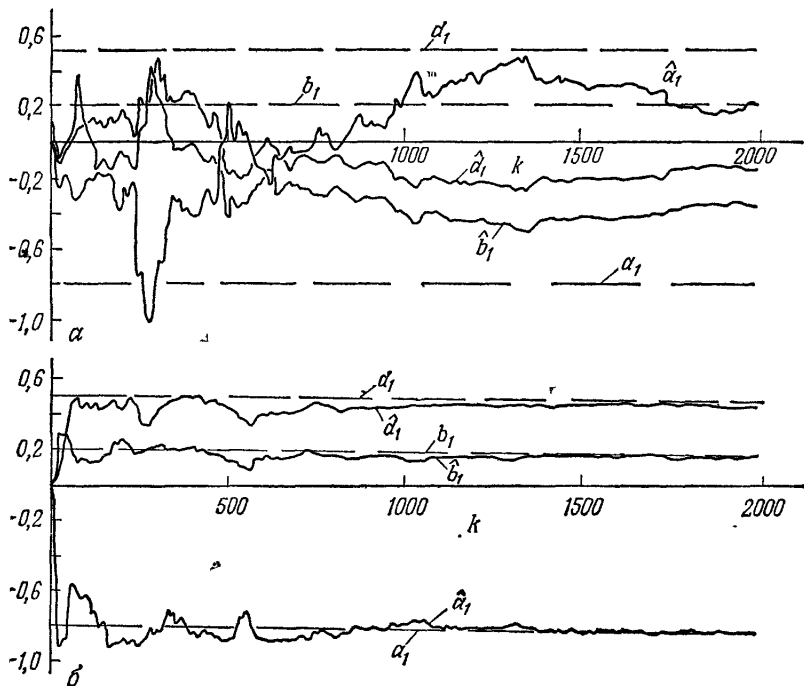


Рис. 25.3.1. Процесс получения оценок параметров объекта первого порядка ($a_1=-0,8$; $b_1=0,2$; $d_1=0,5$) в замкнутом контуре управления с помощью РММП: a — для точно настроенного регулятора РМДЗ ($r=0,05$) с фиксированными параметрами; b — для регулятора с подстраиваемыми параметрами РММП/РМДЗ ($\lambda_0=0,99$; $\lambda(0)=0,95$; $r=0,05$)

с любым типом регулятора обеспечивает возможность его точной настройки, так как при этом выполняется условие идентифицируемости замкнутого контура управления и оценки параметров не имеют смещения. Для получения состоятельных оценок параметров необходимо использовать соответствующие методы оценивания, а также обеспечивать выполнение сформулированных в гл. 23 условий сходимости. В соответствии с этими условиями сигнал управления должен обладать достаточными возбуждающими свойствами (возбуждать все собственные движения объекта управления).

На основании изложенного могут быть рекомендованы следующие комбинации методов оценивания параметров и алгоритмов управления.

При случайных возмущениях $v(k)$:

РОМНК, РММП/РМДЗ, РМД4; РМНК/РМД4.

При случайном или детерминированном задающем воздействии $w(k)$:

РМНК/АР, iПР-j, ЛРП, РС, РМД (РМДЗ ИЛИ РМД4, если $D(z^{-1})=1$).

Всестороннее моделирование и исследование с реальными объектами управления показали, что алгоритмы управления с подстройкой параметров устойчивы при выполнении перечисленных выше условий. Это может быть объяснено эвристически. Предположим, что модель объекта управления неверна, так что полюса замкнутого контура управления сдвинуты к границе устойчивости. При этом амплитуда входного сигнала объекта управления увеличивается. Если предположить, что изменения входного воздействия возбуждают все m собственных движений объекта управления (см. гл. 23.2) и имеют достаточную амплитуду по сравнению с действующим шумом, то идентифицируемая модель уточняется. Вслед за этим также уточняются параметры регулятора и улучшаются характеристики замкнутого контура в целом. Входной сигнал будет обладать требуемыми свойствами, если он содержит m гармоник или его автокорреляционные функции связаны соотношением $\phi_{uu}(0) > \phi_{uu}(1) > \dots > \phi_{uu}(m)$. Даже если входной сигнал возбуждает все собственные движения объекта управления кратко-временно, этого может быть достаточно для улучшения модели объекта управления. Изложенные результаты получены с помощью моделирования и эксперимента и не могут служить общим доказательством устойчивости. Поэтому получение новых условий глобальной устойчивости адаптивных систем управления с подстройкой параметров вносит свой вклад в решение общей проблемы. Обзор материалов по этой тематике дается в работе [25.12]. В следующем разделе приводятся некоторые общие условия для сочетаний РМНК, РОМНК, РММП с регуляторами РМД при случайных возмущениях. Эти условия базируются на анализе рекуррентных методов оценивания параметров. Дальнейшие ссылки делаются на работу [25.20].

б) Сходимость и поведение управления вблизи установившегося состояния

Сходимость к установившемуся состоянию связана с асимптотической устойчивостью. Если параметры подстраиваемого регулятора сходятся к фиксированным значениям, то поведение управления вблизи установившегося состояния приблизительно известно. Анализ асимптотического поведения вблизи установившегося со-

стояния может быть проведен в настоящее время лишь для отдельных сочетаний алгоритмов оценивания и управления (см. разд. 25.3.2).

в) Качество управления и сходимость в процессе настройки

Начальная сходимость подстройки зависит от алгоритма оценивания параметров, алгоритма управления, начальных оценок для рекуррентной процедуры оценивания, а также характеристик внешних сигналов. В настоящее время единственным целесообразным способом исследования характеристик сходимости является моделирование (см. разд. 25.4).

г) Вычислительные затраты

Объем памяти вычислительного устройства, необходимый для реализации адаптивных законов управления, определяется главным образом алгоритмом оценивания параметров (табл. 23.8.1) и алгоритмом расчета параметров регулятора (табл. 25.2.2). Время выполнения расчетов с использованием стандартной 16-разрядной управляющей ЭВМ и программы на языке Фортран составляет от 10 до 200 мкс. Для 8-разрядной микро-ЭВМ, программируемой на ассемблере, это время составляет около 500 мкс.

В следующем разделе более детально рассматриваются отдельные алгоритмы управления с подстройкой параметров.

25.3.2. Стохастические регуляторы с подстройкой параметров

РМК/РМД4

Этот регулятор был предложен одним из первых [25.7—25.9]. Предполагается, что для модели объекта управления $D(z^{-1})=1$. Следовательно,

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = v(z) \quad (25.3-4)$$

и соответствующий регулятор с минимальной дисперсией РМД4-з, описанный уравнениями (14.2-13) или (25.2-12), имеет следующую передаточную функцию:

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{y(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = - \frac{\hat{L}(z^{-1})}{z^d \hat{B}(z^{-1}) \hat{F}(z^{-1})}. \quad (25.3-5)$$

Коэффициенты полиномов $\hat{L}(z^{-1})$ и $\hat{F}(z^{-1})$ определяются из соотношений (14.2-5) ÷ (14.2-7) путем сравнения с коэффициентами уравнения

$$1 = F(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-(d+1)}L(z^{-1}), \quad (25.3-6)$$

как это было сделано в примере 14.2.1, но при $d_1, \dots, d_m=0$. Для $d \geq 1$ из уравнения (25.2-13) при $m_d=0$ следует, что пара-

метры объекта управления идентифицируемы. Это видно также из следующих рассуждений. В соответствии с уравнениями (24.1-5), (24.1-14) и при $p = m_d$ (разд. 25.2.2) число параметров j , которое может быть оценено, равно

$$j = 1 - p = \max [m_a + \mu; m_b + v + d] - m_d = \max [m_a + m_b - m_d + d - 1; m_b - 1] \quad (25.3-7)$$

и для $m_d = 0$

$$j = m_a + m_b + d - 1. \quad (25.3-8)$$

При использовании алгоритма РМНК для $d \geq 1$ могут быть получены оценки всех $m_a + m_b$ параметров. Если $d = 0$, следует допустить, что один параметр известен.

Для упрощения вычислений коэффициентов уравнения (25.3-6) производится оценивание параметров видоизмененной модели [25.8], [25.9]. Умножим уравнение (25.3-4) на полином $F(z^{-1})$:

$$FAy - BFz^{-d}u = Fv. \quad (25.3-9)$$

Подставляя (25.3-9) в (25.3-6), будем иметь

$$y(z) = L(z^{-1})z^{-(d+1)}y(z) + B(z^{-1})F(z^{-1})z^{-d}u(z) + F(z^{-1})v(z). \quad (25.3-10)$$

Перепишем (25.3-10) с учетом (25.3-5):

$$y(z) = -Q(z^{-1})z^{-(d+1)}y(z) + P(z^{-1})z^{-(d+1)}u(z) + F(z^{-1})v(z). \quad (25.3-11)$$

Полученная модифицированная модель содержит параметры регулятора q_i и p_i , оценки которых можно непосредственно получить с помощью РМНК. С этой целью уравнение (25.3-11) перепишем в виде разностного уравнения с $v = m_a - 1$ и $\mu = m_b + d - 1$:

$$y(k) = -q_0 y(k-d-1) - \dots - q_v y(k-d-m_a) + p_0 u(k-d-1) + \dots + p_\mu u(k-m_b) + \varepsilon(k-d-1), \quad (25.3-12)$$

где $\varepsilon(z) = F(z^{-1})v(z)$ является процессом скользящего среднего порядка d . Требуется получить оценки $m_a + m_b + d$ параметров, так как уравнение (25.3-12) содержит m_a параметров q_i и $m_b + d$ параметров p_i . По сравнению с моделью, описываемой уравнением (25.3-4), для которой требуется оценивать $m_a + m_b$ параметров, в модели (25.3-12) надо оценивать на d параметров больше. Но так как здесь возможно получить оценки только для $m_a + m_b + d - 1$ параметров, один параметр следует считать известным. Например, будем считать, что $p_0 = b_1$. Отсюда следует

$$y(k) = \psi^T(k-d)\theta + p_0 u(k-d-1) + \varepsilon(k-d-1), \quad (25.3-13)$$

где

$$\theta = [q_0 \dots q_v p_1, \dots, p_\mu], \quad (25.3-14)$$

$$\psi^T(k-d) = [-y(k-d-1) \dots -y(k-d-m_a) p_0 u(k-d-2) \dots p_0 u(k-m_b)]. \quad (25.3-15)$$

Применяя метод РМНК к уравнению (25.3-15), будем иметь

$$\hat{\theta}(k+1) = \theta(k) + \gamma(k) [y(k+1) - p_0 u(k-d) - \psi^T(k-d+1) \hat{\theta}(k)]. \quad (25.3-16)$$

Полученные оценки используются в алгоритме управления (25.3-5), и новый сигнал управления определяется соотношением

$$u(k+1) = \frac{1}{p_0} [\hat{q}_0 y(k+1) + \dots + \hat{q}_v y(k-m_a+2)] - \hat{p}_1 u(k) - \dots - \hat{p}_\mu u(k-m_b-d+2). \quad (25.3-17)$$

Отметим некоторые свойства рассмотренного алгоритма самонастройки:

- Применение метода наименьших квадратов с модифицированной моделью (25.3-11) позволяет получить несмещенные оценки.
- Применение адаптивного алгоритма управления, рассчитанного для $D(z^{-1})=1$, при управлении объектом, у которого

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{m_d} z^{-m_d},$$

приводит к возникновению смещенных оценок. Тем не менее, как показано в работе [25.8], если оценки параметров объекта сходятся, то параметры регулятора (25.3-17) сходятся к оптимальному регулятору с минимальной дисперсией. При этом выходной сигнал $y(k)$ представляет собой процесс со скользящим средним порядка d (см. 14.2-19).

- Точное знание предполагаемого известным параметра $p_0 = b_1$ не является необходимым [25.8, 25.11].
- Регулятор с подстройкой параметров на базе алгоритмов РМНК/РМД4 может быть использован только для объекта, у которого все нули расположены внутри единичной окружности (см. табл. 25.2.1).
- Смещения оценок могут быть исключены введением в регулятор дополнительного полюса $z_1=1$. Это эквивалентно добавлению полюса к объекту управления. При этом в уравнениях (25.3-13) — (25.3-16) $y(k)$ и $u(k)$ заменяются соответственно на

$$e_w(k) = y(k) - w(k)$$

и

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1).$$

Тогда алгоритм управления принимает вид [25.9]

$$\Delta u(k+1) = \frac{1}{p_0} [\hat{q}_0 e_w(k+1) + \dots + \hat{q}_v e_w(k-m_a+2)] - \hat{p}_1 \Delta u(k) - \dots - \hat{p}_\mu \Delta u(k-m_b-d+2), \quad (25.3-18)$$

а сигнал на входе объекта управления вычисляется по формуле

$$u(k+1) = u(k) + \Delta u(k+1). \quad (25.3-19)$$

Характеристики сходимости этого алгоритма самонастройки приведены в работе [25.10]. Преимущество теоретического подхода состоит в том, что результаты анализа сходимости рекуррентного метода оценивания могут быть непосредственно использованы для модифицированной модели ((25.3-11), [23.17]). В работе [25.12] для объекта управления первого порядка показано, что алгоритм РМНК/РМД4 асимптотически устойчив в целом при $0 < \frac{b_1}{p_0} < 2$. Алгоритм РМНК/РМД4 также асимптотически устойчив для случая $d=0$, если величина $H(z) = \frac{1}{D(z)} - \frac{1}{2}$ положительна и действительна [25.17]. Это означает, что $H(z)$ является передаточной функцией, реализованной на чисто пассивных элементах. Другими словами, передаточная функция $H(z)$ должна быть устойчивой и $\operatorname{Re}\{H(z)\} > 0$, где $z^{i\omega T_0}$ и $-\pi < \omega T_0 < \pi$.

Это означает, что $|D(e^{i\omega T_0}) - 1| < 1$, т. е. ошибка, возникающая при допущении $D(z^{-1}) = 1$, имеет частотно-фазовую характеристику внутри единичного круга, и следовательно, не усиливается ни на каких частотах.

РМНК/РМДЗ, РММП/РМДЗ, РОМНК/РМДЗ

Так как в алгоритме РМД4 весовой коэффициент управления не используется, то для многих объектов управления возможны интенсивные колебания сигнала на входе. Как показано в гл. 14, расширенный регулятор с минимальной дисперсией РМДЗ позволяет контролировать управляющее воздействие на объект, а также может быть использован для управления объектом с нулями, расположенными вне окружности единичного радиуса. Сочетание алгоритмов РМНК/РМДЗ предложено в работе [25.13] и исследовано в работах [25.18], [25.19]. Алгоритмы РММП/РМДЗ и РОМНК/РМДЗ исследованы в работе [25.15].

Пример 25.3.1: Уравнения для программы стохастического регулятора с подстройкой параметров.

Типичным примером уравнений, используемых в адаптивных регуляторах, с выделением в отдельные модули процедур оценивания параметров и расчета регулятора, является следующий комплекс уравнений:

1. Вычисление разностей (23.2-25) для исключения постоянных составляющих измеряемых сигналов:

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= U(k) - U(k-1), \\ \Delta y(k) &= Y(k) - Y(k-1), \\ \Delta u(k) &= u(k); \quad \Delta y(k) = y(k).\end{aligned}$$

2. Оценивание параметров (РМНК, РОМНК, РММП) (см. табл. 23.7.1):

а) $e(k) = y(k) - \psi^T(k) \hat{\theta}(k-1)$;

б) $\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma(k-1) e(k)$;

в) занесение $y(k)$ и $u(k-d)$ в вектор $\psi^T(k+1)$;

г) $\gamma(k) = \mu(k+1) P(k) \varphi(k+1)$;

д) $P(k+1) = [I - \gamma(k) \varphi^T(k+1)] P(k) \frac{1}{\lambda}$.

3. Вычисление параметров регулятора (РМДЗ):

Параметры расширенного регулятора с минимальной дисперсией определяются с помощью уравнений (25.2-4) и (25.2-5) (см. пример 14.2.1).

4. Вычисление нового значения управляющей переменной:

- а) новое значение регулируемой переменной: $y(k+1)$;
 б) новое рассогласование управления: $e_w(k+1) = W(k+1) - Y(k+1)$;
 в) новая постоянная составляющая сигнала Y : $Y_{00}(k+1) = W(k+1)$;
 г) новая постоянная составляющая сигнала U : $U_{00}(k+1) =$

$$= \hat{A}(1)/\hat{B}(1) Y_{00}(k+1),$$

$$\hat{A}(1)/\hat{B}(1) Y_{00}(k+1) = \left[\left[1 + \sum_{i=1}^m a_i \right] / \left[\sum_{i=1}^m b_i \right] \right] Y_{00}(k+1);$$

- д) новое значение управляющей переменной: $U(k+1) = U_{00} + u(k-1) + p_1 u(k-2) + \dots + p_{m+d-1} u(k-m-d+1) - q_0 e_w(k) - q_1 e_w(k-1) - \dots - q_{m-1} e_w(k-m+1)$.

5. Организация цикла:

- а) замена $y(k+1)$ на $y(k)$ и $u(k+1)$ на $u(k)$;
 б) возврат к п. 1

Следует заметить, что с целью экономии машинного времени для вычисления управления $u(k+1)$ между пунктами 4а) и 4д) используется предшествующая оценка $\hat{\theta}(k)$.

25.3.3. Детерминированный регулятор с подстройкой параметров

Детерминированные управляющие устройства часто рассчитывают на ступенчатое задающее воздействие (это является очевидным для следящих систем управления). Но такой подход применим и к расчету регуляторов, так как при этом несложно оценить результаты управления. Более того, ступенчатые изменения задающей переменной могут ускорить сходимость процесса адаптации на начальной стадии.

РМНК/АР

Наиболее простой регулятор с подстройкой параметров получается при объединении РМНК с АР(v) или лучше с АР($v+1$). Расчет регуляторов АР очень прост, при этом не возникает никаких проблем с компенсацией смещения. Общий алгоритм адаптации складывается из алгоритмов оценивания параметров, представленных в табл. 23.1, и алгоритмов вычисления параметров регулятора, рассмотренных в гл. 8.

Другими возможными регуляторами указанного типа являются регуляторы РМНК/ЗПР-3, РМНК/РС, РМНК/ЛРП, хотя они требуют большего объема вычислений.

25.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С ПОДСТРОЙКОЙ ПАРАМЕТРОВ

Для сравнения поведения различных алгоритмов управления с подстройкой параметров два метода оценивания параметров были объединены с шестью алгоритмами управления в соответствии с

табл. 25.4.1. Алгоритмы адаптации были запрограммированы на Фортране для управляющей ЭВМ HP21MX [25.15], [25.16] и были испытаны в замкнутом контуре управления с объектом, моделируемым на аналоговом вычислителе. Заранее считались известными порядок \hat{m} и запаздывание \hat{d} модели объекта управления, такт

Таблица 25.4.1

Исследуемые регуляторы с подстройкой параметров

Алгоритмы управления Метод оценивания	Стохастические		Детерминированные			
	РМД4	РМД3	АР (ν)	АР ($\nu+1$)	ЗПР-3	ЛРП
РМНК	X ^{1, 3)}	X ^{1, 3)}	X	X	X	X
РММП	X ³⁾	X ³⁾	X ²⁾	X ²⁾	X ²⁾	X ²⁾

*) При расчете регулятора предполагается $D(z^{-1})=1$.

*) $\hat{D}(z^{-1})$ при расчете регулятора не используется.

*) Для компенсации смещения использован метод 3 (разд. 23.2) вычисления величины постоянной составляющей

квантования T_0 . В зависимости от алгоритма управления должен быть выбран весовой коэффициент управления γ или γ' (РМД3, АР ($\nu+1$), ЗПР-3) или задано желаемое расположение полюсов (ЛРП). Для алгоритмов (РМД4, АР (ν)) определять дополнительные конструктивные параметры не нужно. Далее необходимо выбрать коэффициент значимости оценки λ .

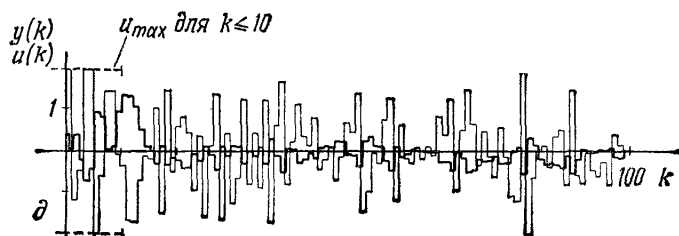
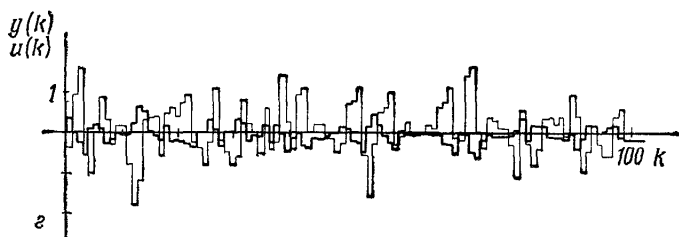
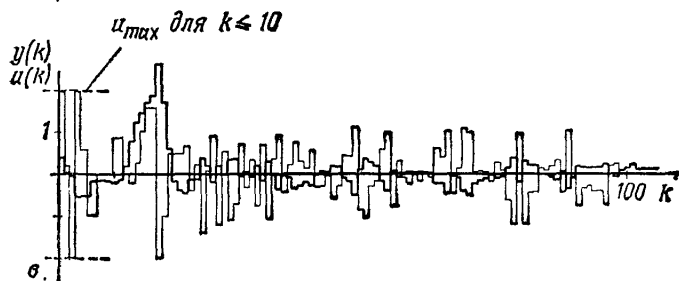
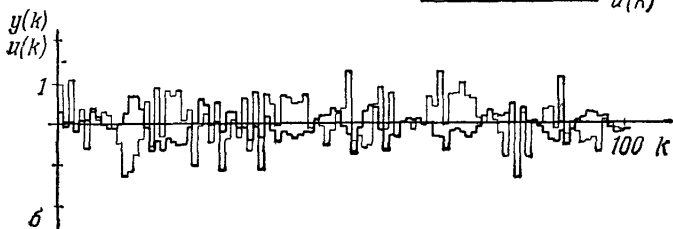
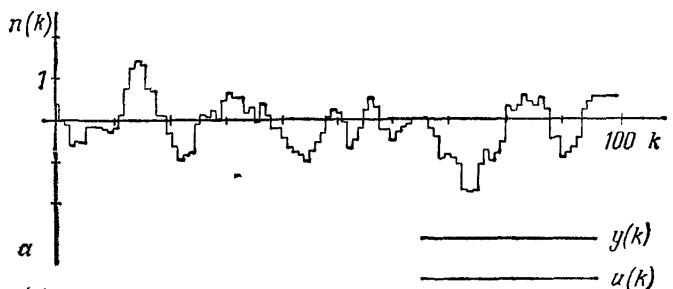
Для начала была взята непрерывная передаточная функция второго порядка (тестовый объект VII, см. приложение)

$$G_P(s) = \frac{1}{(1+3,75s)(1+2,5s)} \quad (25.4-1)$$

Соответствующая дискретная передаточная функция при такте квантования $T_0=2$ с и экстраполяторе нулевого порядка имеет вид

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{0,1387z^{-1} + 0,0889z^{-2}}{1 - 1,036z^{-1} + 0,2636z^{-2}}, \quad (25.4-2)$$

Постоянные составляющие измеряемых сигналов были равны нулю. Второй порядок объекта управления был выбран для того, чтобы получать оценки параметров с хорошей точностью и иметь возможность сравнивать их с истинными значениями. Это трудно сделать для объектов более высокого порядка, даже если входной и выходной сигналы хорошо соответствуют друг другу [23.9].



Случайные возмущения

Коррелированный шум воспроизводился с помощью формирующего фильтра

$$G_{Pv}(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{1 + 0,05z^{-1} + 0,8000z^{-2}}{1 - 1,036z^{-1} + 0,2636z^{-2}}.$$

На рис. 25.4.1 приведены примеры использования двух регуляторов с фиксированными параметрами и двух регуляторов с подстраиваемыми параметрами. Фиксированные регуляторы были рассчитаны для точных значений параметров объекта управления. Для алгоритмов с подстройкой параметров коэффициент значимости оценки λ был выбран равным 0,98. Из анализа приведенных результатов следует, что

- все рассмотренные регуляторы обеспечивают хорошее качество управления;
- приблизительно через двадцать тактов квантования стохастический алгоритм управления с подстройкой параметров РММП/РМДЗ обеспечивает такое же качество управления, как и фиксированный регулятор РМДЗ;
- через 15 тактов квантования отклонения выходного сигнала $y(k)$ даже меньше в случае регулятора РММП/АР (v) по сравнению с фиксированным регулятором АР (v).

Оценки параметров объекта управления $\hat{a}_i(k)$ и $\hat{b}_i(k)$ представлены на рис. 25.4.2. После колебаний в начальной стадии они сходятся приблизительно к истинным значениям. Начальные колебания коэффициента передачи $\hat{K} = \sum \hat{b}_i / (1 + \sum a_i)$ имеют относительно большую амплитуду, и для алгоритма РММП/АР (v) они более продолжительны. Но тем не менее обеспечивается хорошее качество управления.

Исследование динамики всех 12 алгоритмов управления с подстройкой параметров показало [25.16], что после 20 тактов квантования качество управления

- почти такое же, как у точно настроенных *стохастических регуляторов* с фиксированными параметрами (особенно это относится к алгоритмам РМНК/РМД4, РММП/РМД4, РММП/РМДЗ);
- лучше, чем у точно настроенных *детерминированных регуляторов* с фиксированными параметрами (за исключением РМНК/АР ($v+1$)). Это означает, что регуляторы (которые не были рассчитаны для случайных возмущений) лучше настраиваются к случайным сигналам с помощью подстройки.



Рис. 25.4.1. Управляющий $u(k)$ и выходной $y(k)$ сигналы при воздействии случайных возмущений ($y(k)$ показана кусочно-постоянной).

a — при отсутствии управления; b — фиксированный регулятор РМДЗ ($r=0,01$); c — адаптивный регулятор РММП/РМДЗ ($r=0,01$); d — фиксированный регулятор АР(v); e — адаптивный регулятор РММП/АР(v).

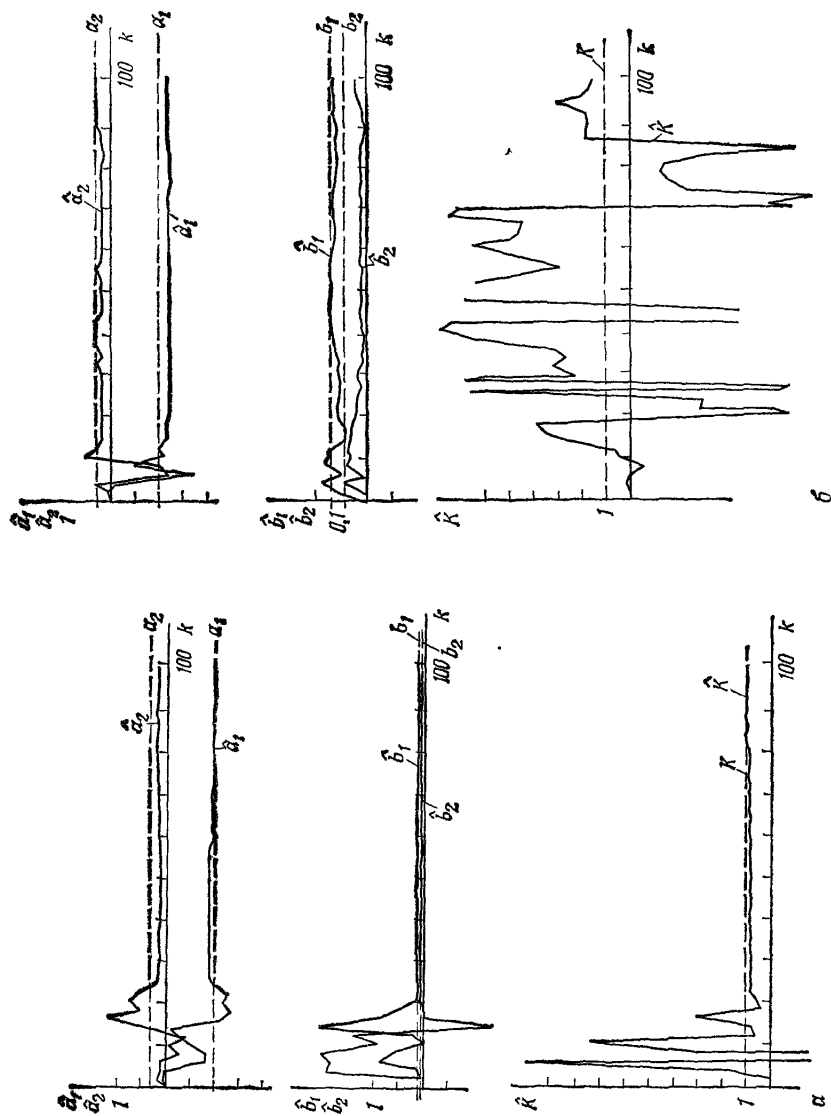


Рис. 25.4.2. Сходимость оценок параметров $\hat{a}_1(k)$, $\hat{a}_2(k)$ и коэффициента передачи $\hat{K}(k)$ при возмущении случайных возмущениями $\epsilon(k)$. ДММЛ/ДМЛЗ ($\epsilon = 0.01$), ДММЛ/АД ($\epsilon = 0.001$).

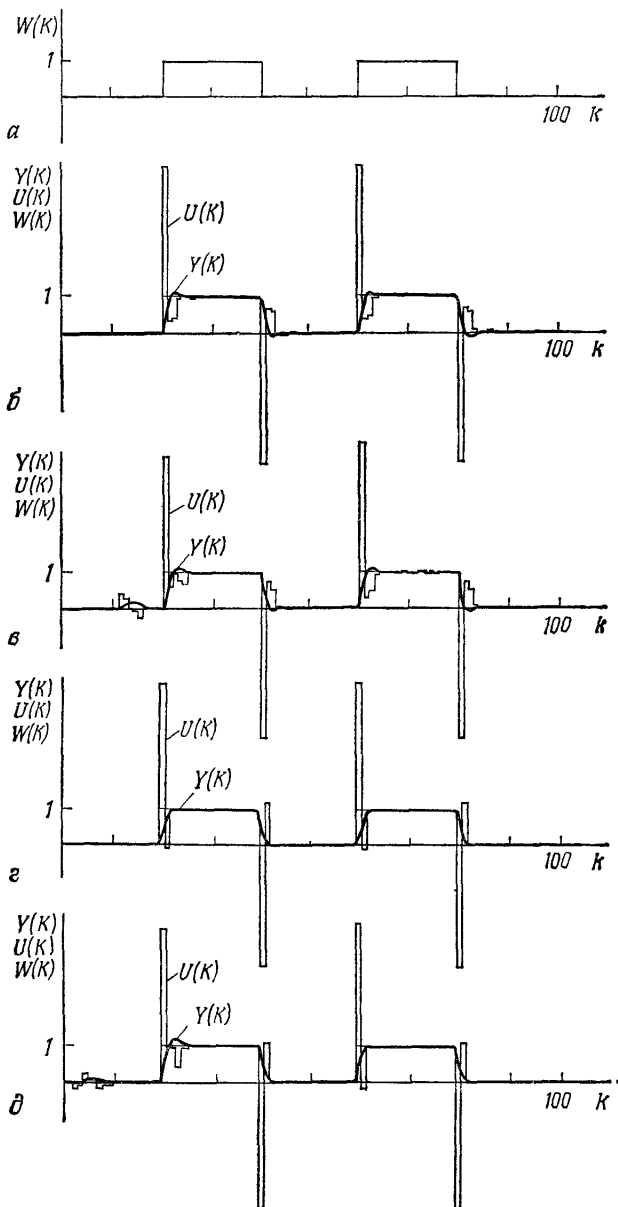


Рис. 25.4.3. Управляющий $U(k)$ и выходной $Y(k)$ сигналы при ступенчатых изменениях задающей переменной $W(k)$.

a — вид изменений задающей переменной $W(k)$, $б$ — фиксированный регулятор РМДЗ ($\gamma=0,025$), $D(z^{-1})=1$; $в$ — адаптивный регулятор РМНК/РМДЗ ($\gamma=0,025$), $г$ — фиксированный регулятор АР(ν); $д$ — адаптивный регулятор РМНК/АР(ν).

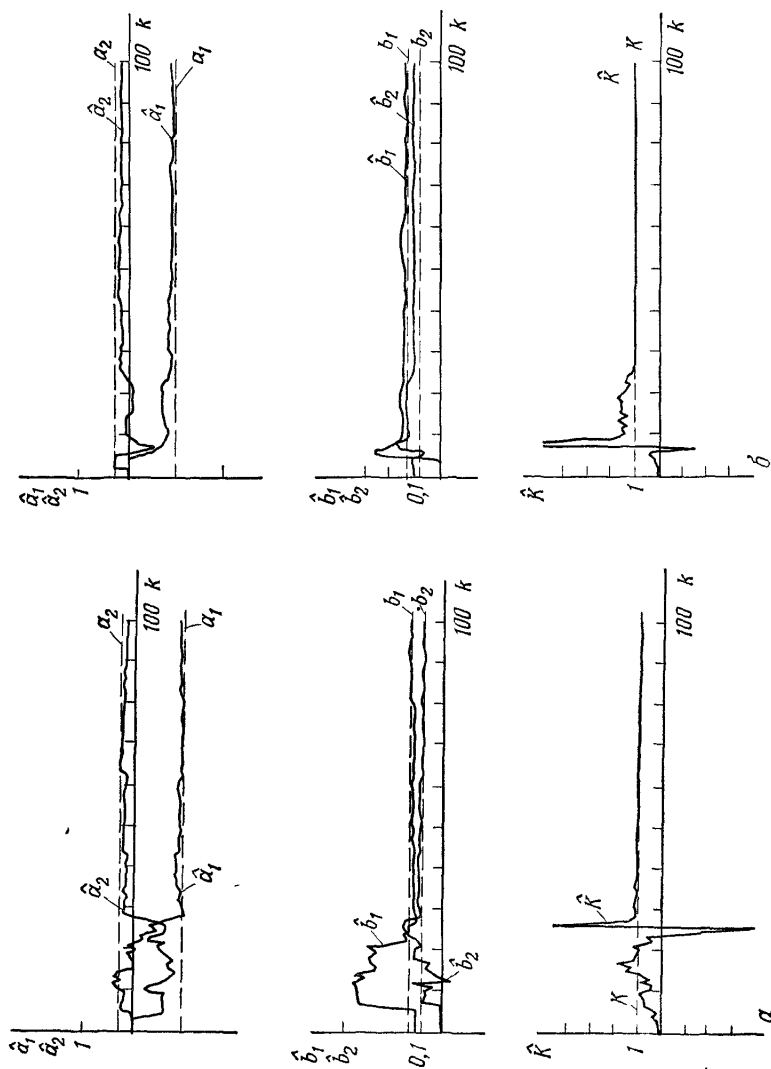


Рис. 25.4.4. Сходимость оценок параметров $\hat{a}_1(k)$, $\hat{a}_2(k)$ и коэффициента передачи $\hat{K}(k)$ при ступенчатых (детерминированных) изменениях задающей переменной: \hat{a} — РМНК/РМДЗ ($\gamma=0,025$); \hat{b} — РМНК/АР (γ).

Оценки параметров фильтра шума \hat{d}_1 сходятся гораздо медленнее, чем оценки параметров объекта управления \hat{a}_1 и \hat{b}_1 . Наиболее быстрая общая настройка системы достигается при использовании алгоритма РМНК. Моделирование показало также, что качество управления не может быть улучшено с помощью дополнительных внешних возмущений.

Изменения детерминированного задающего воздействия

Из анализа рис. 25.4.3 и 25.4.4 следует, что

- после замыкания контура управления изменения сигнала на входе объекта управления создаются адаптивным регулятором; это позволяет получить приближенные оценки параметров модели объекта, поэтому реакция системы на первое ступенчатое воздействие обладает приемлемым качеством управления;
- после второго ступенчатого воздействия параметры модели уже мало отличаются от их истинных значений; коэффициент передачи также быстро сходится к истинному значению;
- поведение систем управления с адаптивными регуляторами и точно настроенными регуляторами с фиксированной настройкой становится практически одинаковым после второго ступенчатого воздействия.

Различные объекты управления

Рассмотренные алгоритмы управления с подстройкой параметров были исследованы при управлении различными объектами: устойчивыми и неустойчивыми, пропорционального и интегрального типов, минимально- и неминимально-фазовыми, передаточные функции которых представлены в табл. 25.4.2. На рис. 25.4.5 показаны результаты моделирования для ступенчатых изменений задающей переменной, при этом в каждом случае был использован наилучший алгоритм. Для всех устойчивых объектов управления и объектов управления пропорционального типа быструю сходимость к точным настройкам показал алгоритм РМНК/АР. Для неустойчивых объектов и объектов интегрального типа устойчивость замкнутого контура управления может быть обеспечена с помощью алгоритма РМНК/РМДЗ.

Приведенные результаты моделирования могут дать первое представление о работе адаптивных алгоритмов управления в сочетании с различными типами сигналов и объектов управления. Они также показали, что сходимость к истинным значениям параметров не является необходимым условием устойчивости адаптивного управления.

Эти и дополнительные результаты моделирования для реальных объектов управления обобщены в табл. 25.4.3 в виде рекомендаций по применению алгоритмов с подстройкой параметров. Вместо алгоритма РММП можно попытаться использовать более простой в вычислительном аспекте алгоритм РОМНК.

Различные типы объектов управления

Объект	Непрерывная передаточная функция $G(s)$	Такт «вантова-ния» T_0	Дискретная передаточная функция $G(z)$	Характеристика
1	$G_1(s) = \frac{1}{(1+2,5s)(1+3,75s)}$	2,0	$G_1(z) = \frac{0,1387z^{-1} + 0,0889z^{-2}}{1 - 1,036z^{-1} + 0,2636z^{-2}}$	Объект с низкочастотными свойствами
2	$G_2(s) = \frac{1}{(1+2,5s)(1+3,75s)(1+5s)}$	2,0	$G_2(z) = \frac{0,0186z^{-1} + 0,0486z^{-2} + 0,0078z^{-3}}{1 - 1,7063z^{-1} + 0,958z^{-2} - 0,1767z^{-3}}$	Объект с низкочастотными свойствами. Один нуль вне окружности единичного радиуса на z-плоскости
3	$G_3(s) = \frac{1+2s}{(1+3s)(25s^2+5s+1)}$	3,0	$G_3(z) = \frac{0,1098z^{-1} + 0,0792z^{-2} - 0,0229z^{-3}}{1 - 1,654z^{-1} - 1,022z^{-2} - 0,2019z^{-3}}$	Объект с колебательными свойствами
4	$G_4(s) = G_3(s)e^{-\theta s}$	3,0	$G_4(z) = G_3(z)z^{-3}$	Объект с запаздыванием
5	$G_5(s) = \frac{1-4s}{(1+4s)(1+10s)}$	2,0	$G_5(z) = \frac{-0,102z^{-1} + 0,173z^{-2}}{1 - 1,425z^{-1} + 0,496z^{-2}}$	Широкополосный объект
6	$G_6(s) = \frac{1}{s(1+5s)}$	0,3	$G_6(z) = \frac{0,0088z^{-1} + 0,0086z^{-2}}{1 - 1,9418z^{-1} + 0,9418z^{-2}}$	Объект с интегрирующими свойствами
7	$G_7(s) = \frac{s+0,03}{(1+2s)(s^2-0,35s+0,15)}$	0,5	$G_7(z) = \frac{0,1964z^{-1} + 0,0001z^{-2} - 0,1892z^{-3}}{1 - 2,930z^{-1} + 2,866z^{-2} - 0,9277z^{-3}}$	Колебательно-неустойчивый объект (модель вертолета)
8	$G_8(s) = \frac{1}{(1+5s)(1-2s)}$	0,5	$G_8(z) = \frac{-0,0132z^{-1} - 0,0139z^{-2}}{1 - 2,1889z^{-1} + 1,1618z^{-2}}$	Аперiodически-неустойчивый объект

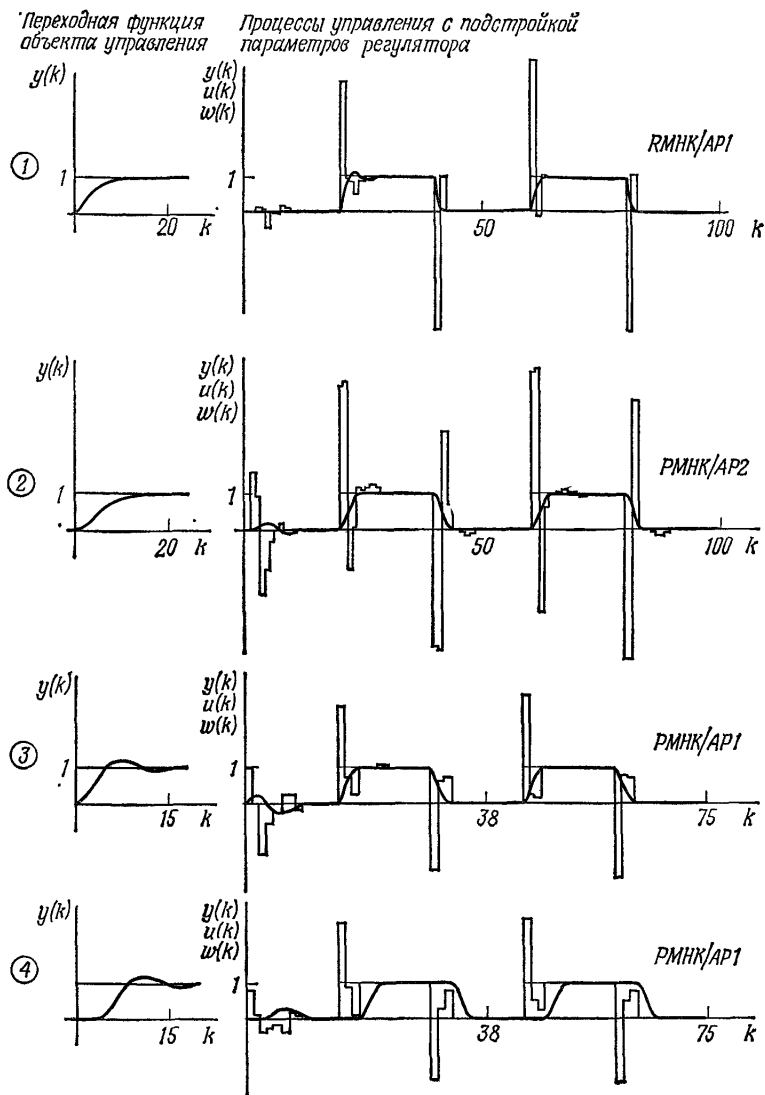


Рис. 25,4.5. Переходные функции и процессы управления с подстройкой параметров для различных объектов управления из табл. 25,4,2.

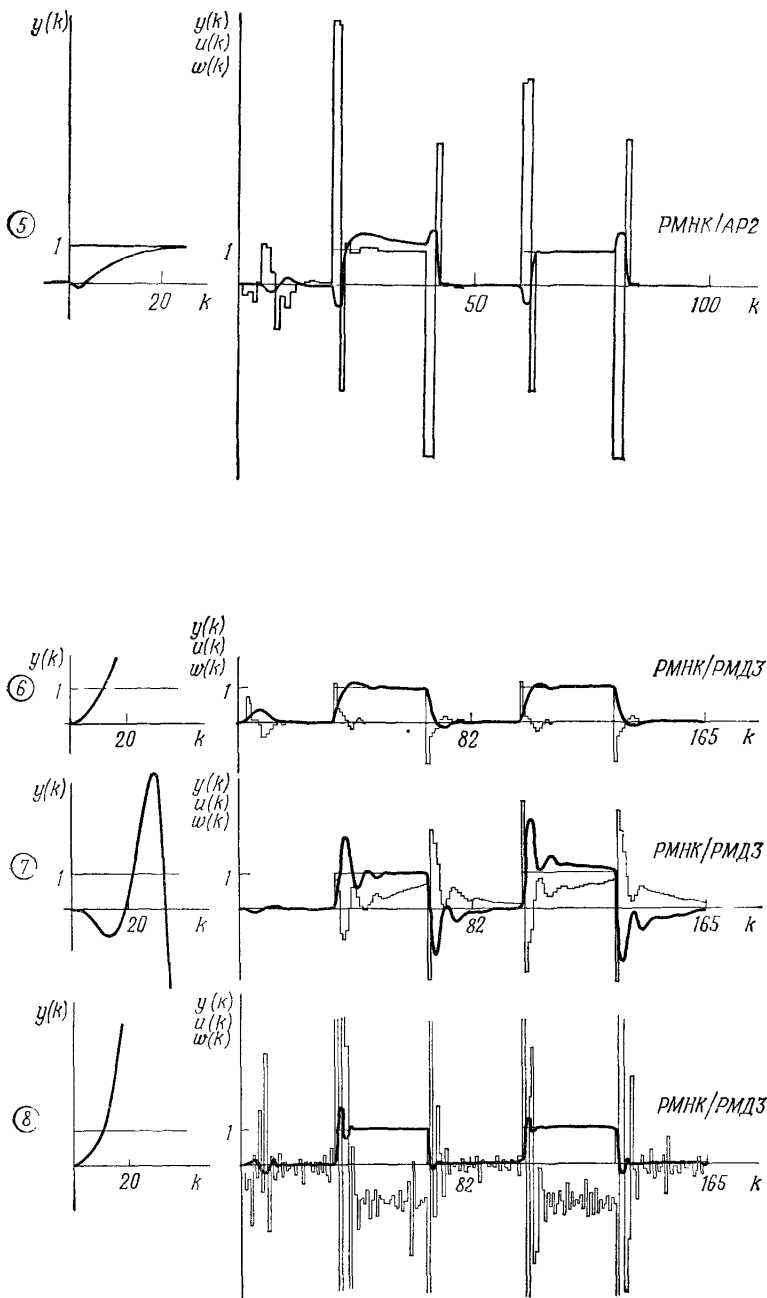


Рис. 25.4.5 (продолжение).

Таблица 25.4.3

Применимость регуляторов с подстройкой параметров в зависимости от типа объекта управления и сигналов

	Тип объектов управления			Тип возмущений	
	асимптотически устойчивые	интегральные	с нулями вне единичной окружности	случайные $p(k)$	детерминированные $w(k)$
РМНК/АР1 (2)	X	—	X	—	X
РМНК/РМД3	X	X	X	X	X
РМНК/РМД4	X	—	—	X	—
РММП/РМД3	X	X	—	X	X
РММП/РМД4	X	—	—	X	—

25.5. ВЫБОР АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Для работы алгоритмов управления с подстройкой параметров необходима следующая априорная информация:

T_0 — такт квантования;

\hat{m} — порядок модели объекта управления;

\hat{d} — величина запаздывания модели объекта управления;

λ — коэффициент значимости оценки;

g — весовой коэффициент управления.

Использование регуляторов с подстройкой параметров показало, что качество управления мало чувствительно к выбору такта квантования T_0 . Для объекта управления пропорционального типа с ПИД-регулятором хорошее качество управления обеспечивается при выборе T_0 из следующего соотношения (гл. 5):

$$\frac{1}{4} T_{95} \leq T_0 \leq \frac{1}{15} T_{95}, \quad (25.5-1)$$

где T_{95} — время выхода регулируемой переменной объекта управления на уровень 95% от установившегося значения.

Однако для апериодических регуляторов с минимальной дисперсией необходимо выбирать такт квантования более тщательно. В частности, выбор слишком малого такта квантования может привести к чрезмерно большим изменениям сигнала управления.

Моделирование с объектом управления третьего порядка ($m_0=3$) показало, что адаптивное управление мало чувствительно к ошибке в определении порядка модели в диапазоне

$$m_0 - 1 \leq \hat{m} \leq m_0 + 2. \quad (25.5-2)$$

Это означает, что порядок объекта управления может быть точно не известен. Однако алгоритмы адаптивного управления чувствительны к выбору величины запаздывания \hat{d} модели. Если величина d не известна или меняется со временем, управление либо не обеспечивает требуемых показателей качества, либо делает систему неустойчивой. Решение этой задачи может быть достигнуто дополнительным оцениванием задержки времени [25.21].

Выбор коэффициента значимости оценки λ при оценивании параметров зависит от скорости изменения характеристик объекта управления, порядка модели и типа возмущений. Для стационарных или очень медленно меняющихся со временем объектов управления рекомендуется величина $\lambda=0,99$. Для более быстрых изменений параметров объекта и при наличии случайных возмущений допустимы значения $0,95 \leq \lambda \leq 0,99$, а при ступенчатых изменениях задающей переменной — $0,85 \leq \lambda \leq 0,90$. При этом меньшие значения коэффициента λ соответствуют объектам управления более низкого порядка ($m=1, 2$), а большие значения — объектам высокого порядка.

Влияние *веса* коэффициента γ на управляющую переменную можно оценить, рассматривая первое значение входного сигнала $u(0)$ после ступенчатого изменения уставки $w(k) = w_0 l(k)$. Для замкнутого контура управления имеет место $u_0(0) = q_0 w_0$. Поэтому величина q_0 является мерой входного сигнала объекта управления. Для регулятора AP ($v+1$) существует линейная связь между q_0 и r' :

$$q_0 = q_{0\min} + (1 - r')(q_{0\max} - q_{0\min}) \quad (0 \leq r' \leq 1), \quad (25.5-3)$$

где $q_{0\min} = 1/(1 - a_1) \sum b_i$, $q_{0\max} = 1/\sum b_i$ (разд. 7.2 и 20.2).

Для регулятора РМДЗ из уравнений (14.1-25), (14.1-27) следует, что q_0 обратно пропорционально r/b_1 при $r/b_1 > b_1$. При $q_0 = q_{0\max} = 1/b_1$ из уравнения (14.1-27) для $\gamma=0$ получим

$$\frac{q_0}{q_{0\max}} = \frac{1}{1 + \gamma/b_1^2} = r'', \quad r'' < 1. \quad (25.5-4)$$

Поэтому *весовой* коэффициент γ должен быть связан с b_1^2 . Чтобы получить $\gamma=0,5$ или $0,25$, необходимо выбрать $\gamma/b_1^2=1$ или 3 .

25.6. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Всестороннее изучение показало применимость алгоритмов управления с подстройкой параметров для тестовых процессов и реальных промышленных объектов. Краткий обзор применения самонастраивающегося регулятора РМНК/РМД4 для управления концентрацией пульпы в бумагоделательной машине и количеством руды, поступающей в дробильную установку, дан в работе [25.23]. Эти же алгоритмы были успешно применены при создании системы управления танкера [25.22] и для регулирования содержания двуокиси титана в печи для обжига [25.23]. В работе [25.24] сообщается о применении алгоритма РМНК/РМДЗ, реализованного в виде самонастраивающегося регу-

литора на микропроцессорах, для управления температурой помещения, водородным показателем рН и температурой внутри химического реактора. Алгоритмы РМНК/РМД3 и РМНК/АР были реализованы на микро-ЭВМ и использованы для управления воздушонагревателем [25.25] и [25.26]. Применение алгоритмов РМНК/РМД4 и РМНК/РС для управления процессом рН-нейтрализации описано в [25.27].

В дальнейшем рассмотрены примеры использования адаптивных регуляторов для управления воздушонагревателем и водородным показателем рН. Из-за нелинейности характеристик поведение обоих объектов управления в статике и динамике зависит от их рабочей точки.

25.6.1. Адаптивное управление воздушонагревателем

Структурная схема кондиционирующей установки представлена на рис. 25.6.1. Зависимость коэффициента передачи воздушонагревателя K_{11} , представляющего собой отношение изменения

Воздушонагреватель Увлажнитель воздуха

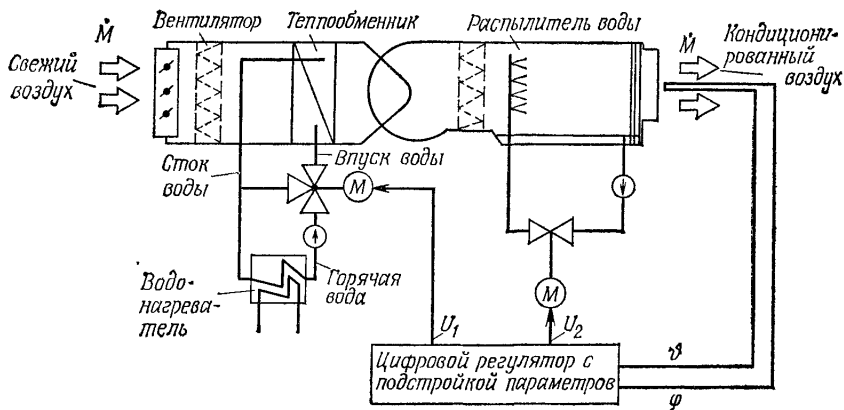


Рис. 25.6.1. Схема кондиционирующей установки. ϑ — температура воздуха; φ — относительная влажность; \dot{M} — расход воздуха; U_1 — управление положением вентиля впуска воды; U_2 — управление положением вентиля распылителя воды.

температуры воздуха ϑ на выходе к изменению положения вентиля, регулирующего расход горячей воды на входе ΔU_1 , от величины U_1 изображена на рис. 25.6.2. Коэффициент значительно изменяется (приблизительно в 10 раз) в зависимости от положения вентиля U_1 и скорости потока воздуха. Кроме того, динамические характеристики существенно меняются с изменением рабочей точки и направления изменения входного воздействия (нелинейности характеристик). Для управления был использован алгоритм РМНК/АР ($\nu+1$), реализованный на 8-разрядной микро-ЭВМ [25.25], [25.26]. Переходные процессы, представленные на рис. 25.6.3, показывают, что контур управления с адаптивным регулятором

стабилизирует уставочное значение температуры примерно за 10 тактов квантования. При последующих ступенчатых изменениях уставки температуры и расхода воздуха также обеспечивается хорошее качество управления. Входная величина меняется от 1

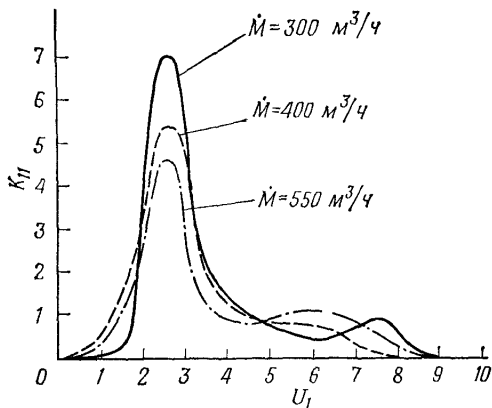


Рис. 25.6.2. Зависимость коэффициента передачи $K_{11} = \Delta\theta(\infty)/\Delta U_1(\infty)$ от величины управления U_1 при $U_2 = -1$ В.

до 7 В, что соответствует практически полному диапазону положений вентиля. Различная амплитуда входного сигнала при изменении уставок на одинаковую величину (2°C) говорит о подстройке коэффициентов регулятора. Аналоговый ПИ-регулятор с зафиксированными параметрами, рассчитанными на $W=21^\circ\text{C}$ и $\dot{M}=400$ м³/ч, обеспечивает требуемое качество только для этой рабочей точки. Если уставочное значение температуры увеличить, то реакция системы становится слишком медленной и при уменьшении расхода воздуха до 300 м³/ч управление становится неустойчивым [25.26].

25.6.2. Адаптивное управление водородным показателем рН

На рис. 25.6.4 представлена схема управляемого химического процесса для получения заданного водородного показателя рН, в котором соляная кислота и раствор едкого натрия смешиваются с нейтральной водой. Управляющей переменной является расход щелочи (регулируемый частотой движения поршня насоса), регулируемой переменной — величина водородного показателя раствора рН, измеряемого с помощью стеклянного электрода на выходе смесительного бака. Как известно, этот процесс обладает нелинейной статической характеристикой, которая определяется кривой титрования. Зависимость коэффициента передачи $K = \Delta\text{pH}(\infty)/\Delta\dot{M}_b$ (где $\Delta\dot{M}_b$ — приращение расхода щелочи) от величины управления U изображена на рис. 25.6.5. Как видно из рисунка, этот коэффициент изменяется в 6 раз. На рис. 25.6.6, а показаны результаты адаптивного управления процессом с применением регулятора

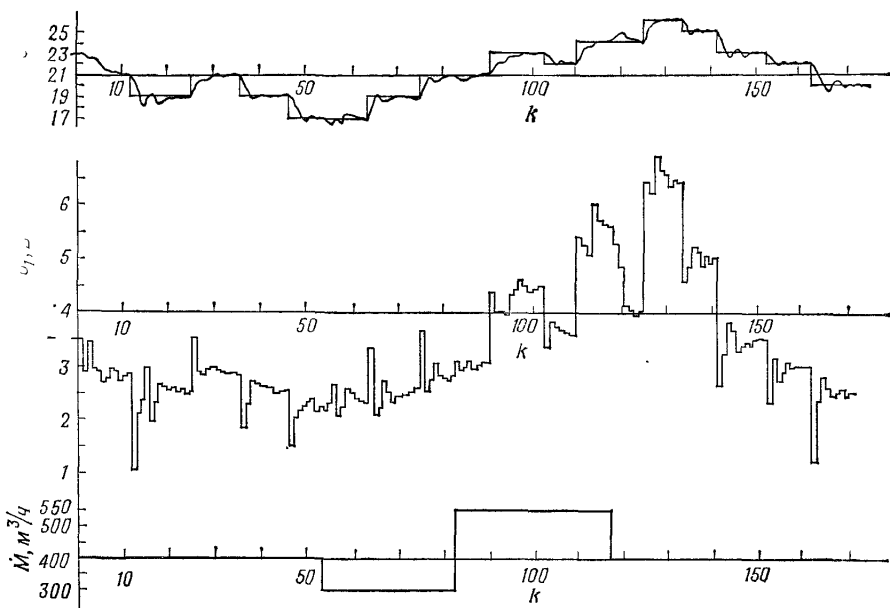


Рис. 25.6.3. Переходные процессы в адаптивной системе управления температурой воздуха при постоянном расходе воды в разбрызгивателе и изменениях задающей переменной $w(k)$ и расхода воздуха \dot{M} . Адаптивный регулятор РМНК/АР ($v+1$). $m=3$; $d=0$; $\lambda=0,9$; $T_0=70$ с.

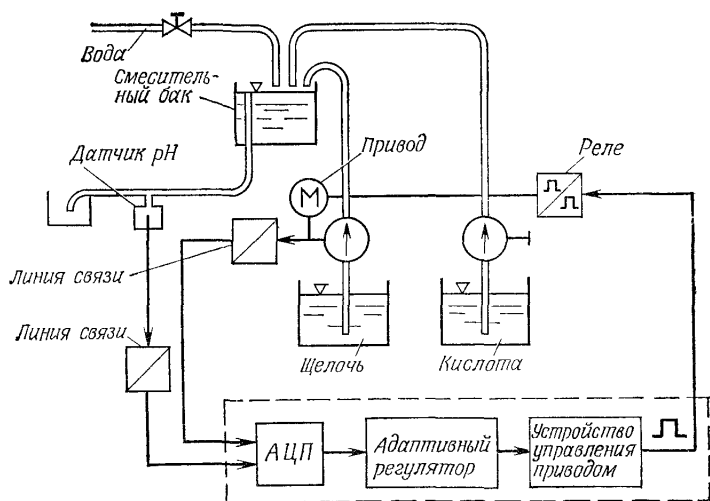


Рис. 25.6.4. Схема рН-процесса.

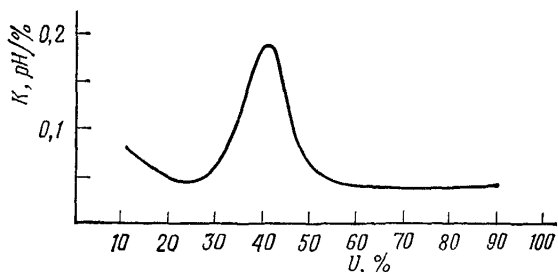


Рис. 25.6.5. Зависимость коэффициента $K = \Delta pH(\infty) / \Delta \dot{M}_B$ от расхода щелочи.

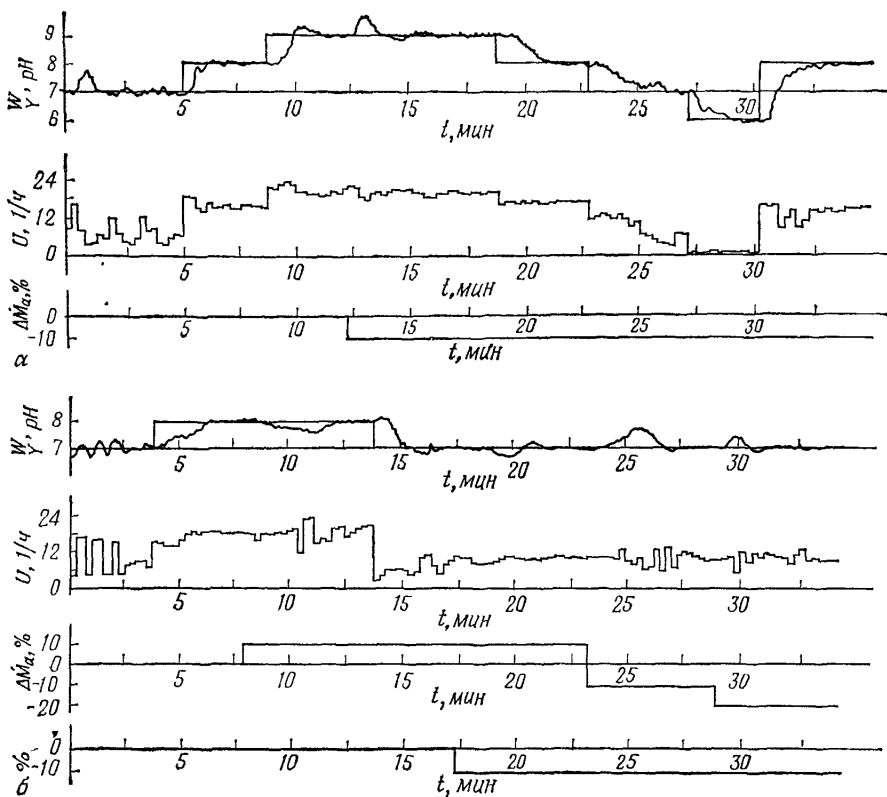


Рис. 25.6.6. Переходные процессы в адаптивной системе управления pH. \dot{M}_a — расход кислоты; \dot{M}_B — расход щелочи; \dot{M}_w — расход нейтральной воды.
 а — РМНК/АР ($\nu+1$); $r'=0,5$; $T_0=15$ с; $m=3$; $d=2$; $\lambda=0,98$; $P(0)=500$ I; б — РМНК/РМДЗ, $r''=0,15$; $T_0=15$ с; $m=3$; $d=2$; $\lambda=0,88$; $P(0)=500$ I.

РМНК/АР ($\nu+1$). В момент времени $t=0$ начальное значение вектора оценок параметров $\hat{\theta}(0)=0$. Примерно через 2 мин система управления обрабатывает уставочное значение $pH=7$. Переходные процессы для ступенчатых изменений уставочного значения pH в противоположных направлениях имеют малое время установления при отсутствии или малых значениях перерегулирования. Реакция системы при возмущении по расходу кислоты в момент времени $t=14$ мин также удовлетворяет требуемому качеству управления. Оценки коэффициента передачи в процессе этого эксперимента изменялись от 0,023 при $t=5$ мин до 0,144 при $t=10$ мин, т. е. в 6 раз. На рис. 25.6.6, б представлены результаты испытаний адаптивной системы управления с регулятором РМНК/РМДЗ. Первые 2 минуты перед началом работы системы осуществляется предварительная идентификация разомкнутого контура управления путем подачи ряда пробных ступенчатых изменений управляющей переменной. При этом адаптивный регулятор использует в начальный момент более точную модель объекта управления и, следовательно, с самого начала обеспечивает целенаправленное управление объектом. После замыкания контура адаптации водородный показатель стабилизируется при значении $pH=7$. Система обеспечивает высокое качество управления при обработке ступенчатых изменений уставок и возмущений по расходу кислоты и воды. Более подробный материал по этому вопросу представлен в работе [25.28]. Экспериментальные исследования с регуляторами РМНК/АР ($\nu+1$) и РМНК/РМДЗ показали, что они не только могут использоваться для регулирования величины pH , но и обеспечивают при этом более высокое качество управления по сравнению с обычным непрерывным ПИ-регулятором.

Приведенные примеры показали, что адаптивные регуляторы могут быть использованы для настройки параметров регуляторов с учетом заданной рабочей точки, изменений статических характеристик нелинейных объектов управления (возникающих при изменении уставок), а также нестационарности характеристик объекта управления (связанной с наличием таких внешних возмущений, как, например, изменение расхода отдельных компонентов раствора). Адаптивные регуляторы обеспечивают более высокое качество управления по сравнению с фиксированными регуляторами. Кроме того, применение самонастройки вместо ручной настройки регуляторов по заданной методике позволяет значительно экономить время.

25.7. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ

Для построения статистически эквивалентных адаптивных регуляторов с прямой связью (рис. 25.7.1) могут быть использованы те же принципы, что и для адаптивных регуляторов с обратными связями.

Допустим, что объект управления описывается уравнением

$$y(z) = G_p(z) u(z) + G_v(z) v(z), \quad (25.7-1)$$

где $v(z)$ — измеримое возмущающее воздействие и

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d_p} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m_p}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m_p}} z^{-d_p}, \quad (25.7-2)$$

$$G_v(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} z^{-d_v} = \frac{d_1 z^{-1} + \dots + d_m z^{-m_v}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m_v}} z^{-d_v}. \quad (25.7-3)$$

Регулятор с прямой связью имеет передаточную функцию

$$G_S(z) = \frac{u(z)}{v(z)} = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{s_0 + s_1 z^{-1} + \dots + s_n z^{-n}}{1 + r_1 z^{-1} + \dots + r_m z^{-m}}, \quad (25.7-4)$$

Тогда уравнение (25.7-1) можно переписать в виде

$$A(z^{-1}) y(z) = B(z^{-1}) z^{-d_p} u(z) + D(z^{-1}) z^{-d_v} v(z), \quad (25.7-5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) &= \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n} \\ D(z^{-1}) &= \delta_1 z^{-1} + \dots + \delta_n z^{-n} \end{aligned} \right\}. \quad (25.7-6)$$

$A(z^{-1})$ является общим знаменателем передаточных функций $G_p(z)$ и $G_v(z)$, а $B(z^{-1})$ и $D(z^{-1})$ — расширенными числителями соответ-

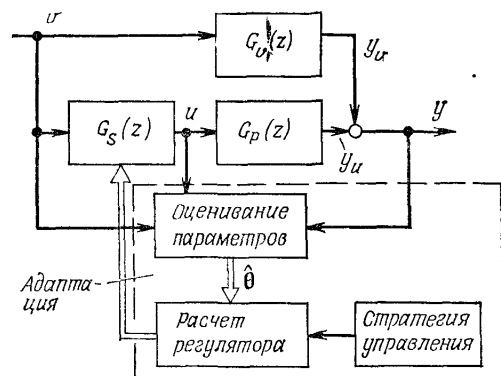


Рис. 25.7.1. Блок-схема адаптивного регулятора с прямой связью.

ствующих передаточных функций. Так как все сигналы, входящие в уравнение (25.7-5), измеримы, то параметры α_i , β_i и δ_i могут быть определены с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов (РМНК) (см. разд. 23.2) с использованием следующих обозначений:

$$\theta^T = [\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_n \delta_1 \dots \delta_n], \quad (25.7-7)$$

$$\Psi^T(k) = [-u(k-1) \dots -u(k-n) u(k-d_p-1) \dots u(k-d_p-n), \\ v(k-d_v-1) \dots v(k-d_v-n)]. \quad (25.7-8)$$

Условие идентифицируемости для этого случая также должно удовлетворяться, поскольку $u(k)$ и $v(k)$ коррелированы. Здесь может быть использован другой способ выведения второго условия идентифицируемости из разд. 24.1 (см. уравнение (24.1-32)). Алгоритм управления, реализуемый регулятором с прямой связью, определяется выражением

$$u(k-d_p-1) = -r_1 u(k-d_p-2) - \dots - r_\mu u(k-d_p-\mu-1) + s_0 v(k-d_p-1) + \dots + s_\nu v(k-d_p-\nu-1), \quad (25.7-9)$$

и элементы вектора (25.7-8) становятся линейно-независимыми только при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} \max[\mu; \nu + (d_p - d_v)] &\geq n \text{ для } d_p - d_v \geq 0, \\ \max[\mu + (d_v - d_p); \nu] &\geq n \text{ для } d_p - d_v \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.7-10)$$

Используя модель (25.7-5) и вектор оценки параметров $\hat{\theta}$, можно спроектировать алгоритмы управления с прямой связью на основе методов компенсации (разд. 17.1), минимума дисперсии (разд. 17.4), принципа конечного времени установления переходного процесса [25.29] или оптимизации параметров (разд. 17.2). Получаемые при этом адаптивные алгоритмы управления описаны в работе [25.29]. Все они обладают быстрой адаптируемостью. На рис. 25.7.2 показан пример использования одного из таких алгоритмов. Комбинация алгоритмов РМНК и РМД4 была предложена в работе [25.9].

Применение регуляторов с прямой связью может существенно улучшить качество управления многими промышленными объектами. Обычно используют регуляторы пропорционального и дифференцирующего типов или дифференцирующего типа с задержкой. На практике не всегда удается заранее точно настроить их параметры. Поэтому применение самонастраивающихся или адаптивных алгоритмов управления с прямой связью позволяет добиться лучших показателей качества.

25.8. МНОГОМЕРНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ПОДСТРОЙКОЙ ПАРАМЕТРОВ

Моделирование и практические результаты использования регуляторов с подстройкой параметров для объектов управления с одним входом и одним выходом показали быструю сходимость настроек параметров, обеспечивающую этим регуляторам ряд практических преимуществ по сравнению с обычными ненастраиваемыми регуляторами. Поэтому естественно, что принципы управления с подстройкой параметров были использованы и для многомерных систем управления с учетом всех внутренних связей объекта управления. Модификация самонастраивающегося регулятора РМНК/

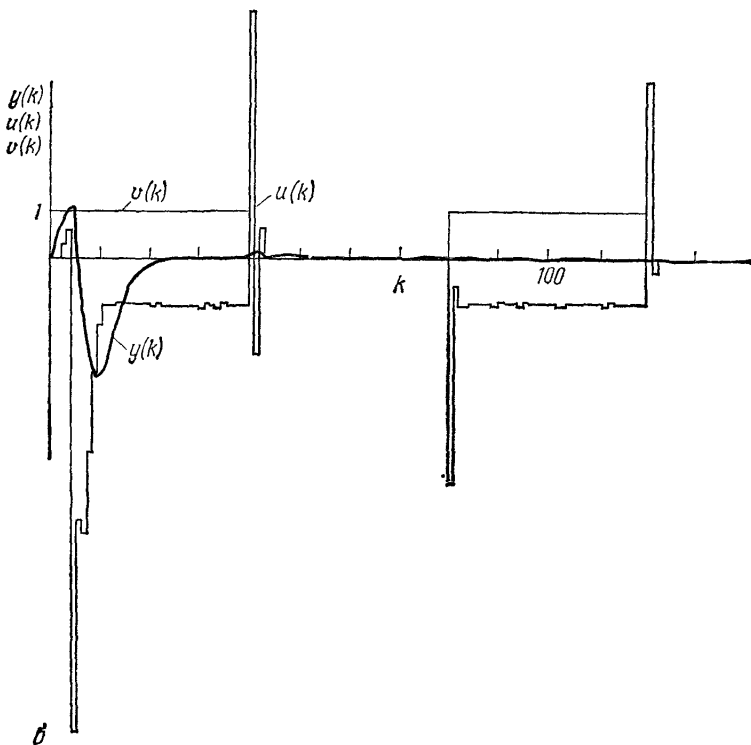
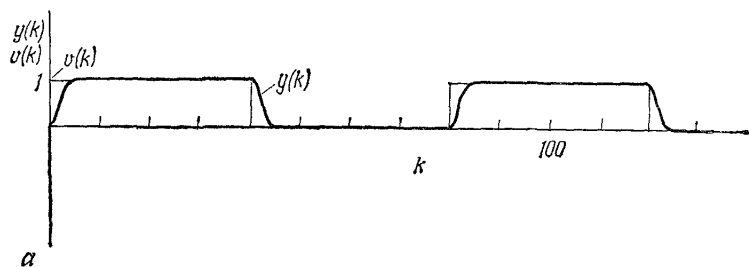


Рис. 25.7.2. Переходные процессы в системе управления низкочастотным объектом порядка $m=3$ с адаптивным регулятором с прямой связью и фильтром возмущений порядка $m=2$.

a — без регулятора с прямой связью при ступенчатых возмущениях $v(k)$; *b* — при введении адаптивного регулятора с прямой связью на основе РМНК/АР.

РМД4 для многомерных систем была проведена в работах [25.30] — [25.32] с использованием матричных полиномиальных моделей. Обзор соответствующих комбинаций алгоритмов оценивания параметров и управления дан в работе [25.33]. Там же показано, что для этих алгоритмов применимы следующие линейные многомерные модели объектов управления с r входами и g выходами:

● p — каноническая модель

$$A_{ii}(z^{-1})y_i(z) = \sum_{j=1}^p B_{ij}(z^{-1})z^{-d}u_j(z) + \sum_{j=1}^r D_{ij}(z^{-1})v_j(z), \quad i=1, \dots, r; \quad (25.8-1)$$

● матричная полиномиальная модель (уравнение (20.3-1))

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1})z^{-d}u(z) + D(z^{-1})v(z); \quad (25.8-2)$$

● рекуррентная модель в пространстве состояний

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Gv(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned} \right\}. \quad (25.8-3)$$

Эта модель может быть преобразована к канонической форме наблюдаемости (разд. 3.2)

$$\left. \begin{aligned} x_t(k+1) &= A_t x_t(k) + B_t u(k) + G_t v(k) \\ y(k) &= C_t x_t(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \quad (25.8-4)$$

с помощью преобразования

$$x_t(k) = Tx(k). \quad (25.8-5)$$

Для получения модели вход/выход, удовлетворяющей условию минимальной реализации, введем обозначение

$$y^{*r}(k) = [y(k) \ y(k+1) \ \dots \ y(k+n-1)]^r. \quad (25.8-6)$$

Тогда в соответствии с уравнением (3.6-62) получим

$$y^*(k) = C^*x^*(k) + B^*u^*(k) + v^*(k) + G^*v^*(k). \quad (25.8-7)$$

Матрица C^* содержит в качестве сомножителя матрицу преобразования к канонической модели наблюдаемости T , которая равна единичной матрице, если объект управления (25.8-3) записан в канонической форме наблюдаемости (25.8-4). В этом случае переменные состояния могут быть непосредственно вычислены без применения наблюдателя. Более детальный вывод этой модели в детерминированном случае рассмотрен в работе [2.19], а для стохастического случая — в работах [25.34], [25.33].

Оценки параметров указанных моделей могут быть получены на основе соотношений

$$y_i(k) = \Psi_i^r(k) \theta_i + v_i(k), \quad i=1, \dots, r, \quad (25.8-8)$$

с помощью методов РМНК или РОМНК. Алгоритм для получения оценок имеет вид

$$\hat{\theta}_i(k+1) = \hat{\theta}_i(k) + \gamma_i(k+1) e_i(k+1). \quad (25.8-9)$$

Для создания многомерных регуляторов с настраиваемыми параметрами эти алгоритмы оценивания параметров объединяются с алгоритмами многомерного управления, описанными в гл. 20 и 21 [25.33] и реализованными в виде следующих регуляторов.

Матричные полиномиальные регуляторы:

- матричные полиномиальные апериодические регуляторы (МАР1, МАР2);
- матричные полиномиальные регуляторы с минимальной дисперсией (МРМД1, МРМД2).

Многомерные регуляторы состояния:

- многомерный регулятор по переменным состояниям, обеспечивающий требуемое расположение полюсов (МПРС);
- многомерный регулятор состояния на основе матричного уравнения Риккати (МРРС);
- многомерный регулятор с развязкой подсистем (МДРС);
- многомерный регулятор состояния с минимальной дисперсией (МРМДС1, МРМДС2).

На рис. 25.8.1 представлена структурная схема двумерного объекта управления, используемого в качестве примера для ис-

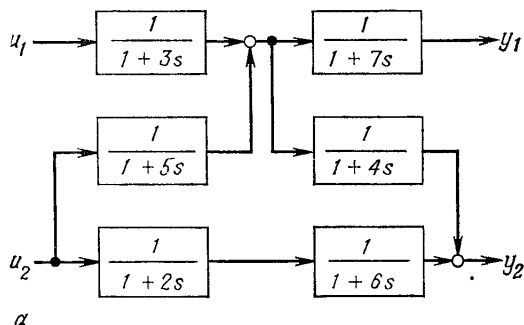
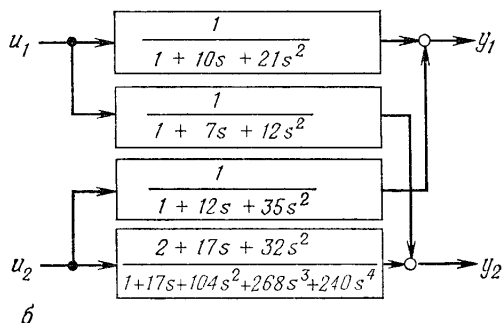


Рис. 25.8.1. Тестовый двумерный объект управления.



следования алгоритмов управления с подстройкой параметров. Результаты моделирования при ступенчатых изменениях задающих переменных и наличии случайных возмущений на выходах системы показаны на рис. 25.8.2 и 25.8.3 соответственно. В обоих случаях

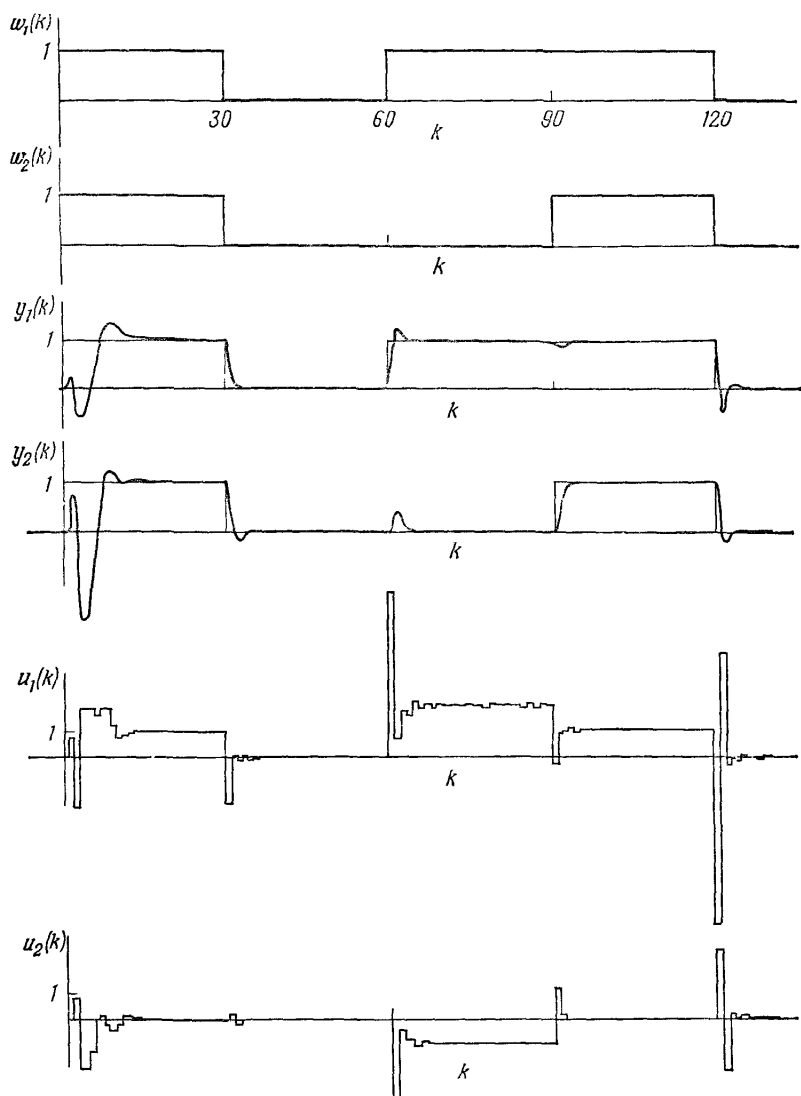


Рис. 25.8.2. Переходные процессы в двумерной адаптивной системе управления тестовым объектом (рис. 25.8.1) при ступенчатых изменениях $w_1(k)$ и $w_2(k)$. Регулятор РМНК/МАР. $T_0=4$ с; $m_1=3$, $m_2=5$. Ограничения на управляющие воздействия. $-2 \leq u_1(k) \leq 2$ для $0 \leq k \leq 20$.

через 20—30 тактов квантования параметры адаптивного регулятора настраивались и обеспечивалось требуемое качество управления.

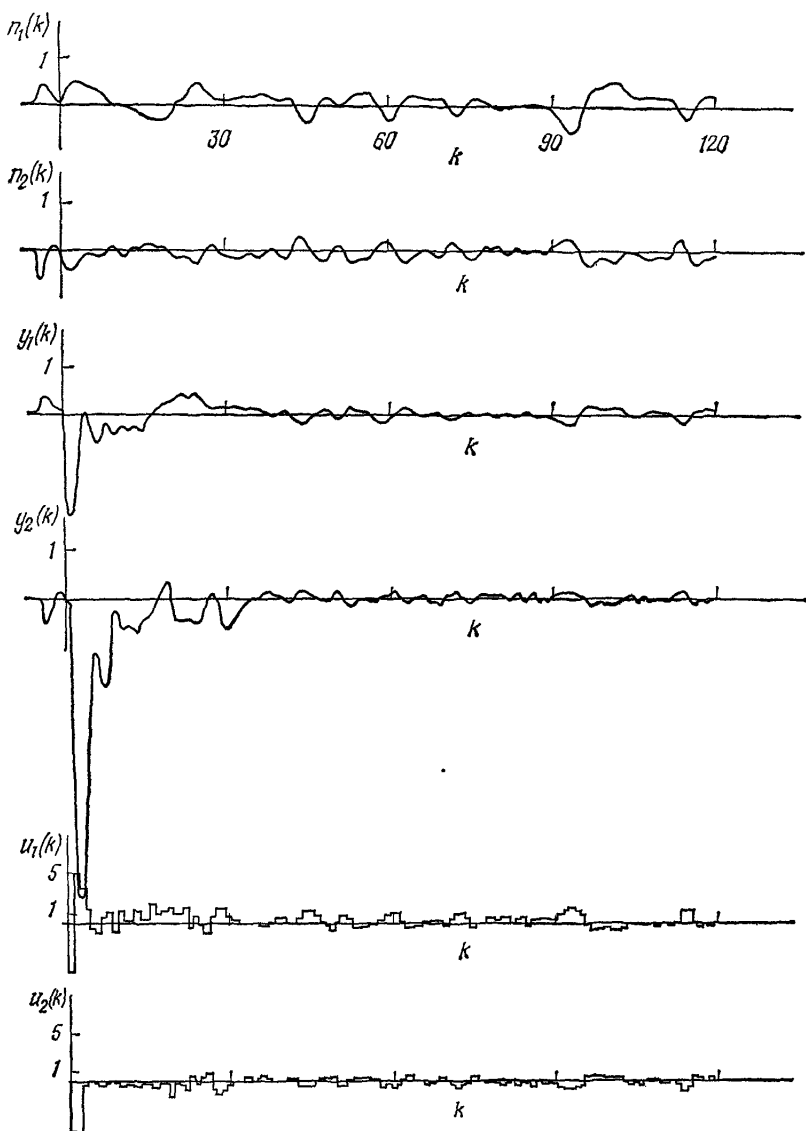


Рис. 25.8.3. Переходные процессы в двумерной адаптивной системе управления тестовым объектом при случайных возмущениях. Регулятор РОМНК/МРМДИ. $T_0=4$ с, $R=0,005$ I; $S=I$; $m_1=3$; $m_2=5$. Ограничения на управляющие воздействия $-5 \leq u_1(k) \leq 5$ для $0 < k \leq 20$.

Многомерные регуляторы с подстраиваемыми параметрами были использованы для управления кондиционирующей установкой [25.35], структурная схема которой была приведена на рис. 25.6.1.

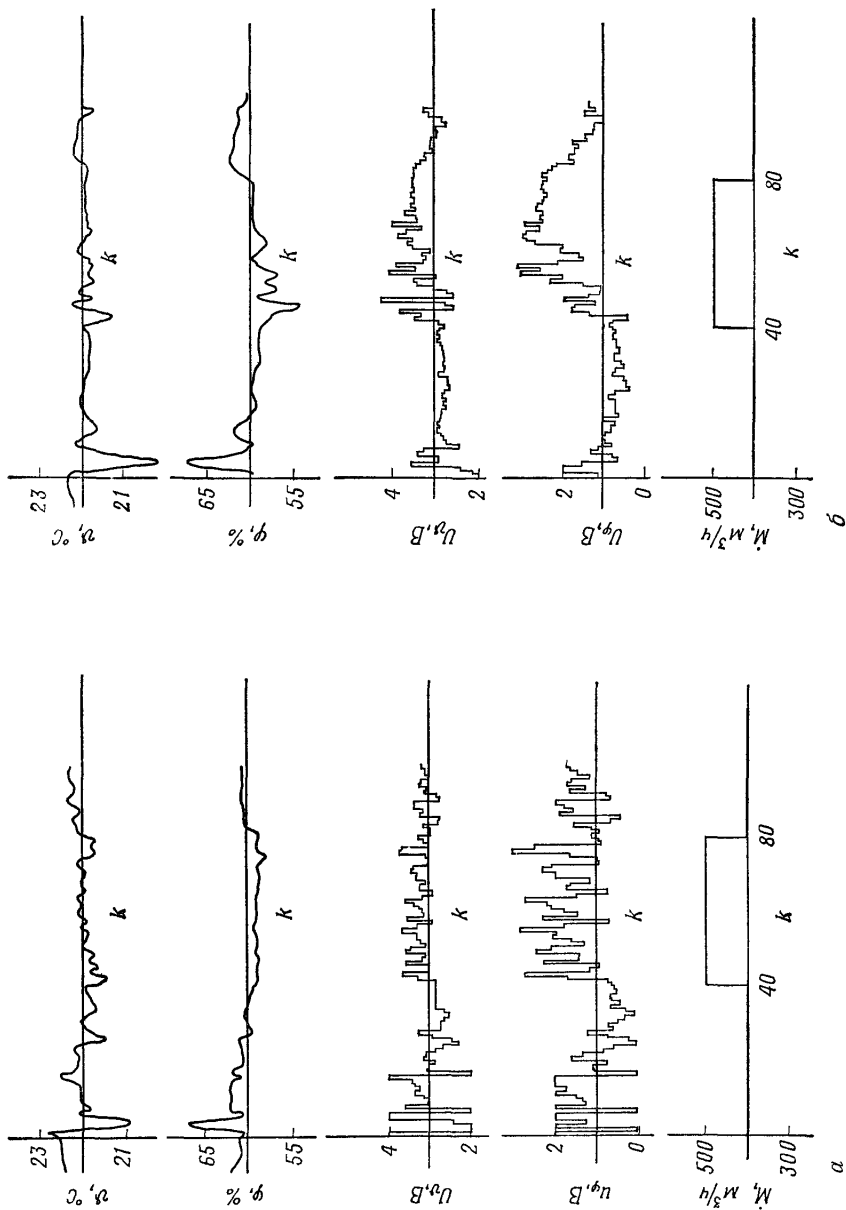


Рис. 25.8.4. Переходные процессы в двумерной адаптивной системе управления кондиционирующей установкой.

a — адаптивный аperiodический регулятор РМНК/МАР2, $m_1=m_2=3$; *b* — адаптивный регулятор состояния РМНК/МРРС, $m_1=3$, $m_2=2$

Скорость потока воздуха полагалась равной $\dot{M}=400$ м³/ч, такт квантования $T_0=40$ с, коэффициент значимости оценки $\lambda=0,95$. Алгоритм управления был реализован на управляющей ЭВМ типа HP21MX-E. На все вычисления в каждый межтактыый промежуток времени требовалось менее 1 с. На рис. 25.8.4 показаны переходные процессы в системе управления при использовании двух типов многомерных регуляторов с подстраиваемыми параметрами: апериодического и регулятора состояния. В начальной стадии процесса при изменении k от 1 до 10 управляющие переменные изменяются в диапазоне $2 \text{ В} \ll U_1 \ll 4 \text{ В}$ и $0 \text{ В} \ll U_2 \ll 2 \text{ В}$ соответственно. Оба регулятора стабилизируют объект управления за 20—25 тактов квантования и обеспечивают приемлемые показатели качества при ступенчатых изменениях уставок температуры воздуха и его влажности. Различные переходные процессы характеризуют динамику системы управления. Коэффициенты передачи объекта управления изменялись следующим образом: для воздухонагревателя в 2 раза, увлажнителя в 3 раза, перекрестных связей в 4 и 1,5 раза соответственно.

В заключение можно сказать, что и моделирование, и исследование при управлении реальными объектами показали высокую эффективность многомерных регуляторов с подстраиваемыми параметрами, которые хорошо зарекомендовали себя с точки зрения скорости и качества управления.

Заключение

Результаты, полученные в данной главе, показали, что правильно выбранные алгоритмы управления с подстройкой параметров являются асимптотически устойчивыми и обладают высокой скоростью сходимости при выполнении следующих условий:

- а) соответствие линейных моделей объекта управления и шума реальным процессам;
- б) постоянство параметров объекта управления и шума.

Однако в большинстве практических случаев параметры объекта управления изменяются во времени. Использование при оценивании параметров коэффициента значимости оценки $\lambda < 1$ позволяет алгоритмам управления с подстройкой отслеживать изменение характеристик объекта, если скорость их изменения существенно ниже скорости протекания переходных процессов объекта управления. Для нормального хода процесса идентификации необходимо;

- в) наличие возбуждающего внешнего сигнала, действующего на замкнутый контур управления.

Условие а) удовлетворяется, если объект управления линеаризуем в области управления и если параметры модели, определяющие структуру объекта (порядок m , величина запаздывания d , такт квантования T_0), выбраны правильно (см. разд. 25.4). Для неста-

ционных процессов также важен правильный выбор коэффициента значимости оценки λ . Моделирование и практический опыт показали, что, за исключением величины запаздывания d , выбор в процессе синтеза параметров m , T_0 , λ и весового коэффициента управления γ не является критичным в определенном диапазоне. Эти конструктивные параметры могут быть определены опытным

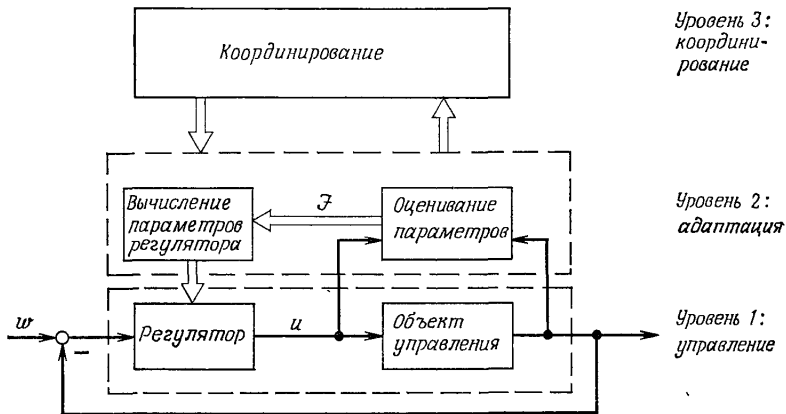


Рис. 25.8.5. Адаптивная система управления с третьим иерархическим уровнем обратной связи.

путем. Между тем, исследуются методы их автоматического определения. С этой целью в адаптивной системе управления (рис. 25.8.5) добавляется третий иерархический уровень обратной связи. Здесь осуществляется координация процесса адаптации за счет автоматической подстройки параметров самого контура адаптации. Например, в работе [25.20] рассматривается подстройка величины запаздывания. Использование такого координирующего уровня позволяет уменьшить до одного или двух число характеристик, используемых при синтезе системы, таких, как, например, коэффициент затухания, время установления переходного процесса, отношение дисперсий, полоса пропускания.

Кроме того, координирующая обратная связь позволяет контролировать работу контура адаптации, особенно когда режим функционирования системы приводит к нарушениям условий устойчивости и сходимости. Примером таких режимов может служить слишком быстрое изменение параметров объекта управления или отсутствие надлежащего сигнала, позволяющего провести оценку параметров. В последнем случае может случиться так, что модель испортится («заснет») со временем до тех пор, пока изменения алгоритма управления не приведут к нарушению устойчивости контура. В результате на входе объекта управления появится сигнал, похожий на всплеск, вновь заработает процедура оценивания параметров модели и адаптивный контур станет устойчивым. Далее

весь цикл повторяется. Существует несколько путей для ликвидации этого явления с помощью координирующей обратной связи, например изменять коэффициент значимости оценки λ до 1 или «замораживать» параметры модели объекта управления, если величина сигнала ошибки или управления находится в определенном диапазоне, иначе говоря,

$$|e_w(k)| = |w(k) - y(k)| < \varepsilon_w.$$

Моделирование и эксперименты с реальными объектами управления показали также, что алгоритмы управления с подстройкой параметров применимы для объектов со скачкообразным характером изменения параметров [25.16].

Рассмотренные алгоритмы адаптивного управления, основанные на оценивании параметров линейной модели объекта, могут быть использованы при управлении достаточно нелинейными объектами управления, для которых линейные регуляторы с постоянными параметрами либо неприменимы, либо не обеспечивают требуемого качества.

Если методы оценивания параметров и расчета регуляторов распространить на модели нелинейных объектов управления, особенно при сохранении линейности относительно параметров, то адаптивное управление с подстройкой параметров будет также применимо к явно выраженным нелинейным объектам управления.

Представленные в данной главе результаты исследований показали, что алгоритмы управления с подстройкой параметров могут быть использованы:

- в качестве самонастраивающегося управления в процессе ввода в действие объекта управления:
 - на одной рабочей точке, а затем как регулятор с фиксированными параметрами;
 - для разных рабочих точек (нагрузок), а затем с адаптивным регулятором с прямой связью;
- в качестве адаптивного управления объектами с медленно меняющимися во времени параметрами.

Цифровое управление с помощью управляющих и микро-ЭВМ

Помимо выбора соответствующих алгоритмов управления и их подстройки к объекту для обеспечения высокого качества управления с помощью циф. о-вых вычислительных устройств необходимо рассмотреть ряд важных аспектов. В гл. 26 рассматривается влияние *квантования сигналов по уровню* в преобразователе аналог/код, центральном процессоре и преобразователе код/аналог на работу системы управления с точки зрения выбора необходимой длины слова ЭВМ. Другим требованием является приемлемая *фильтрация возмущений*, которые не могут быть компенсированы с помощью алгоритмов управления. В связи с этим в гл. 27 исследованы вопросы фильтрации высоко- и среднечастотных сигналов с помощью непрерывных и цифровых фильтров. *Комбинации алгоритмов управления с различными типами исполнительных устройств* исследуются в гл. 28. В этой же главе рассматривается задача линеаризации исполнительного устройства с ограничениями по скорости и положению. Гл. 29 посвящена *автоматизации расчета алгоритмов управления с помощью ЭВМ*. В последней главе *методы идентификации и цифрового управления* демонстрируются на примерах управления теплообменником, сушильной центрифугой и паровым котлом.

глава 26

Эффекты квантования по уровню в цифровых системах управления

В предыдущих главах при исследовании цифровых систем управления рассматривались дискретные сигналы, квантованные только по времени. Предполагалось, что квантование по уровню вносит столь малые погрешности, что амплитуды сигналов могут считаться практически непрерывными. Данное предположение вполне оправдано, если сигналы изменяются в широком диапазоне и их обработка ведется на ЭВМ, обладающих большой разрядной сеткой. Если же отклонения сигналов невелики, а цифровой вычислитель оперирует со словами малой разрядности, то возникают существенные погрешности, которые должны учитываться при анализе цифровых систем.

26.1. ИСТОЧНИКИ ОШИБОК, СВЯЗАННЫХ С КВАНТОВАНИЕМ ПО УРОВНЮ

В управляющих ЭВМ и цифровых регуляторах обрабатываемые сигналы подвергаются квантованию по уровню на нескольких этапах. Если в системе управления используются цифровые датчики, их выходные сигналы могут принимать только определенные дискретные значения. Квантование по уровню происходит и в центральном процессоре (ЦП). Наконец, при переводе из цифровой в аналоговую форму в устройстве вывода сигналы также квантуются. Три этапа квантования можно выделить и в тех системах, где используются датчики с аналоговым выходом. Данный случай рассматривается в следующем разделе.

26.1.1. Аналоговый вход

Аналоговые входные устройства обычно выдают сигналы в виде напряжений стандартного диапазона (как правило, 0—10 В) или токов (0—20 мА или 4—20 мА). Эти сигналы квантуются по уровню в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) и переводятся в цифровые коды. На выходе преобразователя сигнал бывает представлен в формате с фиксированной точкой. Шаг квантования Δ (определяющий точность преобразования) задается разрядностью преобразователя WL (т. е. длиной его слова за исключением знакового разряда). Максимальное количество различных чисел, представимых с помощью двоичного кода разрядности WL , равно

$$NR = 2^{WL} - 1. \quad (26.1-1)$$

Отсюда можно найти шаг квантования:

$$\Delta = \frac{1}{NR} = \frac{1}{2^{WL} - 1} \approx \frac{1}{2^{WL}}. \quad (26.1-2)$$

Значения шага квантования, соответствующие АЦП с различной разрядностью WL , приведены в табл. 26.1.1.

Таблица 26.1.1

Величина шага квантования в зависимости от разрядности слова на выходе АЦП (без учета знакового разряда)

Длина слова, бит	7	8	10	12	15
Количество представимых чисел NR	127	255	1023	4095	32 767
Шаг квантования Δ	0,00787	0,00392	0,00098	0,00024	0,00003
Шаг квантования Δ , %	0,787	0,392	0,098	0,024	0,003

Соотношения между разрядностью АЦП и величиной шага квантования проиллюстрируем следующим примером:

Если максимальное значение напряжения равно $10 \text{ В} = 10\,000 \text{ мВ}$, при длине слова в 7 (15) двоичных разрядов минимальное преобразуемое напряжение составляет $\Delta = 78,7 (0,305) \text{ мВ}$. Если измеряется температура в диапазоне до 100° С , это соответствует $\Delta = 0,787 (0,003)^\circ \text{ С}$.

На выходе АЦП формируется цифровое значение, равное целому числу L шагов квантования Δ , содержащихся в аналоговой величине y (например, напряжении), поданной на его вход:

$$y_Q = L\Delta, \quad L = 0, 1, 2, \dots, NR. \quad (26.1-3)$$

Остаток $\delta_y < \Delta$ либо округляется, в результате чего получается ближайшее снизу или сверху к величине y/Δ целое число, либо попросту отсекается. В обоих случаях справедливо соотношение

$$y = y_Q + \delta_y, \quad (26.1-4)$$

где ошибка квантования δ_y заключена в следующих пределах:

- при округлении

$$-0,5 \leq (\delta_y/\Delta)_R < 0,5; \quad (26.1-5)$$

- при усечении

$$0 \leq (\delta_y/\Delta)_T < 1. \quad (26.1-6)$$

Таким образом, квантование по уровню является первым источником нелинейности (рис. 26.1.1).

26.1.2. Центральный процессор

Цифровые коды с выхода АЦП пересылаются в центральный процессор (ЦП), где обычно преобразуются в слова большей разрядности, т. е. в двоичные коды длины WL_N . Вычисления, связанные с реализацией линейных алгоритмов управления, включают следующие операции:

- вычисление отклонения регулируемой переменной

$$e_Q(k) = (y_Q(k))_{AD} - w_Q(k), \quad (26.1-7)$$

- вычисление управляющей переменной

$$u_Q(k) = -p_{1Q}u_Q(k-1) - \dots - p_{\mu Q}u_Q(k-\mu) + q_{0Q}e_Q(k) + \dots + q_{\nu Q}e_Q(k-\nu) \quad (26.1-8)$$

В ЦП возникают новые ошибки квантования, обусловленные конечной разрядностью чисел (WL_{CP}), посредством которых представлены следующие величины:

- задающая переменная $w_Q(k)$;
- управляющие переменные $u_Q(k-i)$, $i = 1, 2, \dots$;
- параметры p_{iQ} , q_{iQ} ;

- произведения $p_{iQ}u_Q(k-i)$, $q_{iQ}e_Q(k-i)$, $i=0, 1, 2, \dots$;
- сумма произведений $u_Q(k)$.

Если ЦП работает со словами длиной в 8—16 двоичных разрядов, ошибки квантования по уровню при выполнении арифметических операций в процессоре с числами, записанными в формате с фиксированной точкой, имеют тот же порядок, что и в АЦП. Их можно существенно снизить, производя все вычисления с двойной точностью.

Как правило, в управляющих ЭВМ предусмотрены средства для обработки чисел в формате с плавающей точкой, для записи которых отводится по два или более 16-разрядных слов. Если число с плавающей точкой

$$L = M \cdot 2^E \quad (26.1-9)$$

занимает, например, два 16-разрядных слова, то под его порядок E , определяющий положение двоичной точки относительно младшего разряда числа, отводится обычно 7 разрядов, а под мантиссу M (предполагается, что условная точка стоит перед ее старшим разрядом) — 23 разряда. При этом диапазон чисел, представимых в указанном формате, таков:

$$-0,8388608 \cdot 2^{-128} \leq L \leq 0,8388607 \cdot 2^{127}$$

или

$$-0,24651902 \cdot 10^{-39} \leq L \leq 0,14272476 \cdot 10^{39}.$$

Следовательно, в данном случае значение шага квантования по уровню составляет $\Delta \approx 10^{-39}$, т. е. является пренебрежимо малой величиной. Если для записи чисел используются слова малой разрядности в формате с фиксированной точкой, при вычислении произведений могут возникать значительные ошибки квантования и соответственно заметные нелинейные искажения (рис. 26.1.1).

Что же касается квантования задающей переменной и параметров регулятора, то оно вызывает лишь определенные отклонения от номинальных значений указанных величин и, следовательно, не создает дополнительных нелинейностей в контуре управления.

26.1.3. Аналоговый выход

Если в системе управления применяются исполнительные устройства с аналоговым входом, квантованные по уровню значения управляющей переменной $u_Q(k)$ пересылаются в цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), за которым стоит фиксирующий элемент. Как показано на рис. 26.1.1, ЦАП также является источником нелинейности, причем его характеристика отличается неоднозначностью.

Выше были перечислены те процессы в цифровом контуре управления, которые становятся причиной возникновения нелиней-

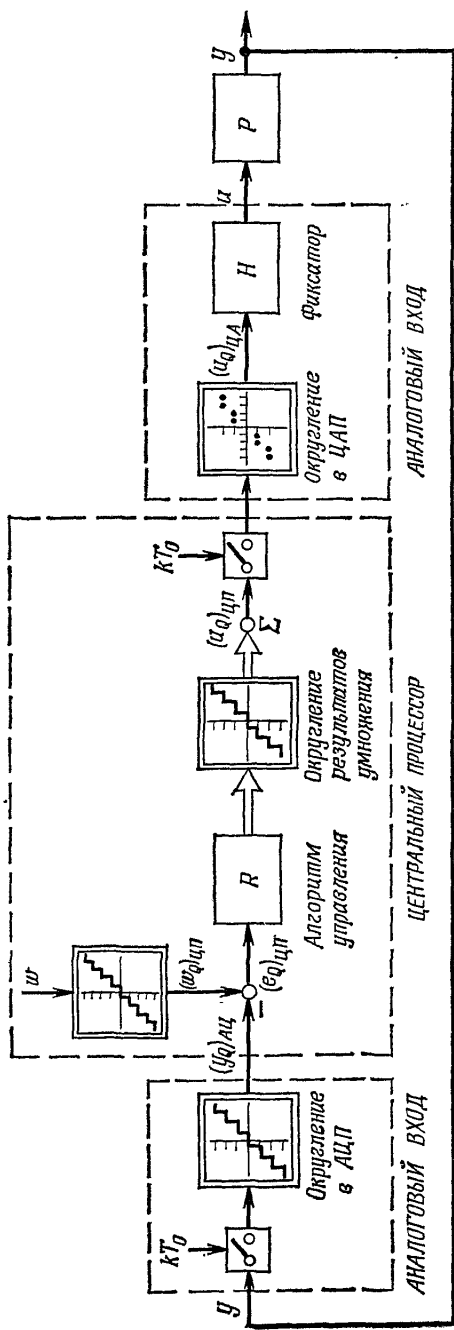


Рис. 26.1.1. Упрощенная схема возникновения в цифровом контуре управления нелинейностей, связанных с квантованием по уровню.

ностей. Известно, что теоретический анализ влияния даже одной нелинейной характеристики на динамические и статические свойства системы сопряжен со значительными трудностями. Тем более сложную задачу представляет исследование всех эффектов, связанных с квантованием по уровню в цифровом контуре управления. В известных публикациях на данную тему обычно предполагается, что ошибки квантования случайны и распределены по равномерному закону, либо просто рассматривается наихудший вариант, когда все ошибки квантования принимают максимально возможные значения (см. [26.1] — [26.6], [2.17]). Для анализа устойчивости используют метод описывающих функций [5.14], [2.19] или прямой метод Ляпунова [5.17]. Однако, по-видимому, наиболее достоверные результаты при анализе нескольких нелинейностей, обусловленных квантованием, а также нестандартных объектов и управляющих алгоритмов дает все же математическое моделирование.

Ниже на простых примерах исследуются явления, связанные с квантованием по уровню. Все источники квантования объединяются в три основные группы:

- *квантование переменных* (округление регулируемой или управляющей переменных, выполняемое в АЦП, ЦАП или ЦП);
- *квантование коэффициентов* (округление значений параметров регулятора);
- *квантование промежуточных результатов* при реализации алгоритма управления (в частности, округление произведений, входящих в уравнение (26.1-8)).

При изучении цифровых систем управления наибольший интерес представляет анализ влияния эффектов квантования на динамику замкнутого контура, который в отсутствие подобных нелинейностей является асимптотически устойчивым. Возможны следующие случаи:

а) Эффекты квантования настолько малы, что контур управления практически сохраняет *асимптотическую устойчивость*. Поэтому ошибка регулирования, вызванная начальным рассогласованием, сходится к нулю, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \approx 0.$$

б) Контур управления не возвращается в устойчивое нулевое состояние, и возникает *статическая ошибка по положению*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \neq 0.$$

в) При подаче постоянного возбуждения в контуре вырабатывается дополнительный случайный сигнал — *шум квантования* или *округления*.

г) Возникает *предельный цикл* с периодом M :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k + M) \neq 0.$$

26.2. АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ЭФФЕКТОВ КВАНТОВАНИЯ

26.2.1. Влияние квантования на переменные величины

Предположим, что в контуре управления присутствует единственный источник квантования — АЦП, работающий с шагом Δ (рис. 26.1.1). В этом случае ошибка квантования δ задается уравнением (26.1-5) или (26.1-6), если выполняется округление или усечение соответственно.

Шум квантования

Если переменная величина изменяется случайным образом, переходя различные уровни квантования, отдельные ошибки квантования $\delta(k)$ могут считаться статистически независимыми. Поскольку ошибки $\delta(k)$ способны принимать любые значения в соответствующих интервалах, определяемых соотношением (26.1-5)

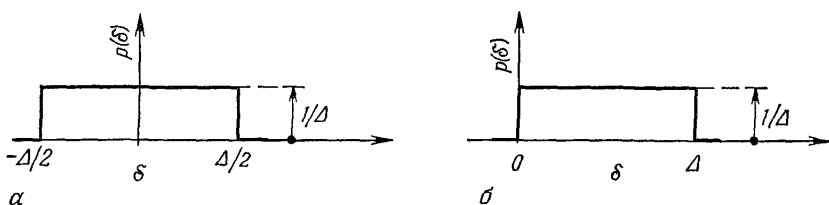


Рис. 26.2.1. Плотность вероятности ошибки квантования при: *a* — округлении; *б* — усечении.

или (26.1-6), можно полагать, что они распределены на этих интервалах по равномерному закону, как показано на рис. 26.2.1. Следовательно, оцифрованный сигнал y_Q можно рассматривать как аналоговый сигнал y , на который накладывается случайная помеха δ . Согласно уравнению (26.1-4),

$$y_Q(k) = y(k) - \delta(k). \quad (26.2-1)$$

Найдем математическое ожидание *шума квантования*; оно равно:

- при округлении

$$E \{ \delta(k) \} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\delta) \delta d\delta = 0; \quad (26.2-2)$$

- при усечении

$$E \{ \delta(k) \} = \Delta/2. \quad (26.2-3)$$

Дисперсия в обоих случаях одинакова:

$$\sigma_{\delta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta - E \{ \delta(k) \}]^2 p(\delta) d\delta = \Delta^2/12. \quad (26.2-4)$$

Если описанная помеха возникает в АЦП, она действует подобно белому шуму, наложенному на регулируемую переменную, и никакой регулятор не в состоянии уменьшить ее дисперсию. Наличие такого шума приводит к возникновению отклонений управляющей переменной, величина которых может превзойти шаг квантования в ЦАП. Данное явление иллюстрируется приведенным ниже примером.

Пример 26.2.1. Влияние ошибок квантования на управляющую переменную

Будем полагать, что объект управления ведет себя подобно низкочастотному фильтру. В гл. 13 было показано, что в этом случае динамика параметрически оптимизированного регулятора соответствует ПД-типу. При $e(k) = -u(k)$ алгоритм управления описывается уравнением

$$u(k) = -q_0 u(k) - q_1 u(k-1),$$

а аддитивный шум квантования — уравнением

$$u_\delta(k) = -q_0 \delta(k) - q_1 \delta(k-1).$$

Если помеха $u_\delta(k)$ фильтруется низкочастотным объектом, в результате чего шум на выходе $y_\delta(k) \approx 0$, дисперсию сигнала $u_\delta(k)$, представляющего процесс со скользящим средним, можно определить по приближенной формуле

$$\sigma_{u_\delta}^2 \approx [q_0^2 + q_1^2] \sigma_\delta^2.$$

Положив параметры регулятора $q_0 = 3$; $q_1 = -1,5$ и воспользовавшись уравнением (26.2-4), получим следующее значение среднеквадратичного отклонения:

$$\sigma_{u_\delta} \approx 3,35 \sigma_\delta = (3,35 / \sqrt{12}) \Delta = 0,97 \Delta.$$

Таким образом, при наличии шума квантования в АЦП среднеквадратичное значение управляющей переменной более чем в три раза превосходит ошибку квантования.

Учитывая, что при усечении математическое ожидание ошибки квантования отлично от нуля, более целесообразно использовать округление.

Статические ошибки и предельные циклы

Ниже рассматриваются два примера, иллюстрирующие эффекты квантования в тех случаях, когда в контуре управления действует детерминированный сигнал.

Пример 26.2.2. Статическая ошибка, обусловленная квантованием непрерывного сигнала в АЦП.

Исследуемый контур управления включает объект первого порядка

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k),$$

где $a_1 = -0,5867$; $b_1 = 0,4133$, и регулятор П-типа (см. пример 16.1). Ошибка регулирования описывается соотношением

$$e(k) = w(k) - y_Q(k).$$

В АЦП измеряемый аналоговый сигнал $u(k)$ округляется до второй цифры после десятичной запятой, в результате чего получается оцифрованная величина $u_Q(k)$. Реакции замкнутого контура с начальными условиями $u(k)=0$ и $y(k)=0$, $k < 0$, на ступенчатый задающий сигнал $w(k)=1(k)$ с учетом округления и без него приведены в табл. 26.2.1.

Таблица 26.2.1

Влияние округления в АЦП на переходный процесс в замкнутом контуре. $q_0 = 1,3$

k	Без округления		С округлением		
	u (k)	y (k)	u (k)	y (k)	$y_Q(k)$
0	1,3000	0	1,3000	0	
1	0,6015	0,5373	0,5980	0,5373	0,54
2	0,5670	0,5638	0,5720	0,5640	0,56
3	0,5653	0,5651	0,5720	0,5649	0,56
4	0,5652	0,5652	0,5720	0,5649	0,56
5		0,5652		0,5649	0,56

В данном случае шаг квантования $\Delta = 0,01$, а установившееся значение регулируемой переменной после округления равно $u_Q = 0,56$. Возникающая при этом статическая ошибка $\Delta u = 0,003$ столь мала, что ею можно пренебречь.

Пример 26.2.3. Предельный цикл, обусловленный квантованием сигнала в АЦП.

Предположим, что статический коэффициент усиления контура, рассмотренного в примере 26.2.2, возрастает до 2,0, в то время как точность

Таблица 26.2.2

Влияние округления в АЦП на переходный процесс в замкнутом контуре. $q_0 = 2,0$

k	Без округления		С округлением		
	u (k)	y (k)	u (k)	y (k)	$y_Q(k)$
0	2,0000	0	2,0000	0	0
1	0,3468	0,8266	0,3400	0,8266	0,83
2	0,7434	0,6283	0,7400	0,6254	0,63
3	0,6482	0,6759	0,6600	0,6727	0,67
4	0,6711	0,6644	0,6600	0,6675	0,67
5	0,6656	0,6672	0,6800	0,6644	0,66
6	0,6669	0,6665	0,6600	0,6708	0,67
7	.	0,6667	0,6600	0,6663	0,67
8	.	.	0,6600	0,6664	0,67
9	.	.	0,6800	0,6637	0,66
10		.	0,6600	0,6705	0,67
11			0,6600	0,6661	0,67
12			0,6800	0,6636	0,66
13			0,6600	0,6703	0,67
14			0,6600	0,6661	0,67
15			0,6800	0,6636	0,66

- оценивания дисперсии $\sigma_s^2 = E \{[s(k) - \bar{s}]^2\}$;
- в) ● оценивания параметрической модели сигнала (разд. 23.2.2);
- вычисления предсказания $\hat{y}(k/k-1)$;
- оценивания дисперсии σ_y^2 .

Ниже кратко обсуждается лишь один метод из числа простейших.

Для оценивания средних значений может быть использован алгоритм рекуррентного усреднения

$$\hat{y}(k+1) = \hat{y}(k) + \frac{1}{k+1} [y(k+1) - \hat{y}(k)]. \quad (27.3-30)$$

Усреднение медленно меняющихся сигналов целесообразно выполнять при постоянном коэффициенте коррекции, т. е.

$$\hat{y}(k+1) = \hat{y}(k) + K [y(k+1) - \hat{y}(k)], \quad (27.3-31)$$

где $K = 1/(1+k)$ в соответствии с (27.3-21). Полагая

$$\Delta y(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1),$$

запишем рекуррентное соотношение для оценки дисперсии:

$$\hat{\sigma}_y^2(k+1) = \hat{\sigma}_y^2(k) + K(k) [(y(k+1) - \hat{y}(k+1))^2 - \sigma_y^2(k)], \quad (27.3-32)$$

где $K(k) = 1/k$ или, лучше, $K = \text{const}$. Для выявления выбросов в общем случае необходимо знать вид функции распределения вероятности $p(y)$. При этом все измерения, для которых выполняется неравенство

$$|\Delta y(k+1)| = |y(k+1) - \hat{y}(k+1)| > \kappa \hat{\sigma}_y(k+1), \quad (27.3-33)$$

считаются ошибочными. В частности, при нормальном распределении берется $\kappa \geq 3$. В алгоритме управления вместо ложного сигнала $y(k+1)$ используется при этом оценка среднего $\hat{y}(k+1)$.

Объединение цифровых алгоритмов управления и исполнительных устройств

Данная глава посвящена вопросам стыковки алгоритмов управления с различными типами исполнительных устройств. Поэтому вначале рассматриваются способы управления исполнительными устройствами и их динамические характеристики.

Способы управления исполнительными устройствами

На выходе ЭВМ требуемая величина управляющей переменной или ее приращения представлена в виде цифрового кода. Поэтому для управления исполнительными устройствами непрерывного типа (пневматическими, гидравлическими или электрическими приводами) необходимо включать преобразователи цифра/аналог (ЦАП) с промежуточной памятью и фиксирующие элементы, называемые иначе экстраполяторами, сохраняющие требуемое значение управляющей переменной в промежутках между тактовыми моментами времени. Желаемое положение непрерывного исполнительного устройства U_R или его изменение u_R обеспечивается подачей постоянного напряжения 0—10 В или заданием постоянного тока 0—20 мА на входе исполнительного устройства, в котором они усиливаются и преобразуются в требуемый пневматический, гидравлический или электрический сигнал. В зависимости от количества используемых преобразователей цифра/аналог возможны два способа управления непрерывными исполнительными устройствами, схемы которых представлены на рис. 28.1, а, б. Для исполнительных устройств с непосредственным цифровым управлением (рис. 28, 2, в) необходимы только устройства адресации, коммутации и промежуточной памяти.

При управлении абсолютным положением $U(k)$ (0—100%) преобразователь цифра/аналог может выдавать сигналы одного знака, но должен иметь относительно большую длину слова (8—12 бит). При управлении отклонением $u(k)$ ЦАП должен учитывать оба знака, но может иметь меньшую длину слова (6—8 бит).

Динамические характеристики исполнительных устройств

В табл. 28.1 приведены некоторые характеристики наиболее часто используемых исполнительных устройств. Из-за большого разнообразия таких устройств в таблице рассмотрены лишь отдельные типы.

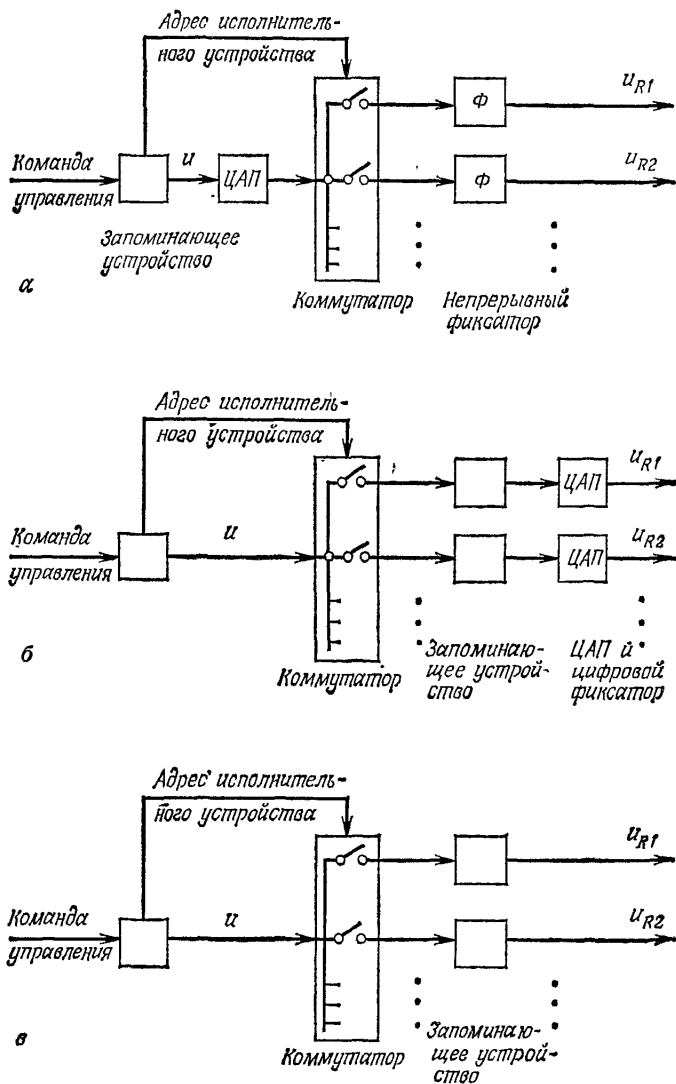


Рис. 28.1. Схемы управления исполнительными устройствами.

а — непрерывное исполнительное устройство: один ЦАП и несколько непрерывных фиксирующих элементов; **б** — непрерывное исполнительное устройство: несколько ЦАП; **в** — исполнительное устройство с цифровым управлением.

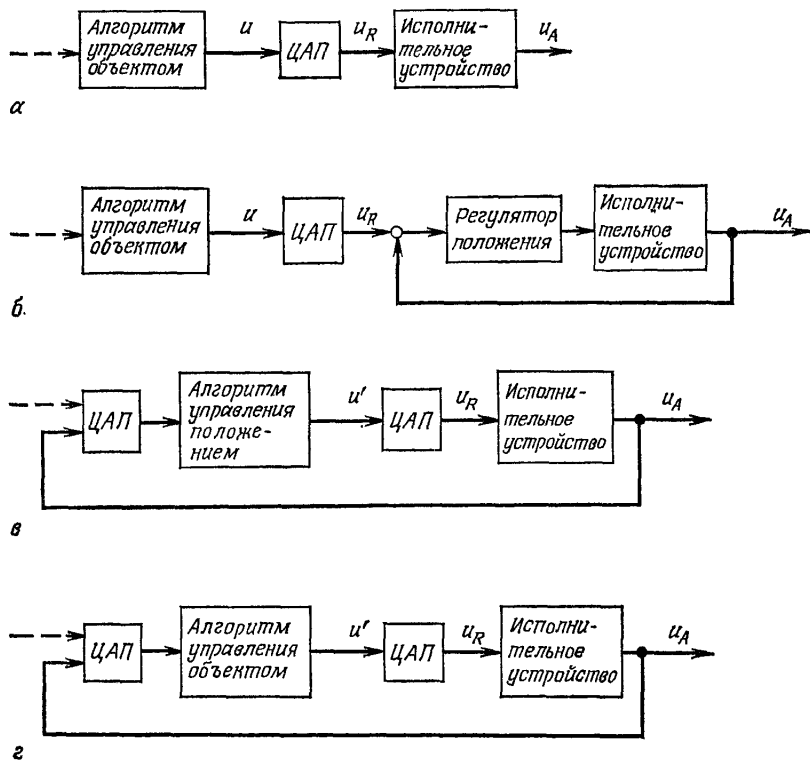


Рис. 28.2. Способы управления непрерывными исполнительными устройствами. а — прямое управление положением; б — управление с непрерывной обратной связью по положению; в — управление с дискретной обратной связью по положению; г — управление с подачей сигнала обратной связи в цифровой регулятор.

По своим динамическим характеристикам исполнительные устройства могут быть разделены на следующие группы:

Группа I: Пропорциональные исполнительные устройства

- приводы с пропорциональными характеристиками и задержками первого или более высокого порядка;
- пневматические приводы; гидравлические приводы с механической обратной связью.

Группа II: Интегрирующие исполнительные устройства с регулируемой скоростью

- линейные интегрирующие исполнительные устройства;
- гидравлические приводы без обратной связи; приводы, использующие электродвигатели постоянного тока с регулируемой скоростью.

Характеристики часто используемых исполнительных устройств

Тип	Конструкция	Входной сигнал	Устройство преобразования цифра/аналог	Преобразование входного сигнала	Временные характеристики	Группа	Мощность, Вт	Время нарастания, с	Упрощенная блок-схема
Пневматический	Мембрана с пружиной	Давление воздуха 0,2—1,0 кг/см ²	ЦАП	Электронно-пневматический	Пропорциональные с временной задержкой	I	0,1—2000	1—10	
	Клапан без механической обратной связи	Давление масла	ЦАП	Электрогидравлический	Интегрирующие	II	100—750 000	1—10	
Гидравлический	Клапан с механической обратной связью	Давление масла	ЦАП	Электрогидравлический	Пропорциональные с временной задержкой	I	100—750 000	1—10	
	Электродвигатель постоянного тока с параллельным возбуждением	Постоянное напряжение	ЦАП	Электронный усилитель	Интегрирующие с регулируемой скоростью	II	10—4000	0,01—60	
Электро-механический	Двухфазный электродвигатель переменного тока	Переменное напряжение	Блок управления	Трехпозиционное реле	Интегрирующие с постоянной скоростью	III	10—4000	1—60	
	Шаговый двигатель	Импульсы напряжения	Исполнительное устройство	Исполнительное устройство	Пропорциональные ступенчатого типа	IV		0,02—60	

Группа III: Интегрирующие исполнительные устройства с постоянной скоростью

- нелинейные интегрирующие исполнительные устройства;
- приводы, использующие электродвигатели переменного тока с трехпозиционным переключателем.

Группа IV: Исполнительные устройства дискретного типа

- интегрирующие или пропорциональные исполнительные устройства;
- шаговые электродвигатели.

Управление исполнительным устройством с использованием обратных и прямых связей

Для более точной обработки выходным сигналом $u_A(k)$ исполнительного устройства величины регулируемой переменной $u_R(k)$, выдаваемой алгоритмом управления, используются различные схемы управления, представленные на рис. 28.2:

а) ПРЯМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЕМ

Выходной сигнал $u_R(k)$ с ЦАП непосредственно подается на исполнительное устройство.

б) УПРАВЛЕНИЕ С НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ПОЛОЖЕНИЮ

Сигнал $u_R(k)$ рассматривается как задающая величина для непрерывного регулятора положения.

в) УПРАВЛЕНИЕ С ДИСКРЕТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ПОЛОЖЕНИЮ

Выход $u_A(k)$ исполнительного устройства поступает в управляющую ЭВМ, где формируется сигнал ошибки

$$u_e(k) = u(k) - u_A(k).$$

Далее, большей частью, используется П-регулятор, сигнал на выходе которого равен

$$u'(k) = q_{0u} u_e(k) = u_R(k).$$

г) УПРАВЛЕНИЕ С ПОДАЧЕЙ СИГНАЛА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЦИФРОВОЙ РЕГУЛЯТОР

Изменение положения $u_A(k)$ исполнительного устройства подается в ЭВМ. Алгоритм управления (объектом) вычисляет текущее значение управляющей переменной $u(k)$ с использованием предшествующих перемещений исполнительного устройства $u_A(k-1)$, $u_A(k-2)$, ...

$$u(k) = -p_1 u_A(k-1) - p_2 u_A(k-2) - \dots + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \dots \quad (28-1)$$

Схема *а* является простейшей, но в ней отсутствует обратная связь по выходу исполнительного устройства. Схемы *б* — *г* реализуют обратную связь по положению. К достоинствам схем *б* и *в* следует отнести наличие дополнительного регулятора положения, обеспечивающего отработку исполнительным устройством требуемого сигнала на выходе. Реализация схемы *в* требует меньшего такта квантования по сравнению с тактом управления объектом, что приводит к дополнительной нагрузке процессора. Схема *г* исключает необходимость применения специального алгоритма управления. Вычисление $u(k)$ производится с учетом измерений реальных положений исполнительных устройств. Достоинством этой схемы является то, что при использовании алгоритма управления интегрирующего типа в случае выхода исполнительного устройства на ограничения управляющая переменная не нарастает.

Рассмотрим подробнее вопросы управления исполнительными устройствами.

Пропорциональные исполнительные устройства

При использовании пропорциональных исполнительных устройств группы I изменение управляющей переменной, вырабатываемое алгоритмом управления, может непосредственно подаваться на исполнительное устройство, как это показано на рис. 28.2, *а*.

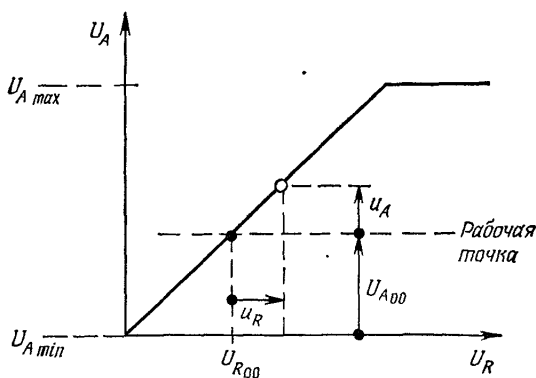


Рис. 28.3. Характеристика исполнительного устройства пропорционального типа. U_R — выход с ЦАП регулятора; U_A — положение исполнительного устройства; u_R — изменение выхода регулятора; u_A — изменение положения исполнительного устройства.

Для реализации управления с обратной связью по положению применимы схемы, представленные на рис. 28.2, *б* и *г*. Характеристика пропорционального исполнительного устройства вместе с используемыми обозначениями переменных приведена на рис. 28.3.

Исполнительные устройства интегрирующего типа с переменной скоростью

Схема управления, показанная на рис. 28.2, а, может быть применена для интегрирующих исполнительных устройств группы II, если эти интегрирующие свойства привода отражены в модели объекта управления, используемой для синтеза закона управления. Схемы б и в обеспечивают получение пропорциональных характеристик в контуре обработки положения, поэтому величина $u(k)$ или $u'(k)$ может определяться, как в случае пропорционального исполнительного устройства. Если алгоритм управления реализован относительно приращения управляющей переменной $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$, то применима схема а с прямой передачей управления. Так, для ПИД-регулятора это приращение определяется соотношением

$$\Delta u(k) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Соответствующая передаточная функция имеет вид

$$G_R(z) = \frac{\Delta u(z)}{e(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}.$$

Интегрирующему исполнительному устройству, имеющему передаточную функцию $G(s) = 1/Ts$, соответствует дискретная передаточная функция с фиксирующим элементом нулевого порядка:

$$G_A(z) = \frac{u_A(z)}{\Delta u(z)} = \frac{T_0}{T} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (28-1)$$

Тогда общую передаточную функцию алгоритма управления и исполнительного устройства можно записать следующим образом:

$$G_R(z)G_A(z) = \frac{u_A(z)}{e(z)} = \frac{T_0}{T} \frac{[q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}] z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (28-2)$$

Тем самым исполнительное устройство становится частью регулятора. Его постоянная интегрирования T должна быть учтена при определении параметров регулятора. (Отметим, что при математическом исследовании квантователь после исполнительного устройства отсутствует.)

Интегрирующие исполнительные устройства с постоянной скоростью

Исполнительные устройства группы III с интегрирующими характеристиками и постоянной скоростью перемещения должны быть снабжены трехпозиционными переключателями для обеспечения правостороннего и левостороннего перемещения, а также остановки. Первый способ прямого управления положением исполнительного устройства состоит в непосредственной подаче сигнала $u(k)$ на трехпозиционный переключатель. При этом рабочий орган

исполнительного устройства перемещается вправо или влево в течение межтактового промежутка времени, если $|u(k)| > u_{Rt}$, где u_{Rt} — величина зоны нечувствительности. Если же $|u(k)| < u_{Rt}$, то исполнительное устройство остается неподвижным. Чтобы изменения на выходе исполнительного устройства не были слишком большими, скорость перемещения должна быть относительно малой. Однако это может приводить к низкому качеству управления. Чтобы

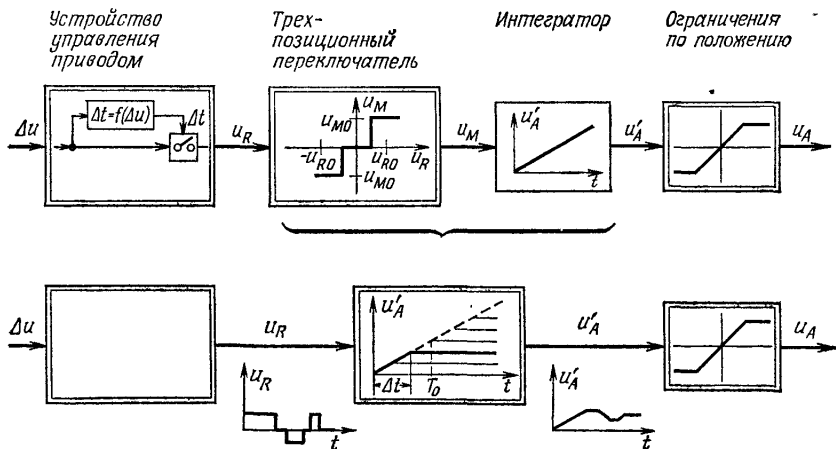


Рис. 28.4. Упрощенная блок-схема интегрирующего исполнительного устройства с постоянной скоростью перемещения.

получить те же самые перемещения привода за более короткое время, необходимо повысить его скорость, а также вычислять и запоминать длительность включения $T_A < T$. Для экономии процессорного времени эти задачи решаются с помощью специального устройства управления приводом [1.11], которое может рассматриваться как преобразователь цифра/аналог с выходом в виде последовательности прямоугольных импульсов длительности T_A . На рис. 28.4 представлена упрощенная блок-схема исполнительного устройства с указанным управляющим устройством.

Интегрирующие исполнительные устройства с постоянной скоростью перемещения описаны в табл. 28.1 с помощью трехпозиционного переключателя и линейного интегрирующего звена. Пусть T_s — время, за которое исполнительное устройство проходит свой полный диапазон:

$$U_{A \max} = U_{A \max} - U_{A \min}. \quad (28-3)$$

Тогда с учетом того, что $u_R = +u_{R0}$, $u_R = -u_{R0}$ или $u_R = 0$ в зависимости от положения трехпозиционного переключателя, имеем для скорости изменения положения привода

$$\dot{U}'_A = \frac{dU'_A}{dt} = \frac{\Delta U'_A}{\Delta t} = \frac{U_{A \max}}{T_s} \frac{u_{R0}}{|u_{R0}|}. \quad (28-4)$$

Следовательно, изменение положения за период включения T_A равно

$$\begin{aligned} \Delta U'_A(T_A) &= U'_A(T_A) - U'_A(0) = u'_A(T_A) = \\ &= \int_0^{T_A} \dot{U}_A(t) dt = U_{A \max} \frac{T_A}{T_S} \frac{u_{R0}}{|u_{R0}|}. \end{aligned} \quad (28-5)$$

Наличие трехпозиционного переключателя приводит к появлению нелинейных свойств. Если зона нечувствительности переключателя достаточно велика, эти нелинейности не приводят к возникновению предельного цикла и обеспечивается устойчивое установившееся состояние [5.14, гл. 52]. Для изменения положения исполнительного устройства вычисленного алгоритмом управления устройство управления приводом вырабатывает импульсы с амплитудами u_{R0} , 0 или $-u_{R0}$ и длительностями $T_A(k)$, т. е. модулированные по длительности импульсы с тремя значениями амплитуды (рис. 28.4). Это приводит к еще большей нелинейности. Наименьшая реализуемая длительность включения T_{A0} определяет единицу квантования

$$\Delta_A = T_{A0}/T_S, \quad (28-6)$$

соответствующую минимальному перемещению исполнительного устройства. Эту величину целесообразно выбирать равной единице квантования соответствующего преобразователя код/аналог, $\Delta_A = \Delta_{\text{ЦАП}}$, т. е. около 6—8 бит. Наименьшая длительность включения должна быть достаточной для того, чтобы привести в действие исполнительное устройство. Пусть в течение тактового промежутка времени требуется изменить положение исполнительного устройства на величину

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = j\Delta_A, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда из уравнения (28-5) необходимая длительность включения $T_A(k)$ определяется следующим образом:

$$T_A(k) = jT_{A0} = T_S \frac{|u_{R0}|}{u_{R0}} \frac{\Delta u(k)}{U_{A \max}}. \quad (28-7)$$

Эта величина может, например, поступать на устройство управления приводом в виде числа j . Наибольшее перемещение за такт квантования T_0 в соответствии с уравнением (28-5) равно

$$\Delta U'_{A \max} = U_{A \max} \frac{T_0}{T_S}.$$

Отсюда следует, что изменение положения исполнительного устройства за один такт квантования при шаге квантования Δ_A лежит в диапазоне

$$0 \leq \Delta U'_A \leq U_{A \max} T_0/T_S. \quad (28-8)$$

В результате переходный процесс принимает вид, показанный на рис. 28.4.

Поскольку исполнительные устройства с постоянной скоростью делают контур управления нелинейным, в следующем разделе кратко рассмотрены методы получения их *линеаризованных моделей*.

А) МЕТОД МАЛЫХ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ

Кусочно-линейный характер реакции исполнительных устройств с трехпозиционным переключателем и устройством управления на ступенчатое воздействие может быть приближенно описан моделью первого порядка, включающей временные задержки и аperiodическое звено с амплитудно-зависимой постоянной времени

$$T_A = T_S \Delta U'_A / U_{\max}. \quad (28-9)$$

Если эти постоянные времени пренебрежимо малы по сравнению с постоянными времени объекта управления, то линеаризованное исполнительное устройство представляет собой звено пропорционального типа без задержки. Методы упрощения математических моделей путем пренебрежения малыми постоянными времени исследованы в работах [3.4, 3.5]. При использовании непрерывных ПИД-регуляторов для управления объектами порядка $n=2, 4, 6$ или 8 с одинаковыми постоянными времени T , малыми постоянными времени T_{sm} можно пренебречь, если

$$T_{sm} / T_{\Sigma} \leq 0,015, 0,045, 0,083 \text{ или } 0,13, \quad (28-10)$$

где $T_{\Sigma} = nT$ является суммой постоянных времени (разд. 3.7.3). При этом ошибка квадратичного критерия качества (4-1) для $r=0$ не превышает 20%. Уравнения (28-9) и (28-10) определяют диапазон изменения положений исполнительного устройства, в котором он может быть линеаризован

$$\Delta U'_A / U_{A\max} \leq T_{sm} / T_S. \quad (28-11)$$

Б) МЕТОД ЭФФЕКТИВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Еще один способ линеаризации основан на оценивании малых постоянных времени исполнительного устройства, исходя из отношения эффективных значений реакций на пилообразный знакопеременный и ступенчатый входные сигналы:

$$\kappa = \left(\sin \frac{\omega T_A}{2} \right) / \frac{\omega T_A}{2}, \quad (28-12)$$

где T_A — величина, определяющая периодичность пилообразной функции (см. [3.11]).

Если допустимы ошибки порядка 5—20%, что соответствует $\kappa = 0,95—0,80$, то для искомой максимальной частоты ω_{\max} должно выполняться условие

$$T_A \omega_{\max} \leq 1,1—2,25. \quad (28-13)$$

В общем случае $\omega_{\max} = \omega_s = \pi / T_0$ (гл. 27). Следовательно,

$$T_A / T_0 \leq 0,35—0,72 \quad (28-14)$$

или с учетом уравнения (28-7)

$$\Delta U'_A / U_{A\max} \leq (0,35 - 0,72) T_0 / T_{\zeta}. \quad (28-15)$$

Это приводит к следующему эмпирическому правилу:

Исполнительное устройство с постоянной скоростью может быть линеаризовано, если максимальная длительность включения T_A составляет примерно половину такта квантования T_0 .

Заметим, что для использования этого правила такт квантования должен быть выбран таким образом, чтобы $\omega_{\max} = \omega_s$.

В работе [2.27] и табл. 29.2 рассматривается применение этих двух методов при управлении впускным клапаном паронагревателя и клапаном расхода пара теплообменника. Линеаризуемый диапазон положений находится в пределах от 12 до 50%.

Проведенное исследование касалось непосредственного прямого способа управления исполнительными устройствами. Однако для исполнительных устройств интегрирующего типа с постоянной скоростью также может быть использован *метод управления с цифровой или непрерывной обратной связью*, а также метод введения в алгоритм управления обратной связи по положению.

Пропорциональные исполнительные устройства дискретного типа (шаговые двигатели)

Исполнительные устройства дискретного типа (группа IV), например шаговые двигатели, очень удобны для стыковки с управляющими ЭВМ или цифровыми регуляторами. ЦАП на их входе не нужен, а их выход пропорционален количеству управляющих импульсов. Усилитель преобразует маломощные импульсы на выходе управляющей ЭВМ в мощные импульсы, поочередно возбуждающие обмотки статора двигателя. Угол поворота за один шаг варьируется от 1 до 240 град. Чем меньше угол поворота за один шаг, тем большее число обмоток необходимо для этого и тем меньшую величину имеет момент вращения. Возможна отработка как одиночных импульсов, так и последовательности импульсов с частотой до нескольких кГц. На низких частотах шаговый двигатель может быть остановлен в пределах одного шага. На больших частотах, где рассматриваемое исполнительное устройство представляет собой синхронный электродвигатель, такая остановка невозможна из-за наличия инерции. Если необходима точная отработка положения, как, например, в случае прямого управления исполнительным устройством, момент инерции регулируемого клапана или другого устройства, а также частота перемещения шагового двигателя должны быть выбраны малыми. Повышение скорости отработки положения может быть достигнуто с помощью цифровой обратной связи [2.18].

Исключение накопления ошибки

Хорошо известно, что регуляторы интегрирующего типа продолжают интегрировать ошибку управления и после того, как один из сигналов в контуре достигает своего предельного значения (обусловленного, например, механическим ограничением на перемещение привода). Поэтому при смене знака ошибки управления требуется достаточно длительный промежуток времени, чтобы восстановить состояние интегратора, соответствующее моменту возникновения насыщения. Во избежание этого явления возможны следующие меры. При достижении исполнительным устройством ограничений $u_{A \max}$ или $u_{A \min}$ в алгоритме управления следует использовать эти истинные значения выхода, а не вычисленные значения $u(k-1)$, $u(k-2)$ Это может быть достигнуто с помощью концевого выключателя, обратной связи по положению или при наличии однозначной связи между выходами вычислителя и исполнительного устройства с помощью специальной программы вычисления положения. Другой возможностью является введение обратной связи по реальному положению исполнительного устройства в алгоритме управления в соответствии с уравнением (28-1).

Автоматизированные методы проектирования алгоритмов управления

Обычно непрерывные регуляторы и цифровые алгоритмы управления ПИД-типа рассчитываются и настраиваются с помощью метода проб и ошибок, основанного на эмпирических правилах, а иногда и с помощью моделирования. Для объектов управления с большим временем установления переходных процессов или для многомерных объектов с сильными перекрестными связями эта процедура требует довольно много времени и не обеспечивает наилучшего качества управления. Более высокое качество управления с меньшими временными затратами может быть достигнуто с помощью автоматизированных методов расчета цифровых систем управления.

На основе рассмотренных в этой книге методов проектирования алгоритмов управления с обратными и прямыми связями могут быть разработаны программы, позволяющие проектировать алгоритмы управления в диалоговом режиме. Необходимым предварительным условием является, конечно, знание соответствующих математических моделей объектов управления и, возможно, моделей сигналов. Разработка моделей может осуществляться как теоретическими методами, так и с помощью процедуры идентификации, описанной в разд. 3.7.4. Теоретические методы построения модели должны использоваться, если объект не доступен для исследования, например находится в стадии разработки. Однако существует ряд естественных факторов, ограничивающих точность теоретической модели. К ним относятся ограниченная точность получаемых данных и параметров объекта, упрощающие допущения, используемые при выводе уравнений модели, а также неточности задания моделей привода, регулирующих элементов и датчиков. В частности, для многих промышленных объектов (химической, энергетической и тяжелой промышленности) физические или химические законы либо неизвестны, либо не могут быть выражены с помощью разумного числа математических уравнений. Поэтому, измеряя динамические характеристики существующего объекта, т. е. используя методы идентификации, можно построить модель значительно быстрее и с большей степенью точности. Это может быть выполнено вне связи с объектом на автономной ЭВМ либо, если вычислитель уже состыкован с объектом управления, в режиме нормальной эксплуатации. Поскольку для расчета алгоритмов управления более всего удобны параметрические модели объектов управления, применимы методы

идентификации, описанные в гл. 23. В работах [3.13], [29.1]—[29.4], [23.16] описаны пакеты программ для идентификации объектов управления, включающие генерацию возмущающих сигналов, фильтрацию сигналов объекта управления, различные методы оценивания параметров, определение порядка модели и проверку ее достоверности. Автоматизированное проектирование алгоритмов управления с использованием полученных моделей может быть организовано в следующей последовательности при условии, что ЭВМ подключена к объекту управления в режиме *on-line*.

1. *Выбор структуры системы управления*
— одноконтурная, каскадного типа, многоконтурная;
— с прямой передачей сигнала;
2. *Ввод информации о моделях объекта управления и сигналов в программу расчета регулятора.*
3. *Расчет различных алгоритмов управления.*
4. *Моделирование системы управления.*
5. *Модификация алгоритмов управления и их окончательный выбор.*
6. *Реализация алгоритмов управления на ЭВМ.*
7. *Задание реальных условий функционирования*
— ограничения на управляющие переменные;
— задающие переменные.
8. *Проверка работы системы и анализ качества управления.*

При использовании для автоматизированного проектирования ЭВМ в режиме *off-line* реализуются пункты 1—5.

Такой подход к решению задачи синтеза имеет ряд преимуществ:

- Расчет автоматизируется; его результатом является цифровой закон управления.
- Моделирование системы управления с различной структурой и алгоритмами управления не нарушает нормальной работы объекта.
- Модификация алгоритма осуществляется просто.
- Экономится оборудование и время запуска, особенно для объектов управления с большим временем установления, сложными динамическими характеристиками или значительным взаимовлиянием между координатами.
- Улучшается качество управления за счет более точно настроенных простых алгоритмов или за счет применения более сложных логических алгоритмов управления.
- Можно определить зависимость параметров регулятора от рабочей точки. Это обеспечивает быстроту расчета алгоритмов управления с прямой связью.

Непременным условием практической значимости описанной про-

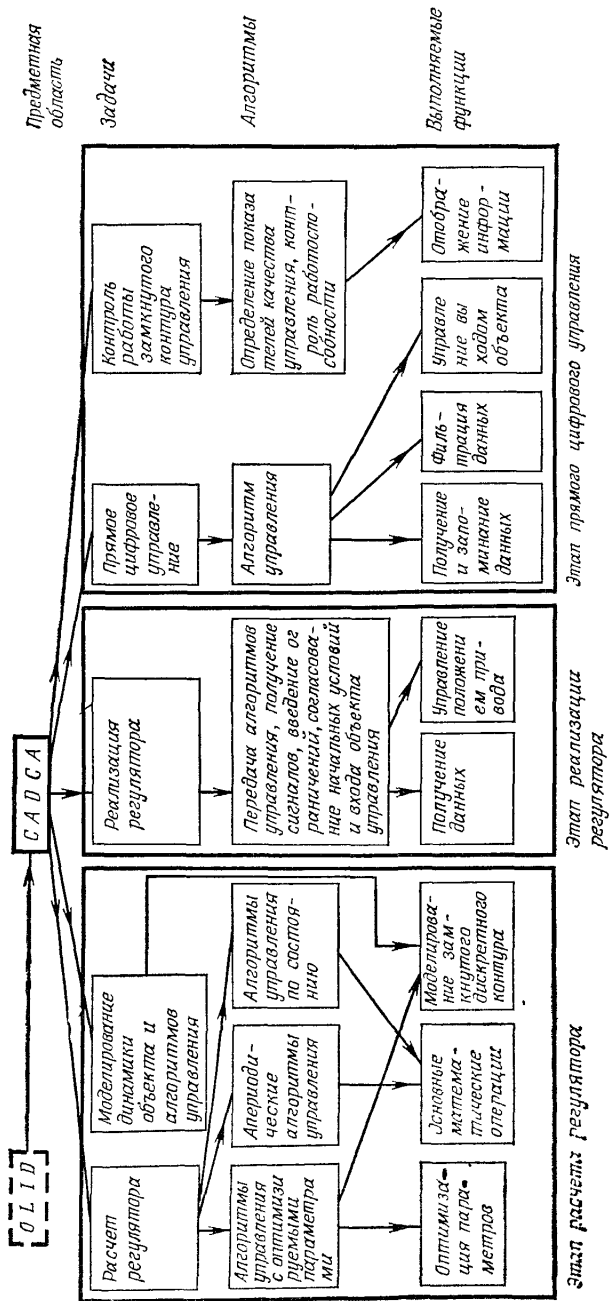


Рис. 29.1. Структура пакета программ CADCA.

цедуры проектирования является отсутствие изменений или незначительные изменения характеристик объекта управления за время между проведением идентификации объекта и применением результатов проектирования для управления. Для объектов управления с медленно меняющимися характеристиками могут быть использованы самонастраивающиеся или адаптивные алгоритмы управления (гл. 25).

Так, например, на рис. 29.1 показана структура пакета программ CADCA-SISO (computer aided design of control algorithm for

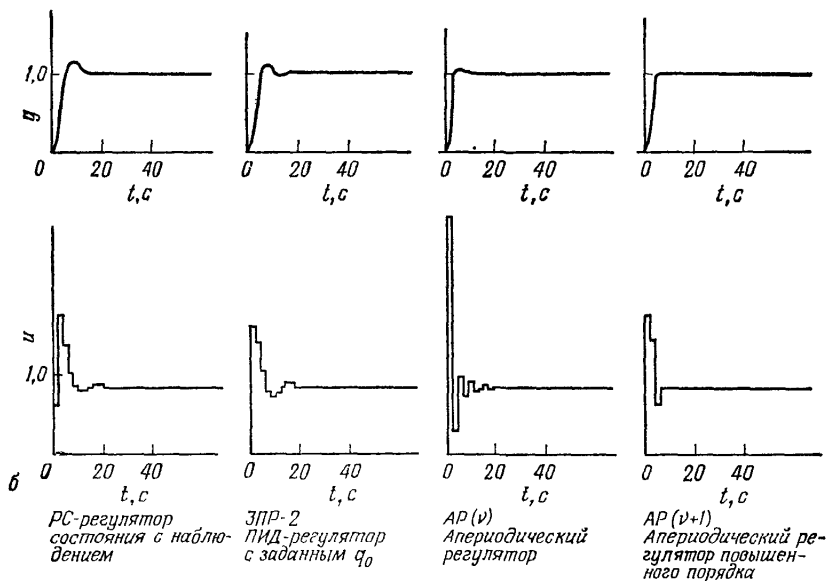
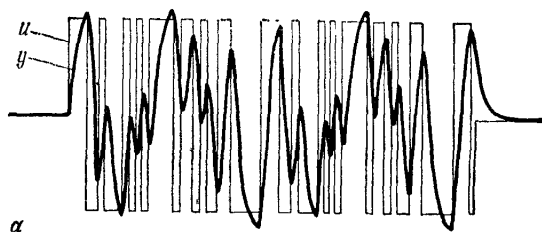


Рис. 29.2. Переходные процессы в замкнутом контуре с непрерывным объектом и алгоритмами управления, полученными с помощью пакета CADCA. Передаточная функция объекта $G_p(s) = 1,2/(1+4,2s)(1+s)(1+0,9s)$, $T_0 = 2c$.

а — входной и выходной сигналы объекта при идентификации с подключением ЭВМ в режиме *on-line*; б — входной и выходной сигналы объекта для четырех различных алгоритмов управления при ступенчатом изменении задающей переменной.

single input/single output processes), предназначенного для автоматизированного проектирования алгоритмов управления для объектов с одним входом и одним выходом [29.5]—[29.7]. Развитие этого пакета показало, что иерархическая, модульная и наглядная структура программ с простыми и понятными средствами общения с пользователем имеет много преимуществ. На рис. 29.1 выделены четыре иерархических уровня и три этапа проектирования. На рис. 29.2 представлены результаты аналогового моделирования системы управления объектом третьего порядка, включающие процесс идентификации, с помощью пакета программ OLID-SISO [29.4]. Показатели качества управления хорошо согласуются с теоретическими результатами. Этот же пакет программ был использован для расчетов в разд. 11.4.

Практическое применение идентификации и цифрового управления

В этой последней главе рассматривается применение различных методов идентификации и цифрового управления при разработке систем управления промышленными объектами. В предыдущих главах было показано, что существуют два способа совместного применения методов идентификации и расчета систем управления:

- Идентификация с последующим автоматизированным расчетом алгоритмов управления;
- Разработка самооптимизирующих адаптивных (самонастраивающихся) алгоритмов управления.

В первом случае идентификация модели объекта управления осуществляется один раз, после чего рассчитывается алгоритм управления с постоянными параметрами в режиме *on-line* или *off-line* (гл. 29). Во втором случае идентификация модели объекта производится периодически и после очередного получения оценок модели объекта в режиме *on-line* определяются параметры алгоритма управления (гл. 25). В разд. 30.1 и 30.2 демонстрируется применение первого метода при расчете систем управления теплообменника и барабанной сушилки, а в разд. 30.3 приводятся результаты использования обоих методов для расчета и моделирования системы управления парогенератором.

30.1. ЦИФРОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛООБМЕННИКОМ

На рис. 30.1.1 представлена схема теплообменника с паронагревателем, который состоит из 14 труб с внутренним диаметром $d_i = 25$ мм и длиной $l = 2,5$ м. Входом объекта является положение вен-

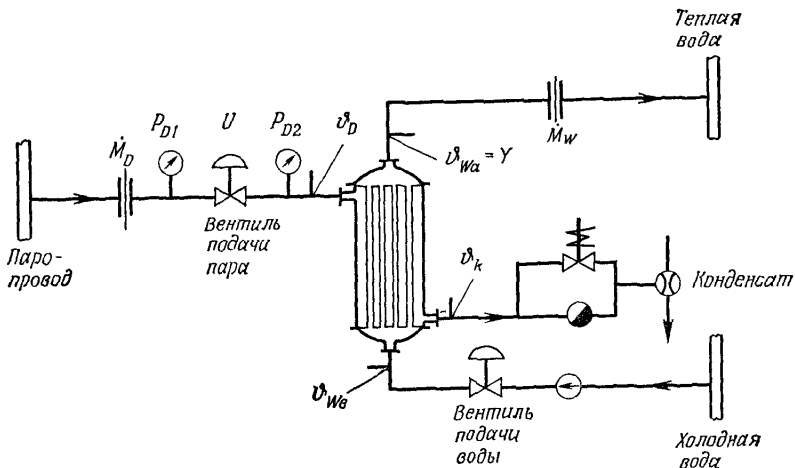


Рис. 30.1.1. Схема теплообменника с паронагревателем. Вход: положение U пневматического вентиля, регулирующего подачу пара. Выход: температура воды γ .
 $\dot{M}_W = 3100$ кг/ч. $\dot{M}_D = 30$ кг/ч. $P_{D1} = 2,5$ бар.

тиля U , регулирующего с помощью пневматики подачу пара, а выходом Y — температура воды, измеряемая с помощью термопары. Для идентификации в режиме *on-line* была использована управляющая ЭВМ типа HP2100A. Вид псевдослучайного двоичного сигнала (ПСДС) на входе и соответствующий выходной сигнал показаны на рис. 30.1.2. С помощью рекуррентных методов корреляции и

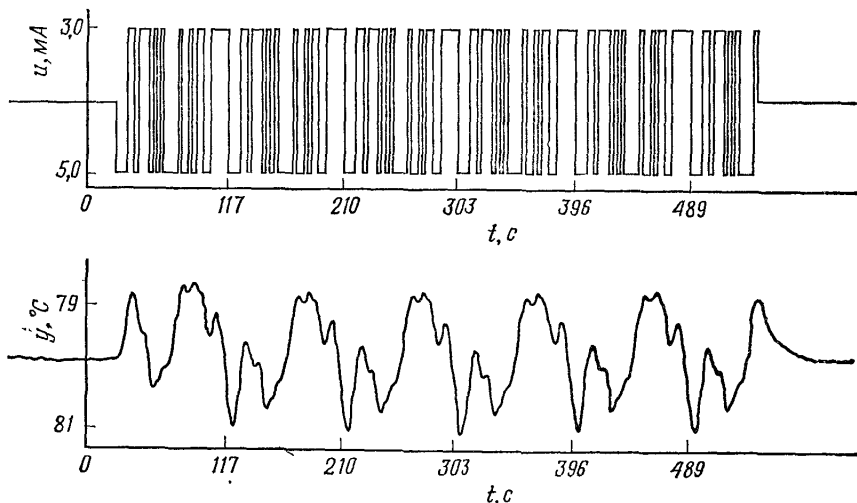


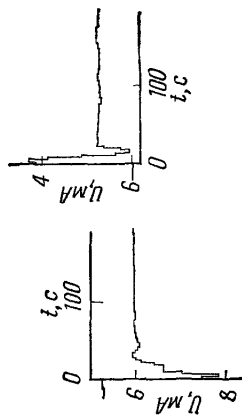
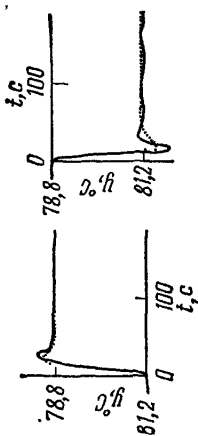
Рис. 30.1.2. Входной и выходной сигналы объекта управления при идентификации в режиме *on-line*. ПСДС: период $N=31$. Период синхронизации $\lambda=1$. Такт квантования $T_0=3$ с.

наименьших квадратов РКОР-МНК за время идентификации около 10 мин была получена следующая модель объекта управления:

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{-0,0274z^{-1} - 0,0692z^{-2} - 0,0218z^{-3}}{1 - 1,2329z^{-1} + 0,0478z^{-2} - 0,01276z^{-3}} z^{-1}.$$

Такт квантования полагался равным $T_0=3$ с. Поскольку время установления переходного процесса объекта $T_{95}=60$ с, то отношение $T_{95}/T_0=20$. С помощью программы оценивания порядка модели было найдено, что $m=3$, а $d=1$. Более детально вопрос рассмотрен в работах [29.1], [29.2].

На рис. 30.1.3а, 30.1.3б для различных алгоритмов управления, полученных с помощью пакета программ CADCA-SISO, показаны переходные процессы при ступенчатом изменении задающей переменной. Из-за нелинейности характеристик вентиля, регулирующего подачу пара, и теплообменника вид переходного процесса зависит от знака ступеньки. Тем не менее результаты моделирования достаточно хорошо (в среднем) согласуются с реальным поведением объекта. Различные алгоритмы управления демонстрируют типовые переходные процессы, рассмотренные в гл. 11.



Регулятор состояния с наблюдателем

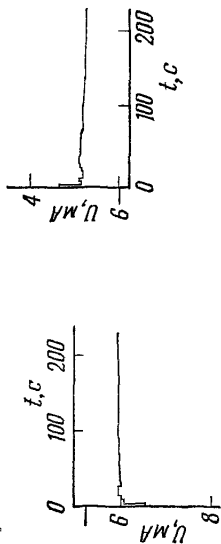
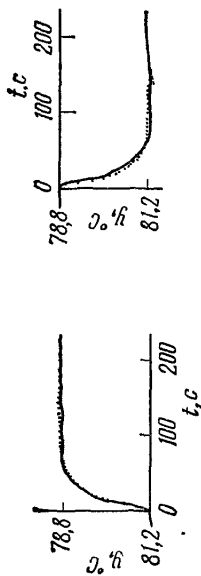
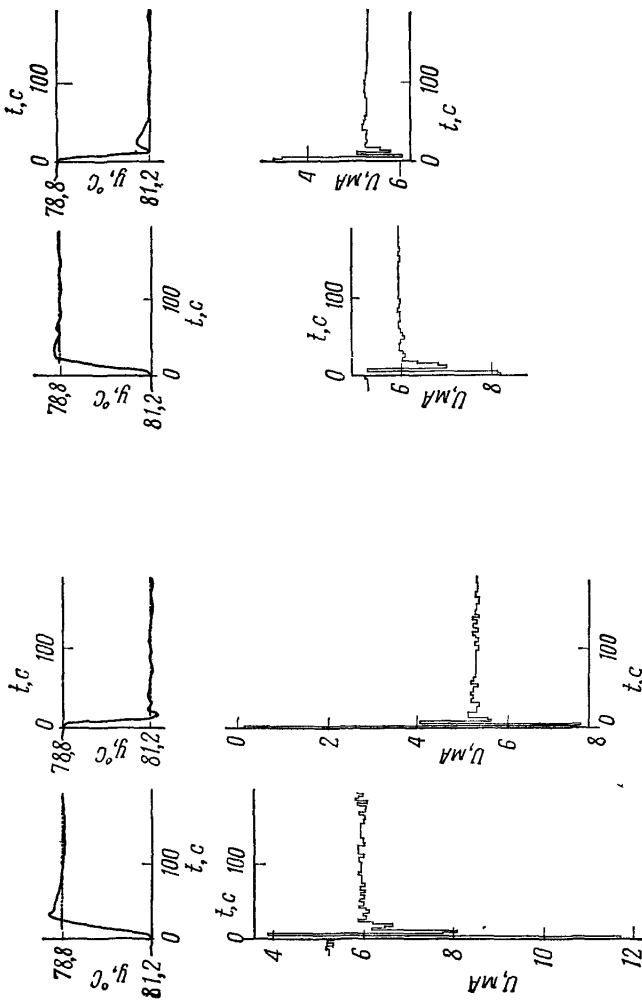
Регулятор с оптимизируемыми параметрами
ЗПР-3 (ПИД)

Рис. 30.1.3а. Переходные процессы для различных алгоритмов управления, синтезированных с помощью пакета программ CADCA-SISO на основе идентификации модели объекта. Вариации задающей переменной имеют разные знаки. — результат измерения реакции объекта управления; результат моделирования (в процессе этапа расчета).

PC	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	r						
	-3,9622	-3,4217	-2,7874	0,4472	1,3372	0,04						
ЗПР-3	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
	-1,7125	2,3578	-0,7781	—	—	—	1,0	-1,0	—	—	—	0,01



Аперийодический регулятор $AP(v)$

Аперийодический регулятор повышенного порядка $AP(v+1)$

Рис. 30.1.36. Переходные процессы для различных алгоритмов управления, синтезированных с помощью пакета программ CADCA-SISO на основе идентификации модели объекта. Вариации задающей переменной имеют разные знаки.

— результат измерения реакции объекта управления; результат моделирования (в процессе этапа расчета).

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
$AP(v)$	-8,4448	10,4119	-4,0384	1,0775	0,0000	-	1,0000	0,0000	-0,2317	-0,5841	-0,1842	-
$AP(v+1)$	-3,8612	0,1770	3,8048	-1,6993	0,5848	0,0000	1,0000	0,0000	-0,1059	-0,3928	-0,4013	-0,1000

30.2. ЦИФРОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ БАРАБАННОЙ СУШИЛКОЙ

При производстве сахара свежая свекловичная стружка или пульпа является промежуточным продуктом и идет на корм скоту. Пульпа термически высушивается в барабанной сушилке. Нормально высушенная пульпа должна содержать 10% влаги или 90% сухого вещества. При более высокой влажности происходит самонагревание массы во время хранения, а также разложение питательных веществ. Если влажность меньше 10%, то пересушенная пульпа становится хрупкой. Кроме того, ее производство становится менее экономичным из-за увеличения расхода топлива и снижения веса. Поэтому необходимо поддерживать процентное содержание сухого вещества с точностью $\pm 1\%$.

На рис. 30.2.1 приведена схема барабанной сушилки. Нагрев сушильной печи осуществляется за счет сжигания мазута (жидкого топлива). Нагретые газы из парового котла смешиваются с продуктами сгорания для охлаждения деталей сушильной печи. Вытяжной вентилятор прогоняет эту смесь через барабанную сушилку. Сырая пульпа (отжатая пульпа с содержанием влаги 75—85%) подается в барабан шнековым транспортером с регулируемой скоростью вращения шнека. Внутри барабана закреплены крестообразные выступы для более равномерного распределения пульпы по барабану. В конце барабана другой шнековой транспортер доставляет высушенную пульпу на элеватор. Теплопередача осуществляется главным образом конвекционным способом. В процессе сушки можно выделить три стадии. Вначале происходит испарение воды с поверхности пульпы, затем зона испарения смещается во внутренние области свекловичных стружек и, наконец, на третьей стадии давление паров внутри свекличных стружек становится меньше давления насыщенного пара из-за гигроскопических свойств пульпы.

Управление процессом сушки весьма сложно из-за его неминимально-фазовых свойств с временами запаздывания в несколько минут, длительного времени установления (около 1 часа), большого диапазона колебаний влажности сырой пульпы и неизмеримых изменений свойств самой пульпы. По этой причине барабанные сушилки управляются главным образом вручную с использованием непрерывных регуляторов температуры на некоторых участках процесса. Однако качество управления при этом неудовлетворительно, так как величина допуска превышает $\pm 2,5\%$ (рис. 30.2.2, а). На рис. 30.2.2 представлена блок-схема установки. Основным регулируемым показателем является содержание сухого вещества в высушенной пульпе. В качестве добавочных регулируемых параметров могут быть использованы температуры газа на выходе сушильной печи, в середине барабана и на выходе из сушилки. Основной управляющей переменной является расход мазута. Как дополнительная управляющая переменная может быть использована ско-

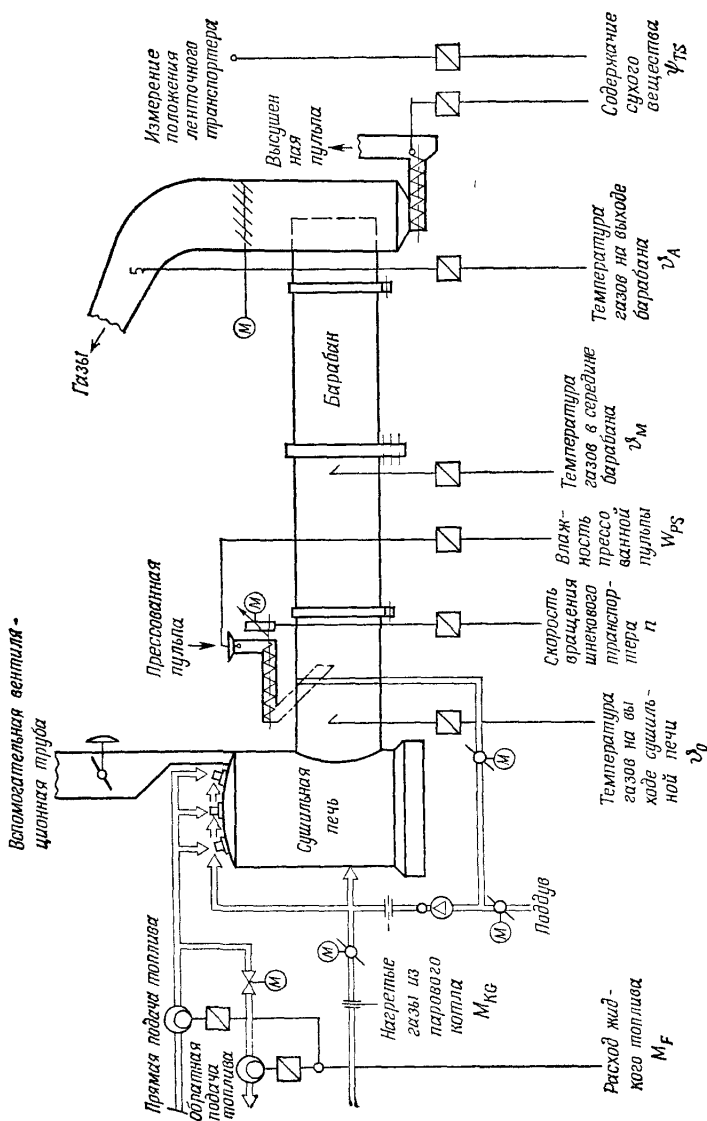


Рис. 30.2.1. Схема барабанной сушилки (Зюддойче Цукер АГ): диаметр барабана $D_D=4,6$ м; длина барабана $L_D=21,0$ м; скорость подачи сырой пудры $M_{PS \max}=80$ т/ч; расход нагретого газа $M_{KG \max}=80\ 000$ м³/ч; расход топлива $M_F \max=4,8$ т/ч; температуры $\theta_0=1050^\circ\text{C}$; $\theta_M=140-210^\circ\text{C}$; $\theta_A=110-155^\circ\text{C}$.

рость вращения шнека транспортера, подающего сырую пульпу. Возмущающим воздействием является содержание воды в прессованной пульпе.

Задача состоит в улучшении качества управления за счет применения управляющей ЭВМ. Из-за сложности динамических характеристик объекта управления и большого времени установления

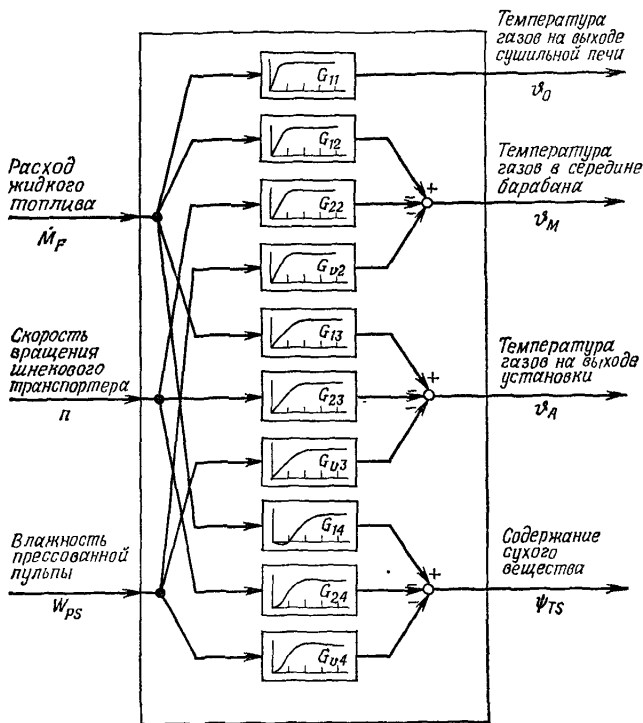


Рис. 30.2.2. Блок-схема модели барабанной сушилки.

предпочтение было отдано автоматизированным методам расчета системы управления. Поскольку физические законы, описывающие процессы передачи тепла и массы, а также движения пульпы исследованы недостаточно, необходимая математическая модель установки не может быть получена теоретическим путем. Предпочтительнее осуществить идентификацию объекта управления. Из-за наличия больших возмущений по измерению реакции объекта на ступенчатое воздействие трудно получить информацию о его динамических характеристиках. Поэтому при оценивании параметров объекта в качестве входного сигнала был использован псевдослучайный двоичный сигнал (ПСДС) [30.1], [30.2]. Для обработки информации было разработано специальное цифровое устройство на базе микро-ЭВМ. Это устройство в тактовые моменты времени измеряет соответствующую

щие сигналы, преобразует в цифровую форму и запоминает на перфоленте. Вычисление параметров выполняется в режиме *off-line* с использованием метода РКОР-МНК, реализованного в пакете программ OLID-SISO. Предварительные эксперименты по идентификации позволили определить значения следующих параметров:

такт квантования	$T_0 = 3$ мин;
вариация расхода топлива	$\Delta M_F = 0,25$ т/ч;
вариация скорости шнека	$\Delta n = 1$ рад/мин.

Время идентификации менялось от 112 до 335 T_0 , что составляет 5,6—16,8 ч. На рис. 30.2.3 показан один из экспериментов по идентификации. Реакция на ступенчатое воздействие идентифицированной модели представлена на рис. 30.2.4. Наименьшее время установления соответствует температуре газа на выходе сушильной печи, и оно значительно возрастает для температуры газа в середине барабана и на его выходе. Изменение процентного содержания сухого вещества в высушенной пульпе при изменении расхода жидкого топлива имеет запаздывание порядка 6 мин, обратный выброс в течение приблизительно 30 мин, время установления 2,5 ч и может быть описано с помощью фазового фильтра. Наличие указанных свойств объясняет причину возникновения задачи управления. При рассмотрении в качестве входного воздействия скорости вращения шнека запаздывание в изменении содержимого сухого вещества составляет порядка 18 мин. Оценки порядков моделей и времен запаздывания также указаны на рис. 30.2.4.

На основе идентифицированных моделей объектов управления с помощью пакета программ CADCA были синтезированы различные системы управления [30.1], [30.2]. Управляющей переменной является расход жидкого топлива, а главной регулируемой переменной служит содержание сухого вещества. Введение обратной связи лишь по регулируемой переменной не в состоянии обеспечить нужное качество управления; введение же обратных связей по температурам газа ϑ_M и ϑ_A значительно его улучшает. На рис. 30.2.5 приведены результаты моделирования двухкаскадной системы управления с тремя ПИД-регуляторами и системы с регулятором состояния и наблюдателем при ступенчатом изменении скорости шнекового транспортера. Лучшее качество управления (с точки зрения степени демпфирования и числа колебаний) обеспечивается с помощью регулятора состояния. Значительное улучшение качества управления может быть достигнуто с помощью алгоритма второго порядка G_{F1} с прямой связью (рис. 30.2.5, б). Этот алгоритм использует информацию о скорости вращения шнека n и управляет расходом топлива. По ряду практических соображений двухкаскадная система управления была реализована на управляющей ЭВМ SIEMENS 310 K (простота передачи на другие установки, наглядность для операторов, наличие пакета генерации программ SIMAT C).

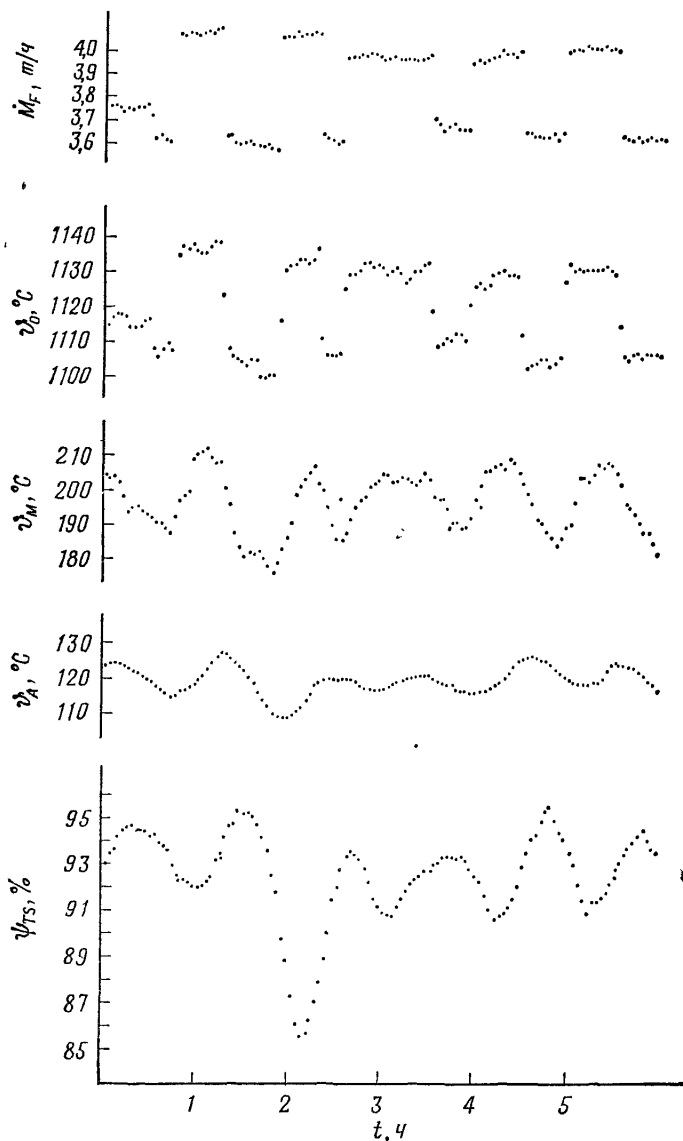


Рис. 30.2.3. Экспериментальные данные для идентификации объекта управления при изменениях расхода топлива.

Блок-схема реализованной системы управления представлена на рис. 30.2.6. На ней указаны алгоритмы управления положением исполнительных устройств, а также следующие устройства управления с прямой связью: G_{F2} для случая, если можно измерять влаж-

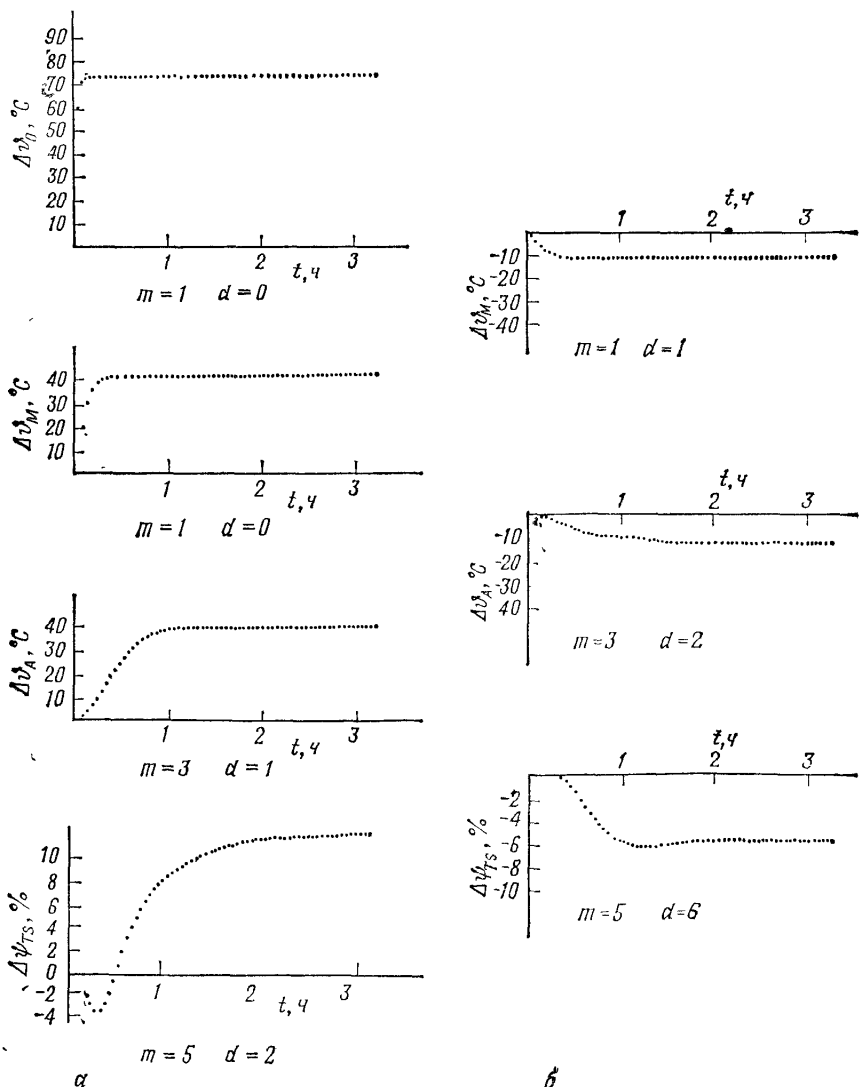


Рис. 30.2.4. Переходные процессы идентифицированной модели. $\omega=13$ рад/мин. $T_0=3$ мин.

α — изменение расхода топлива $\Delta \dot{M}_F=1$ т/ч; δ — изменение скорости шнекового транспортера $\Delta \omega=1$ рад/мин.

ность поступающей пульпы; G_{F8} , регулирующее скорость конвейера таким образом, чтобы общее количество поступающей в сушилку воды оставалось неизменным; регулятор дифференцирующего типа G_{F7} для уменьшения неминимально-фазовых свойств установки по

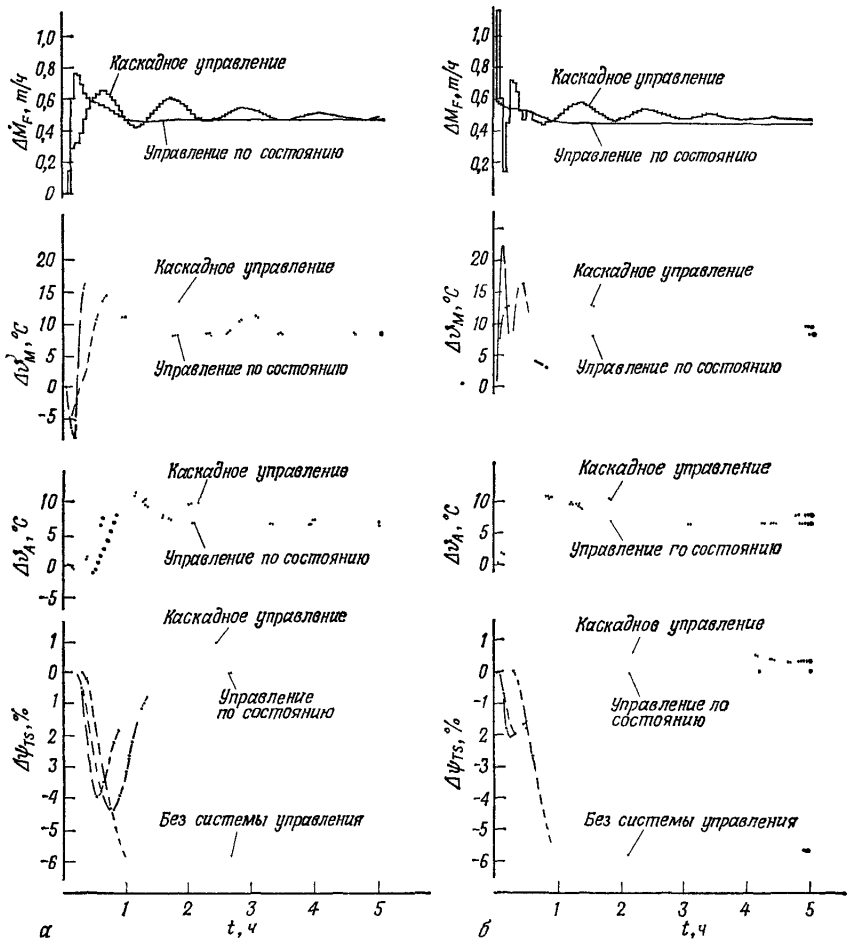


Рис 30.25. Переходные процессы в системе управления барабанной сушилкой при ступенчатом изменении скорости шнекового транспортера $\Delta n = 1$ рад/мин. Измеряются содержание сухого вещества и температуры ϑ_M и ϑ_A . $T_0 = 3$ мин. а — без регулятора с прямой связью б — при наличии регулятора с прямой связью G_{F1}

регулируемой переменной путем изменения качества пара, поступающего из парового котла таким образом, чтобы при изменении расхода топлива общий объем газа, проходящего через сушильную установку, оставался неизменным. На рис 30.27, а показаны записи сигналов при ручном непрерывном управлении (первоначальный вариант), а на рис 30.27, б — запись тех же сигналов при цифровом каскадном управлении при использовании регулятора G_{F1} с прямой связью. Хотя скорость поступления пульпы M_{PS} достаточно постоянна, при ручном непрерывном управлении содержание

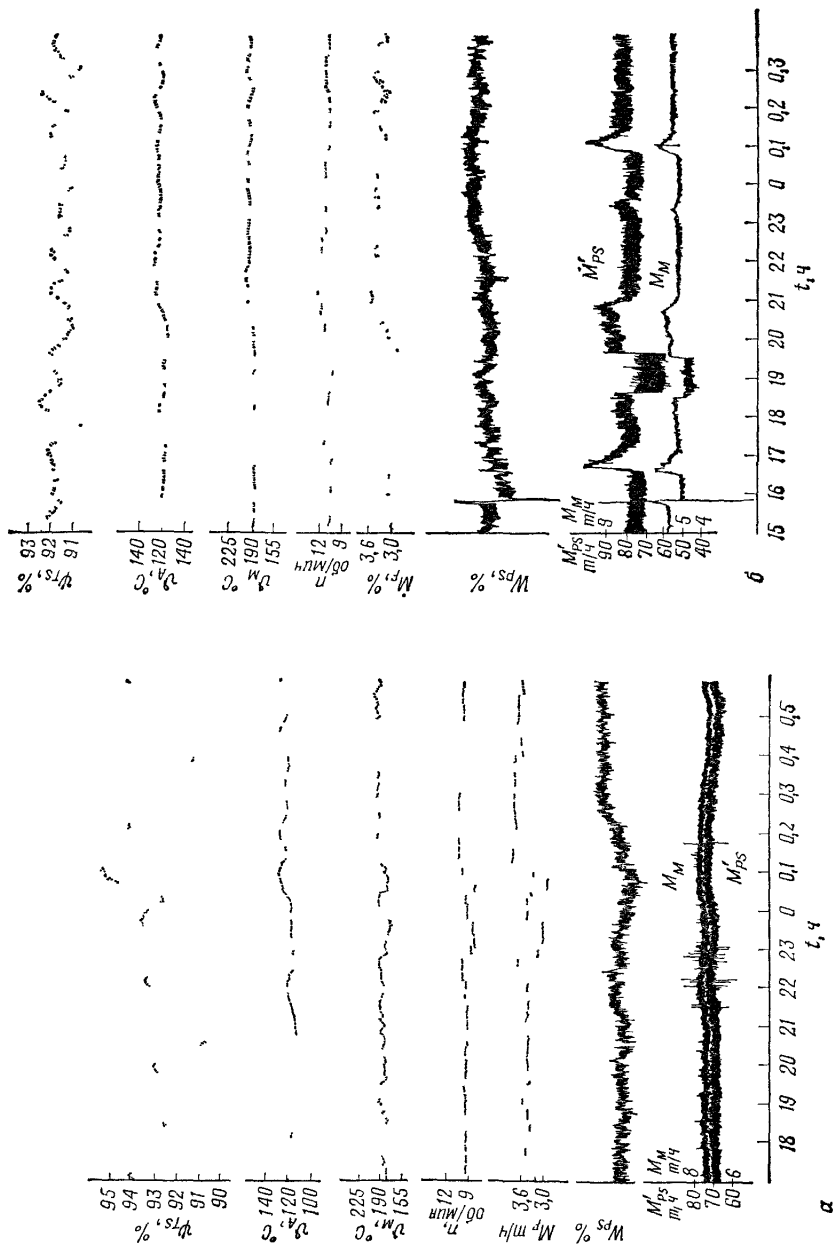


Рис 30 2 7 Осциллограммы переходных процессов в барабанной сушилке. Обозначения приведены на рис. 30 2 1. M_M — скорость потока патоки.

а — ручное управление б — цифровая каскадная система управления с регулятором G_{P1}

сухого вещества колеблется в диапазоне $\pm 2,5\%$. При использовании цифрового управления относительная ошибка регулирования снижается до $\pm 1\%$ при больших возмущениях по расходу массы пульпы, чем на рис 30 2 7, а При постоянном расходе пульпы эта ошибка не превышает $\pm 0,5\%$ Таким образом, применение цифрового управления значительно повышает качество управления

Практический эксперимент показал, что реализация цифрового управления тремя барабанными сушилками с помощью одной управляющей ЭВМ позволяет экономить до $2,5\%$ жидкого топлива, что составляет около 329 тонн в год [30 3]

Рассмотренная барабанная сушилка является типичным примером объекта управления со сложными внутренними взаимодействиями и длительным временем установления переходных процессов, для которого ручная настройка параметров регулятора не обеспечивает удовлетворительного качества управления. Идентификация объекта управления совместно с автоматизацией расчета различных систем управления приводит к более глубокому пониманию свойств объекта и позволяет моделировать и проводить сравнение различных вариантов систем управления Однако в связи с тем, что сушильная установка обычно работает при полной нагрузке, в адаптивных алгоритмах управления необходимости не возникает, и требуемые показатели качества обеспечиваются обычными алгоритмами управления с фиксированными параметрами

30.3. ЦИФРОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПАРОГЕНЕРАТОРОМ

В качестве примера для изучения различных методов идентификации и управления была использована модель парогенератора барабанного типа с естественной циркуляцией продуктов сгорания жидкого топлива Рассматривалась задача регулирования давления и температуры пара Блок-схема этой части парогенератора была приведена на рис. 18.11 Передаточные функции отдельных блоков были получены с помощью математического моделирования нагревателя и испарителя реального парогенератора [18 5], [18.6] и приведены в приложении Они хорошо согласуются с результатами измерений сигналов реальной установки Нагреватель необходимо рассматривать как объект с распределенными параметрами После проведения линеаризации трансцендентная передаточная функция для малых сигналов может быть аппроксимирована рациональной передаточной функцией с малой задержкой времени. Ошибки, возникающие при этих упрощениях, пренебрежимо малы Объект управления с двумя входами/двумя выходами моделировался на аналоговом вычислителе, который был состыкован с управляющей ЭВМ типа HP21MX Чтобы упростить сравнение, в рассматриваемом примере шум объекта в модели не учитывался Поскольку парогенератор обладает малым собственным шумом, влияние последнего на основные результаты данных исследований относительно мало.

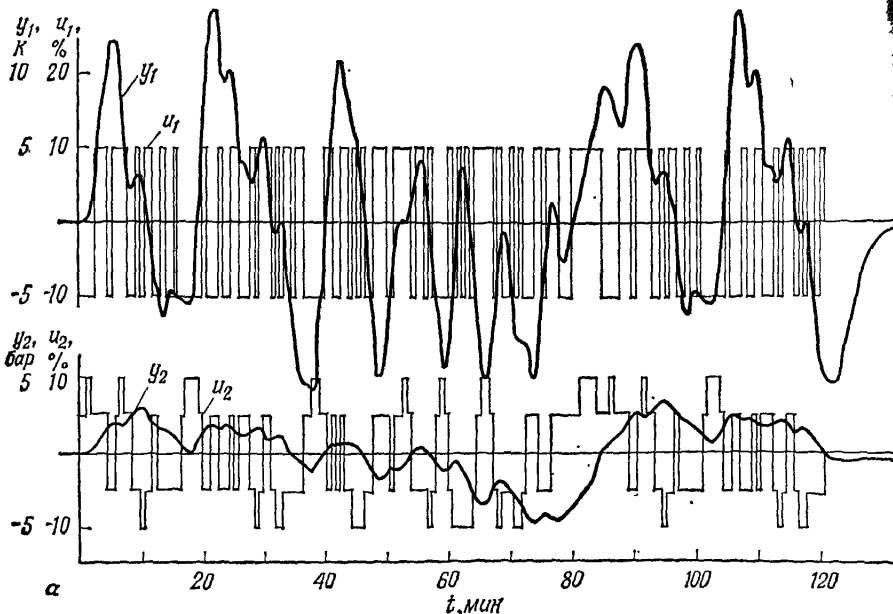


Рис. 30.3.1. Идентификация модели с двумя входами/двумя выходами и автоматизированный расчет алгоритмов управления.

a — идентификация Вход u_1 : ПСДС, $N=127$. Вход u_2 : Псевдослучайный четырехуровневый сигнал (ПСЧС), полученный из u_1 .

Метод: КОР-МНК (многомерный)

$m_{11}=5, d_{11}=0; m_{22}=1, d_{22}=1;$

$m_{21}=5, d_{21}=0; m_{12}=1, d_{12}=0.$

b — переходные процессы при ступенчатом изменении уставки температуры пара $w_1(k)$. Система управления с двумя основными регуляторами с обратными связями.

Регулятор температуры пара: ПИД, $r=0$.

Регулятор давления пара: ПИ, $r=0$.

в — переходные процессы при ступенчатом изменении уставки давления пара $w_2(k)$. Два основных регулятора (см. пункт б).

г — переходные процессы при ступенчатом изменении расхода пара $v(k)$. Два основных регулятора (см. пункт б).

д — переходные процессы при ступенчатом изменении расхода пара $v(k)$. Два основных регулятора (см. пункт б) и один пропорциональный регулятор с прямой связью между расходом пара v и расходом топлива u_2 .

Так как двумерный объект управления обладает сильной перекрестной связью G_s от расхода топлива к нагревателю, алгоритмы управления должны быть рассчитаны с использованием методов расчета многомерных систем. В работе [30.4] исследованы три способа идентификации и цифрового управления:

- (1) Идентификация по двум входам/двум выходам и автоматизированный расчет регуляторов с оптимизируемыми параметрами.
- (2) Раздельное адаптивное управление подсистемами с одним входом/одним выходом.
- (3) Адаптивное управление по двум входам/двум выходам.

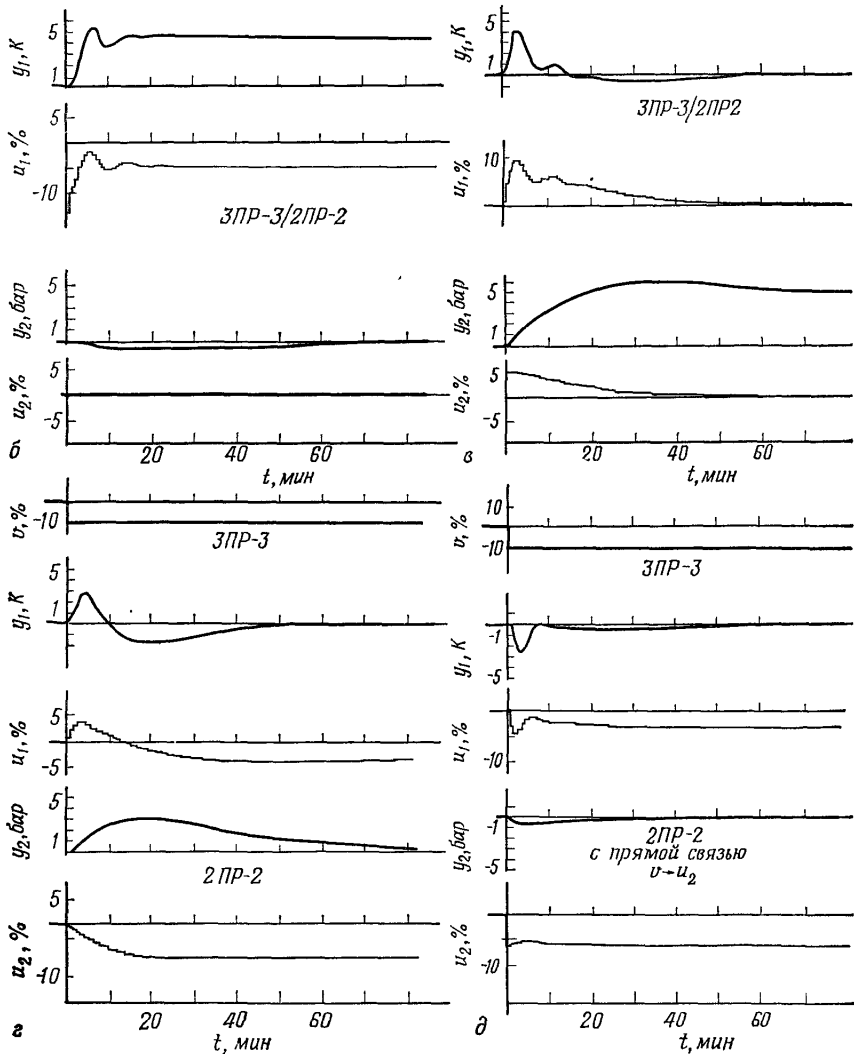


Рис. 30.3.1 (продолжение).

В каждом из перечисленных случаев применялись пакеты программ на Фортране, которые используют 6—16 К слов основной памяти и 25—60 К слов памяти на дисках.

30.3.1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПО ДВУМ ВХОДАМ/ДВУМ ВЫХОДАМ И АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ РЕГУЛЯТОРОВ С ОПТИМИЗИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ПАКЕТЫ ПРОГРАММ OLID-MIMO, CADCA-MIMO, CADCA-SISO)

а) Два основных регулятора с обратными связями

Двумерная система возбуждается одновременно с помощью ПСДС и псевдослучайного четырехуровневого сигнала (оба некоррелированы), представленных на рис. 30.3.1, а. Применение метода идентификации КОР-МНК позволяет получить дискретные передаточные функции двумерной модели приблизительно через 130 мин. На основе этой модели путем численной оптимизации параметров были рассчитаны два основных регулятора с оптимизируемыми параметрами для температуры пара (ПИД) и давления пара (ПИ). Время расчета составило от 5 до 10 мин. На рис. 30.3.1, б и в показаны переходные процессы при ступенчатых изменениях задающих переменных $w_1(k)$ и $w_2(k)$. Из-за чрезвычайно малой взаимосвязи между впрыском воды (u_1) и давлением пара (y_2) регулирование температуры пара оказывает очень малое влияние на процесс управления его давлением (рис. 30.3.1, б). Однако существование сильной связи между расходом топлива (u_2) и температурой пара (y_1) приводит к преобладающему влиянию процесса управления давлением пара на управление температурой (рис. 30.3.1, в). На рис. 30.3.1, г приведены переходные процессы на возмущение по расходу пара $v(k)$. При уменьшении расхода пара его температура начинает увеличиваться. Однако затем из-за снижения расхода топлива температура пара резко уменьшается. Этот обратный выброс оказывает основное влияние на управление температурой. Его компенсация является главной задачей при повышении качества управления температурой пара [18.5].

б) Регуляторы с прямой связью

Дополнительное включение пропорционального регулятора с прямой связью $u_2(k) = c_{v2} v(k)$ (связывающий расход пара с расходом топлива) приводит к существенному улучшению качества регулирования давления и температуры пара (рис. 30.3.1, д). Сравнение переходных процессов на рис. 30.3.1, г и д показывает, что максимальная статическая ошибка регулирования давления пара снижается с 3,3 до 0,9 бар, а время установления переходного процесса уменьшается со 100 до 25 мин. Статическая ошибка регулирования температуры пара также снижается с +2,7 до -2,4 К, а время установления уменьшается с 50 до 10 мин. Этот пример демонстрирует эффективность применения хорошо настроенного регулятора с прямой связью. Общее время расчета двух основных регуляторов в режиме *on-line* составляет около 230 мин. Из них 130 мин требуется для идентификации, 30 мин для выбора и расчета алгоритмов управления и 70 мин для проведения двух тестовых испытаний.

30.3.2. РАЗДЕЛЬНОЕ АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДСИСТЕМАМИ С ОДНИМ ВХОДОМ/ОДНИМ ВЫХОДОМ (ПАКЕТ ПРОГРАММ ADREG)

В этом разделе будет показано, как алгоритмы управления с настройкой параметров для систем с одним входом/одним выходом могут быть использованы для самонастройки двух основных регуляторов двумерной системы управления. Адаптивное управление нагревателем начинается с идентификации разомкнутого контура, используя в качестве возбуждения ПСДС (рис. 30.3.2, а). Это делается для грубой оценки начальной модели объекта управления и исключения тем самым неопределенности в начальной стадии настройки при включении адаптивного алгоритма управления РМНК/АР (2). Реакция системы на ступенчатые изменения двух установочных значений показала хорошее качество управления. Затем параметры этого регулятора фиксируются (самонастройка прекращается). На следующем этапе производится идентификация модели испарителя в течение 15 мин без замыкания контура управления с последующим применением адаптивного регулятора РМНК/РМДЗ (рис. 30.3.2, б). На рис. 30.3.2, в показаны переходные процессы на ступенчатое изменение величины $w_2(k)$ при фиксированных параметрах обоих регуляторов, а на рис. 30.3, 2, г — на ступенчатое возмущение $v(k)$. Как показывает сравнение с переходными процессами, представленными на рис. 30.3.1, в и г, показатели качества полученной системы управления близки к соответствующим показателям системы, реализующей регуляторы с оптимизируемыми параметрами. Общее время, необходимое для расчета системы, составляет около 130 мин. Одновременное применение двух адаптивных регуляторов не обеспечивает сходимости настройки, так как характеристики объекта управления по каналам каждого из одномерных регуляторов очень сильно изменяются во времени.

30.3.3. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ДВУМ ВХОДАМ/ДВУМ ВЫХОДАМ (ПАКЕТ ПРОГРАММ MACS)

На рис. 30.3.3 представлены результаты, полученные с применением многомерного адаптивного регулятора [25.33]. Регулятор представляет собой сочетание рекуррентного метода наименьших квадратов (для многомерной модели) с регулятором состояния, синтезируемого по минимуму квадратичного критерия качества РМНК-КК1/РС. В соответствии с рис. 30.3.3, а вначале на оба входа объекта управления подаются два различных ПСДС, чтобы с помощью идентификации разомкнутого контура получить начальное приближение модели объекта для адаптивного регулятора, который включается в контур управления через 35 мин. Система сразу приходит в установившееся состояние без наличия статической ошибки. Качество управления при ступенчатом изменении двух уставок, как показывают переходные процессы на рис. 30.3.3, г, очень хорошее.

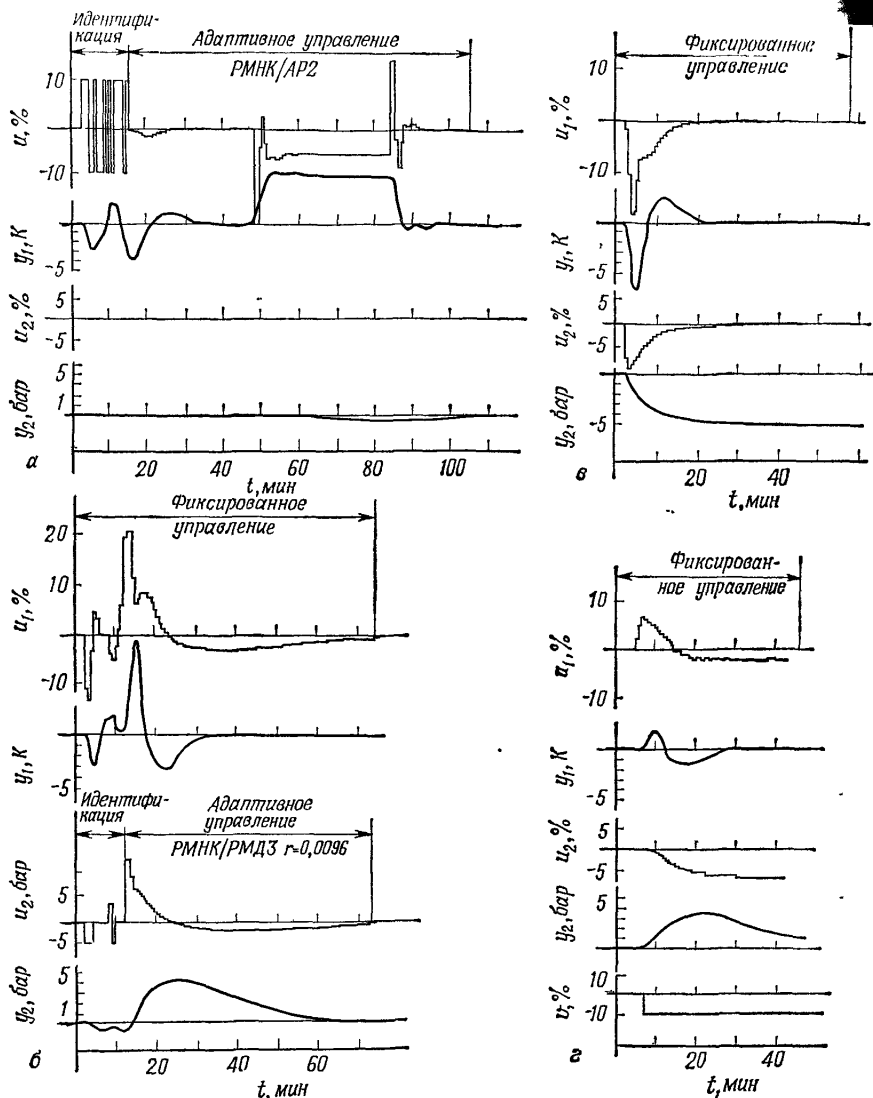


Рис. 30.3.2. Раздельное адаптивное управление подсистемами двумерного объекта управления.

а — кратковременная идентификация разомкнутого контура с помощью ПСДС и адаптивное управление температурой пара с использованием РМНК/АР2 ($r=1$). Давление пара не регулируется.

б — кратковременная идентификация разомкнутого контура (с помощью произвольного трехуровневого сигнала) и адаптивное управление давлением пара с использованием РМНК/РМДЗ ($r=0,0096$). Температура пара регулируется с помощью АР2.

в — переходные процессы при ступенчатом изменении уставки $w_1(k)$. Оба регулятора имеют постоянные параметры.

г — переходные процессы при ступенчатом изменении $v(k)$ (расход пара). Оба регулятора имеют постоянные параметры.

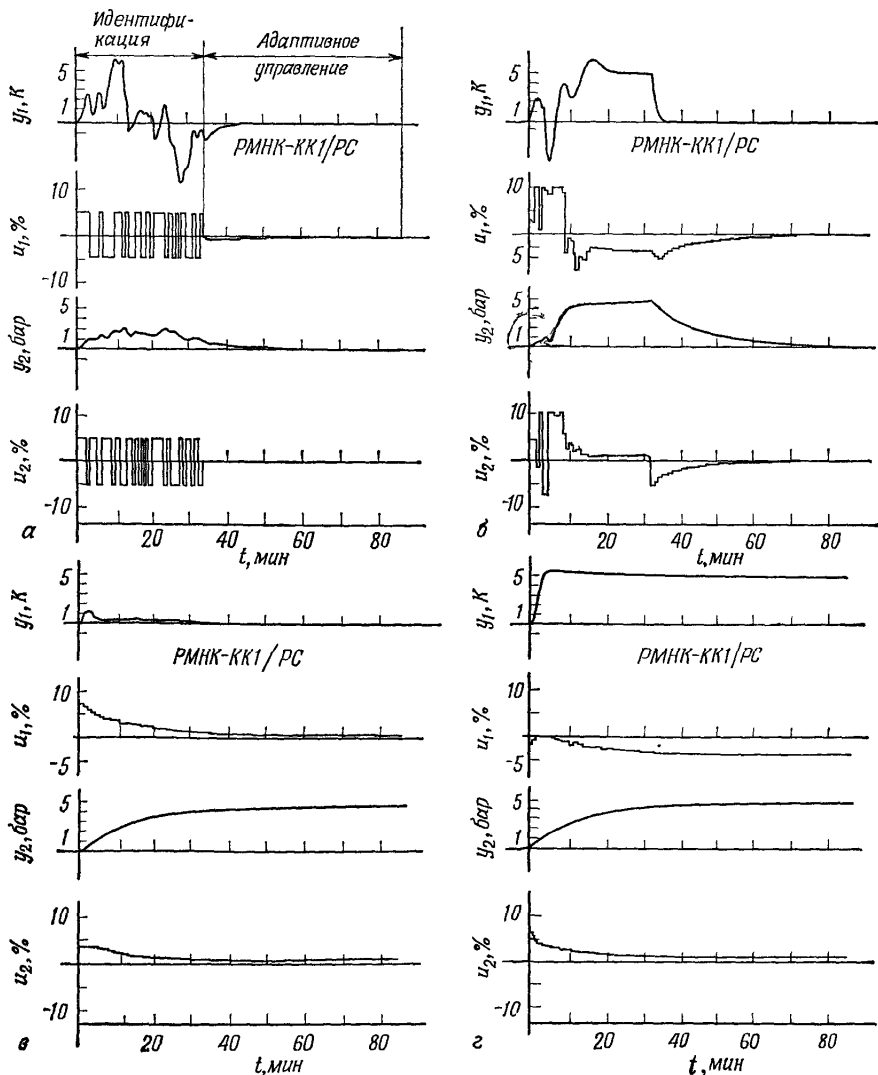


Рис. 30.3.3. Двумерное адаптивное управление на основе рекуррентного метода наименьших квадратов и регулятора состояния (PMHK-KK1/PC).

$$c = [c^T c], \quad R = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- а — идентификация разомкнутого контура с последующим адаптивным управлением.
 б — адаптивное управление при ступенчатых изменениях уставок $w_1(k)$ и $w_2(k)$ в моменты времени $t=0$ и $t=32$ мин.
 в — адаптивное управление при ступенчатом изменении уставки $w_2(k)$ в момент $t=0$ после завершения настройки.
 г — адаптивное управление при ступенчатых изменениях уставок $w_1(k)$ и $w_2(k)$ в момент $t=0$ после завершения настройки.

Затраты времени составляют около 90 мин. При другом способе достаточно задать ступенчатые изменения уставок при $t=0$ и одновременно запустить адаптивный алгоритм с ограничениями на управляющие переменные в диапазоне $-10\% \leq u \leq +10\%$. Переходные процессы, представленные на рис. 30.3.3, б, показывают, что система управления стабилизирует выходные переменные всего через 20 мин. Реакция системы на ступенчатое изменение уставки в момент $t=32$ мин демонстрирует очень хорошее качество управления. На реализацию этого варианта требуется около 70 мин. На рис. 30.3.3, в приведена реакция двумерной системы управления с подстройкой параметров на ступенчатое изменение уставки давления пара. Сравнение этих результатов с результатами, представленными на рис. 30.3.1, в (регуляторы с оптимизируемыми параметрами), показывает существенное улучшение качества регулирования, особенно температуры пара. При этом статическая ошибка и время установления уменьшаются от 4,2 до 1,3 К и от 50 до 25 мин соответственно, а регулирование давления происходит без перерегулирования. Этот пример показывает, что использование регулятора с обратными связями по полному вектору состояния обеспечивает значительно более высокое качество управления, чем введение двух основных регуляторов с оптимизируемыми параметрами. Время, затрачиваемое на реализацию многомерного управления с подстрой-

Таблица 30.3.1

Оценки требуемого времени реализации различных методов идентификации и управления с обратной связью

Способы реализации		Идентификация, мин	Расчет регулятора, мин	Адаптация, мин	Тесты, мин		Общее время, мин
					уставки		
					w_1	w_2	
Одномерный объект (нагреватель)	1. Идентификация и автоматизированный расчет алгоритмов управления	60	15	—	20	—	95
	2. Адаптивное управление	15	—	25	20	—	60
Двумерный	1. Идентификация и автоматизированный расчет алгоритмов управления	130	30	—	20	50	230
	2. Раздельное адаптивное управление одномерными подсистемами	15	—	25	20	—	} 150
		15	—	35	—	40	
3. Двумерное адаптивное управление	—	—	30	15	35	80	

кой параметров, составляет около 80 мин, включая получение переходных процессов на два отдельных ступенчатых изменения уставочных значений. Таким образом, многомерное адаптивное управление обеспечивает лучшее качество управления с наименьшим временем адаптации.

Рассмотренные методы расчета и необходимые для их реализации времена объединены в табл. 30.3.1.

Приведенные данные будут также справедливы при воздействии на объект управления возмущений малой или средней интенсивности. Для расчета системы управления требуется гораздо меньше времени при использовании алгоритмов управления с подстройкой параметров.

Оценка этих, а также других результатов исследований, приведенных в этой главе, дана в разд. 30.4. Результаты, характерные для управления парогенератором, заключаются в следующем:

Если управление температурой пара рассматривается как одномерный процесс, то правильно настроенные ПИД-регулятор и регулятор состояния обеспечивают примерно одинаковое качество управления. Однако с учетом сильных перекрестных связей управление с обратными связями по состоянию дает значительно более хорошие результаты, чем применение двух основных ПИД- и П-регуляторов с обратными связями. Регулятор с прямой связью расхода топлива от расхода пара значительно улучшает качество управления.

30.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данной главе исследования позволяют обсудить некоторые результаты, касающиеся применения различных методов идентификации и управления.

Идентификация и автоматизированный расчет алгоритмов управления

Достоинства:

- может быть рассчитан и оценен любой алгоритм управления;
- могут быть рассчитаны и сравнены путем моделирования системы управления различной структуры;
- могут быть использованы методы идентификации в режимах *on-line* или *off-line*;
- создается общая модель разомкнутого контура управления.

Недостатки:

- объект управления должен быть стационарным в течение интервала времени, когда происходит идентификация и расчет регулятора;
- метод требует большего времени, чем применение адаптивных алгоритмов управления.

Таким образом, метод следует применять как основной при выборе структуры системы управления и расчета регуляторов с фиксированными параметрами или адаптивных регуляторов с прямой связью, если характеристики объекта управления не зависят от времени.

Алгоритмы управления с подстройкой параметров

Достоинства:

- требуют меньшего времени, чем идентификация с последующим автоматизированным расчетом;
- могут быть использованы при медленных изменениях параметров объектов управления.

Недостатки:

- алгоритмы управления должны удовлетворять условию идентифицируемости замкнутого контура;
- алгоритмы идентификации и управления должны требовать малого объема вычислений;
- определяется модель замкнутого контура специального вида.

Поэтому алгоритмы управления с подстройкой параметров следует использовать при медленных изменениях параметров объекта управления и при ограничениях по времени на расчет системы управления. Эти алгоритмы могут быть использованы для настройки алгоритмов с фиксированными параметрами или для создания адаптивного управления.

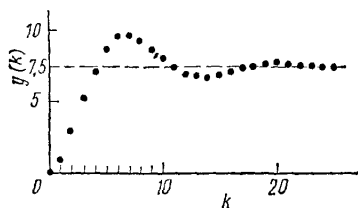
Приложение

Тестовые объекты управления для моделирования

В данной книге моделирования типовых динамических характеристик различных объектов при исследовании систем управления с различными алгоритмами управления, методами идентификации и оценивания параметров и адаптивными алгоритмами управления использовались так называемые тестовые объекты. Эти тестовые объекты, являющиеся моделями реальных объектов с различными конфигурациями нулей и полюсов, временами запаздывания, были выбраны по ряду соображений. Приведенные дискретные передаточные функции $G(z)$ были найдены на основе z -преобразований от непрерывных передаточных функций $G(s)$ с учетом фиксирующего элемента нулевого порядка. Особые случаи оговариваются отдельно.

Объект I: второй порядок, колебательные свойства

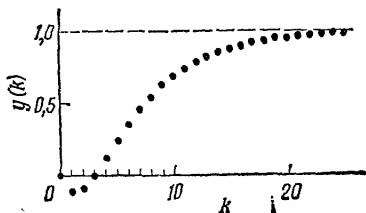
$$G_1(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}};$$
$$a_1 = -1,5; a_2 = 0,7; b_1 = 1,0;$$
$$b_2 = 0,5; T_0 = 2c.$$



Здесь нет соответствующей передаточной функции $G(s)$. Этот тестовый объект предложен в [23.15].

Объект II: второй порядок, неминимально-фазовая характеристика

$$G_{II}(s) = \frac{K(1 - T_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)};$$
$$K = 1; T_1 = 4c; T_2 = 10c;$$
$$G_{II}(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$



Значения параметров $G_{II}(z)$ для $T_0 = 1, 4, 8, 16$ с приведены в табл. 5.4.1.

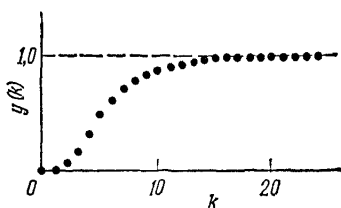
Объект III: третий порядок с запаздыванием, низкочастотная характеристика

$$G_{III}(s) = \frac{K(1+T_4s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} e^{-T_t s};$$

$$K = 1; \quad T_1 = 10 \text{ с}; \quad T_2 = 7 \text{ с}; \quad T_t = 4 \text{ с};$$

$$T_3 = 3 \text{ с}; \quad T_4 = 2 \text{ с};$$

$$G_{III}(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} z^{-d}.$$



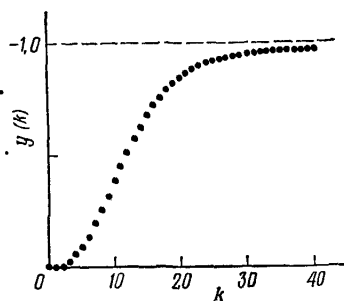
Значения параметров $G_{III}(z)$ для $T_0 = 1, 4, 8, 16$ с приведены в табл. 5.4.2.

Объекты II—III предложены в [23.9], [3.13].

Объект IV: пятый порядок, низкочастотная характеристика. Модель паронагревателя [18.5], [18.6]

$$G_{IV}(s) = \frac{(1+13,81s)^2(1+18,4s)}{(1+59s)^5} \left[\frac{K}{\%} \right];$$

$$G_{IV}(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5}}.$$



$T_0 = 20$ с:

$$a_1 = -3,562473; \quad b_1 = -1,73 \cdot 10^{-3};$$

$$a_2 = 5,076484; \quad b_2 = -1,831 \cdot 10^{-3};$$

$$a_3 = -3,616967; \quad b_3 = 2,143 \cdot 10^{-3};$$

$$a_4 = 1,288535; \quad b_4 = -5,95 \cdot 10^{-4};$$

$$a_5 = -0,183615; \quad b_5 = 4,9 \cdot 10^{-5}.$$

$T_0 = 40$ с:

$$a_1 = -2,538242; \quad b_1 = -9,725 \cdot 10^{-3};$$

$$a_2 = 2,577069; \quad b_2 = -2,1679 \cdot 10^{-2};$$

$$a_3 = -1,308245; \quad b_3 = 2,18 \cdot 10^{-3};$$

$$a_4 = 0,332064; \quad b_4 = 3,28 \cdot 10^{-4};$$

$$a_5 = -0,033714; \quad b_5 = -3,6 \cdot 10^{-5}.$$

Объект V: двумерный объект—испаритель и паронагреватель парогенератора (рис. 18.1.1, [18.5], [18.6])

$$G_{11}(s) = G_{IV}(s);$$

$$G_{21}(s) = \frac{1,771}{(1 + 153,5s)(1 + 24s)(1 + 15s)} \left[\frac{K}{\%} \right];$$

$$G_{22}(s) = \frac{0,96}{695s(1 + 15s)} \left[\frac{\text{бар}}{\%} \right];$$

$$G_{12}(s) = \frac{0,0605}{695s} \left[\frac{\text{бар}}{\%} \right].$$

$$T_0 = 20 \text{ с};$$

$$G_{11}(z) = G_{IV}(z) \quad (\text{см. объект IV});$$

$$G_{21}(z) = \frac{2,476 \cdot 10^{-2} z^{-1} + 5,744 \cdot 10^{-2} z^{-2} + 7,859 \cdot 10^{-3} z^{-3}}{1 - 1,576 z^{-1} + 0,7274 z^{-2} - 0,1006 \cdot z^{-3}};$$

$$G_{22}(z) = \frac{0,01237 z^{-1} + 0,00798 z^{-2}}{1 - 1,264 z^{-1} + 0,264 z^{-2}};$$

$$G_{12}(z) = \frac{0,001741 z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Объект VI: третий порядок, низкочастотная характеристика

$$G_{VI}(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)};$$

$$K = 1; T_1 = 10 \text{ с}; T_2 = 7,5 \text{ с}; T_3 = 5 \text{ с};$$

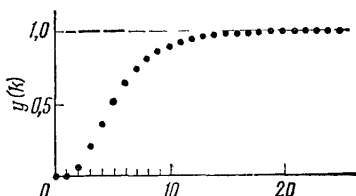
$$T_0 = 4 \text{ с}.$$

$$G_{VI}(s) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}};$$

$$a_1 = -1,7063; \quad a_2 = -0,9580; \quad a_3 = -0,1767;$$

$$b_1 = 0,0186; \quad b_2 = 0,0486; \quad b_3 = 0,0078.$$

Для $T_0 = 2, 6, 8, 10, 12$ с см. табл. 3.7.1.

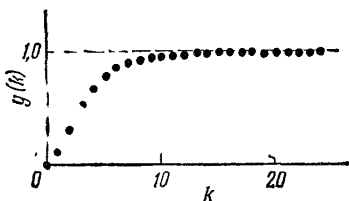


Объект VII: второй порядок, низкочастотная характеристика

$$G_{VII}(s) = \frac{K}{(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)};$$

$$K = 1; T_2 = 7,5 \text{ с}; T_3 = 5 \text{ с}.$$

$$G_{VII}(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$



$$T_0 = 4 \text{ с};$$

$$a_1 = -1,036; \quad a_2 = 0,2636; \quad b_1 = 0,1387; \quad b_2 = 0,0889.$$

Объект VIII: второй порядок, низкочастотная характеристика

$$G_{VIII}(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)};$$

$$K=1; \quad T_1=10 \text{ с}; \quad T_2=5 \text{ с}.$$

$$G_{VIII}(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}.$$

$$T_0 = 4 \text{ с};$$

$$a_1 = -1,1197; \quad a_2 = 0,3012; \quad b_1 = 0,1087; \quad b_2 = 0,0729.$$

Значения коэффициентов $G_{VIII}(z)$ для $T_0 = 1, 2, 6, 8, 12$ с приведены в табл. 3.7.2.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

Пусть вектор x является функцией параметров a_1, a_2, \dots, a_n и существуют частные производные этого вектора по каждому из параметров. Определим оператор частной производной как вектор

$$\frac{\partial}{\partial a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial a_n} \end{bmatrix}.$$

Поскольку этот оператор является вектором-столбцом, он не может быть применен к вектору

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{bmatrix}.$$

Будем применять его к вектору-строке x^T . Результатом является матрица

$$\frac{\partial x^T}{\partial a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial x_p}{\partial a_1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_n} & \frac{\partial x_2}{\partial a_n} & \dots & \frac{\partial x_p}{\partial a_n} \end{bmatrix}.$$

Применяя оператор $\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}$ к скалярному произведению двух векторов

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = [v_1 \dots v_p] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_p w_p,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{v}^T \mathbf{w}] &= \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{v} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial a_1} w_1 + \dots + \frac{\partial v_p}{\partial a_1} w_p \\ \vdots \\ \frac{\partial v_1}{\partial a_n} w_1 + \dots + \frac{\partial v_p}{\partial a_n} w_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial a_1} v_1 + \dots + \frac{\partial w_p}{\partial a_1} v_p \\ \vdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial a_n} v_1 + \dots + \frac{\partial w_p}{\partial a_n} v_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если элементы вектора \mathbf{v} не зависят от параметров a_i и если $\mathbf{w} = \mathbf{a}$, то

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{v}^T \mathbf{a}] = \mathbf{v}.$$

Если, наоборот, элементы вектора \mathbf{w} не зависят от параметров a_i и $\mathbf{v} = \mathbf{a}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{a}^T \mathbf{w}] = \mathbf{w}.$$

При замене векторов \mathbf{v} и \mathbf{w} на матрицы \mathbf{V} и \mathbf{W} последние два равенства остаются справедливыми

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{V} \mathbf{a}] = \mathbf{V}^T;$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{a}^T \mathbf{W}] = \mathbf{W}.$$

Пусть \mathbf{A} — квадратная матрица. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}] = \mathbf{A} \mathbf{y};$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} [\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}] = \mathbf{A}^T \mathbf{x};$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}] = 2\mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\mathbf{A} \text{ — симметричная матрица}).$$

ТАБЛИЦА Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Данная таблица содержит некоторые часто используемые временные функции $x(t)$, их преобразование Лапласа $x(s)$ и z -преобразования $x(z)$. Такт квантования равен T_0 . Более полные таблицы могут быть найдены в [2.15], [2.19], [2.21], [2.13], [2.14].

$x(t)$	$x(s)$	$x(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_0 z e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$
$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T_0^2 z e^{-aT_0} (z+e^{-aT_0})}{(z-e^{-aT_0})^3}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT_0}) z}{(z-1)(z-e^{-aT_0})}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT_0} - e^{-bT_0})}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$
$\sin \omega_1 t$	$\frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z \sin \omega_1 T_0}{z^2 - 2z \cos \omega_1 T_0 + 1}$
$\cos \omega_1 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega_1 T_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_1 T_0 + 1}$
$e^{-at} \sin \omega_1 t$	$\frac{\omega_1}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z e^{-aT_0} \sin \omega_1 T_0}{z^2 - 2z e^{-aT_0} \cos \omega_1 T_0 + e^{-2aT_0}}$
$e^{-at} \cos \omega_1 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z^2 - z e^{-aT_0} \cos \omega_1 T_0}{z^2 - 2z e^{-aT_0} \cos \omega_1 T_0 + e^{-2aT_0}}$

Список сокращений и обозначений

- a, b** — параметры разностных уравнений объекта
c, d — параметры разностных уравнений стохастических сигналов
d — время запаздывания $d=T_t/T_0=1, 2, \dots$
e — ошибка управления $e=w-y$ (а также $e_w=w-y$); или ошибка уравнения при оценивании параметров; или число $e=2,718281\dots$
f — частота, $f=1/T_p$ (T_p — период); или параметр
g — импульсная реакция (весовая функция)
h — параметр
i, j — целое или индекс или $j^2=-1$
k — индекс дискретного времени $k=t/T_0=0, 1, 2, \dots$
l — целое или параметр
m — порядок полиномов $A(\), B(\), C(\), D(\)$
n — сигнал возмущения (шум)
p — параметры разностного уравнения регулятора или целое число
p() — плотность распределения вероятности
q — параметры разностного уравнения регулятора
v — весовой коэффициент при управляющей переменной или целое число
s — переменная преобразования Лапласа $s=\sigma+i\omega$ или сигнал
t — непрерывное время
u — входной сигнал объекта, управляющая переменная $u(k)=U(k)-U_{00}$
v — неизмеряемый виртуальный сигнал возмущения
w — величина задающего сигнала, задающая переменная, вариация установившегося состояния $w(k)=W(k)-W_{00}$
x — переменная состояния
y — выходной сигнал объекта, регулируемая переменная $y(k)=Y(k)-Y_{00}$
z — переменная z-преобразования: $z=e^{T_0s}$
a, b — параметры дифференциальных уравнений объекта
A(z) — полином знаменателя дискретной передаточной функции модели объекта
B(z) — полином числителя дискретной передаточной функции модели объекта
C(z) — полином знаменателя дискретной передаточной функции модели шума
D(z) — полином числителя дискретной передаточной функции модели шума
G(z) — дискретная передаточная функция
H() — передаточная функция фиксирующего элемента
I — критерий качества управления
K — коэффициент передачи
L — длина слова
M — целое число
N — целое число или дискретный момент времени (число тактов)
P() — полином знаменателя дискретной передаточной функции регулятора
Q() — полином числителя дискретной передаточной функции регулятора
R() — динамический показатель управления
S — спектральная плотность мощности или критерий качества
T — постоянная времени
T₉₅ — время достижения переменной 95% установившегося значения при ступенчатом входном сигнале
T₀ — такт квантования
T_t — время запаздывания
U — вход объекта (абсолютное значение)
V — функция потерь

- W — задающая переменная (абсолютное значение)
 Y — выходная переменная объекта (абсолютное значение)
 b — вектор управления
 c — вектор выхода
 k — вектор параметров регулятора состояния
 n — вектор шума ($r \times 1$)
 u — вектор входных переменных ($p \times 1$)
 v — вектор шума ($p \times 1$)
 w — вектор задающей переменной ($r \times 1$)
 x — вектор состояния ($m \times 1$)
 y — вектор выходных переменных ($r \times 1$)
 A — матрица системы ($m \times m$)
 B — матрица управления ($m \times p$)
 C — матрица выхода ($r \times m$)
 D — матрица входа/выхода ($r \times p$) или диагональная матрица
 F — матрица шума или $F = A - BK$
 G — матрица передаточных функций
 I — единичная матрица
 K — матрица параметров регулятора состояния
 Q — весовая матрица при переменных состояния ($m \times m$)
 R — весовая матрица при входных воздействиях ($p \times p$) или матрица регулятора
 $A(z)$ — полином знаменателя дискретной передаточной функции замкнутой системы
 $B(z)$ — полином числителя дискретной передаточной функции замкнутой системы
 \mathcal{I} — информация
 $\mathcal{L}(\)$ — преобразование Лапласа
 $\mathcal{z}(\)$ — z -преобразование
 $\mathcal{Z}(\)$ — соответствие между $G(s)$ и $G(z)$
 α — коэффициент
 β — коэффициент
 γ — коэффициент или переменная состояния модели задающей переменной
 δ — отклонение или ошибка
 ε — коэффициент
 ξ — переменная состояния модели шума
 η — переменная состояния модели шума или отношение шум/сигнал
 κ — коэффициент перекрестной связи или стохастический показатель управления
 λ — среднеквадратичное отклонение шума $v(k)$
 μ — порядок $P(z)$
 ν — порядок $Q(z)$ или переменная состояния модели задающей переменной
 $\pi = 3,14159\dots$
 σ — среднеквадратичное отклонение, σ^2 — дисперсия или вспомогательная переменная в преобразовании Лапласа
 τ — временной сдвиг
 ω — угловая частота $\omega = 2\pi/T_p$ (T_p — период)
 Δ — отклонение или изменение или уровень квантования
 θ — параметр
 Π — произведение
 Σ — сумма
 Ω — относительная угловая частота
 $\dot{x} = dx/dt$
 x_0 — точное значение
 \hat{x} — оцениваемая или наблюдаемая переменная
 \tilde{x} , $\Delta \hat{x} = \hat{x} - x_0$ — ошибка оценки
 \bar{x} — среднее значение
 X_{00} — значение в установившемся состоянии

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОКРАЩЕНИЯ

- $E\{ \}$ — математическое ожидание случайной переменной
 $\text{var}\{ \}$ — дисперсия
 $\text{cov}\{ \}$ — ковариационная функция
 dim — размерность
 tr — след матрицы: сумма диагональных элементов
 adj — присоединенная матрица
 det — определитель

ИНДЕКСЫ

- P — объект
 P_u — объект с входом u
 P_v — объект с входом v
 R или C — регулятор с обратной связью, алгоритм управления с обратной связью
 B или C — регулятор с прямой связью, алгоритм управления с прямой связью
 0 — точное значение
 00 — установившееся состояние

**СОКРАЩЕННОЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ
И АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ**

- AP — аperiodический регулятор
 $ЛРП$ — линейный регулятор с заданным расположением полюсов
 $РМД$ — регулятор с минимальной дисперсией
 $РПР$ — регулятор-предиктор
 $РС$ — регулятор состояния (обычно с наблюдателем)
 $iPR-j$ — параметрически оптимизируемый регулятор с i параметрами, j из которых подлежат оптимизации

**СОКРАЩЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОВ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ**

- $КОР-МНК$ — корреляционный анализ с идентификацией параметров по методу наименьших квадратов
 $МВП$ — метод вспомогательных переменных
 $ММП$ — метод максимального правдоподобия
 $МНК$ — метод наименьших квадратов
 $МСА$ — метод стохастической аппроксимации

Для рекуррентных алгоритмов к сокращенному обозначению основного метода добавляется буква P , т. е. $РМВП$, $РММП$, $РМНК$

ДРУГИЕ СОКРАЩЕНИЯ

- $АЦП$ — аналого-цифровой преобразователь
 $ПСДС$ — псевдослучайный двоичный сигнал
 $ЦАП$ — цифро-аналоговый преобразователь
 $ЦП$ — центральный процессор
 $M...$ — многомерный...

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм идентификации 72, 372
— — быстрый 372
— — нерекуррентный 356
— — рекуррентный 352, 356, 393
— корректирующий 23
— Ньютона-Рафсона 364
— оценки состояния 281
— позиционный 81
— скоростной 82
— управления 16, 393. *См. также*
 Регуляторы
— усреднения рекуррентный 466, 470
— — адаптивный 17
— — параметрически оптимизируе-
 мый 16, 83, 195, 237
— — по состоянию 136, 238
— — с минимальной дисперсией 17
— — — подстройкой параметров 510
— фильтрации 462, 466—469
— — по методу квадратного корня 472
Анализ корреляционный 72
— теоретический 71
— экспериментальный 71
Анализатор модальный 155
- Вектор собственный 154
Вентилятор 425
Водородный показатель 426
Воздухонагреватель 425
Возмущения детерминированные 76
— случайные 415
— стохастические 76
Время установления 96
Выбор априорной информации 423
Вычет 63
- Двигатель шаговый 481
Дискретизация 28, 62
- Дисперсия сигнала 242
Дифференциатор 21
- Затраты вычислительные 228, 408
— на синтез 229
— — управление 96, 217, 229, 249
Зона нечувствительности 453
- Идентификация в замкнутом контуре
 374, 384
— косвенная 376, 386
— объектов 71, 350
— параметров 351, 375, 384
— прямая 380, 384, 386
— текущая 18, 352
— — в реальном времени 352
Интегратор 21
Интегрирование по методу прямоуголь-
 ников 64
— — — трапеций 65
Испаритель 310
- Качество управления 96, 110, 249, 328
— — показатели 216
Квантование информации 19
— коэффициентов 446, 451
— переменных 446
— по времени 20, 26
— — уровню 18, 23, 441
— промежуточных результатов 446,
 451
Компенсация смещения 402
Котел паровой 310
Коэффициент весовой 85, 109, 258, 424
— значимости оценки 424
— интегрирования 87
— опережения 87
— передачи 87, 295

- связи 313, 330
- — динамический 315
- — статический 316
- Критерий *Гурвица* 46
- качества 76, 78
- — квадратичный 78, 85, 137, 272
- *Рауса* 46
- «смешанный» 101

- Матрица весовая 137, 177
- ковариационная 243, 274, 277, 283
- коррекции 286
- наблюдаемости 58
- переходная 50
- управляемости 57
- Метод *Байеса* 282
- вспомогательных переменных 72
- градиентный 86
- *Ляпунова* 451
- максимального правдоподобия 72, 272
- малых постоянных времени 480
- наименьших квадратов 72, 282
- оценивания
- — константы 359
- — параметров 352
- — рекуррентный 352
- — установившегося значения 358
- поиска 86
- «проб и ошибок» 84
- прямоугольников 81
- стохастической аппроксимации 366
- трапеций 82
- усреднения 358
- эффективных значений 480
- Моделирование 94, 267, 450
- Модель вход-выход 389
- математическая 61
- — объекта управления 389
- непараметрическая 16
- параметрическая 16, 389
- построение 71
- Модификация алгоритмов управления 91
- МП-модель 354
- Мультиплексирование 21

- Наблюдаемость 57
- Наблюдатель 16
- *Льюинбергера* 160
- состояния 159
- — пониженного порядка 173
- эквивалентный 160
- Настройка алгоритмов управления 23, 350
- — прямой метод 349
- с обратной связью 349
- — прямой связью 349
- НК-модель 354

- Области устойчивости 329
- Обработка информации в реальном масштабе времени 352
- — пакетная 352
- Объект, параметрически идентифицируемый 376
- тестовый 94, 511
- управления 58
- — математические модели 389
- — многомерный 17, 309
- — — несимметричный 313
- — — симметричный 313, 328
- — с запаздыванием 51, 260
- Ожидание математическое 241
- Операции типа сложения 217
- — умножения 217
- Описание систем в пространстве состояний 47
- — канонические формы 52, 53
- Оптимизация параметров 84, 331
- Отклонение среднеквадратическое 96
- Оценивание параметров 389
- — в замкнутом контуре 386
- переменных состояния 389
- сигналов 390
- — рекуррентное 393
- Ошибка управления 85, 227

- Парогенератор 501
- Перегреватель 310
- Передаточная функция
- — дискретная 38
- Переменная регулируемая 73

- состояния 47
- управляющая 73
- Перерегулирование максимальное 96
- Показатель качества 217
- управления динамический 231, 256, 263, 456
- рН 426
- Полюса действительные 43
- комплексно-сопряженные 44
- Понижение порядка модели 67
- Правила настройки 76, 113, 331
- Преобразование билинейное 45
- Лапласа 30
- Фурье 31
- Преобразователь аналого-цифровой 19
- цифро-аналоговый 19, 444
- Приборы измерительные 112
- Принцип максимума *Понтрягина* 138
- оптимальности *Беллмана* 138, 279
- разделения 390
- стохастической эквивалентности 391, 393
- эквивалентности 277
- Проектирование автоматизированное 18, 483
- Пространство состояний 47
- Процесс авторегрессионный 246
- марковский 243, 281
- — векторный 244
- — первого порядка 243
- со скользящим средним 247
- Процессор центральный (ЦП) 443
- Развязка** 335, 345
- по возмущающим сигналам 336
- — задающим сигналам 336
- — собственным движениям 336
- Расход щелочи 426
- Реализация минимальная 325, 433
- Реализуемость 121
- Регулятор адаптивный с прямой связью 429
- аperiodический 16, 125, 195, 210, 225
- вспомогательный 290
- — коэффициент передачи 295
- главный 313, 339
- дуальный 392
- интегрирующего типа 89
- компенсационный 120, 127, 210, 299
- матричный полиномиальный 340, 434
- — — аperiodический 340
- модальный 152
- недугальный 392
- основной 291, 296
- перекрестный 327, 339
- пониженной чувствительности 391
- предиктор 184, 195, 212
- — модифицированный 184
- пропорционального типа 89
- пропорционально-дифференциального типа 89
- робастный 205
- с минимальной дисперсией 17, 252, 345, 394
- — подстройкой параметров 388
- — прямой связью 298, 504
- — эталонной моделью 350
- самооптимизирующийся 350, 338
- — адаптивный 388
- состояния 16, 136, 185, 189, 210, 214, 225, 272, 344
- — многомерный 344—347, 434
- стохастически эквивалентный 391
- стохастический 408
- Ряд *Тейлора* 364
- Серворегулятор** 73
- Сигналы векторные случайные** 242
- некоррелированные 242
- непрерывные 13
- нестационарные 241
- ортогональные 242
- случайные 241, 360
- спектр 112
- стационарные 241
- — в широком смысле 242
- стохастические 17, 240
- эргодические 241
- Синтезатор модальный** 155
- Системы, параметрически оптимизируемые** 76

- с астатизмом 40
- — задающим сигналом 73
- — запаздыванием 40
- следящие 73
- стабилизации 73
- статические 40
- структурно оптимизируемые 76
- терминальные 73
- уравнений, плохо обусловленные 371
- Системы управления адаптивные 349
- каскадные 17, 289
- с одним входом и одним выходом 22
- — перекрестными связями 22
- — подстройкой параметров 18
- — прямой связью 17, 120, 289
- со многими входами и многими выходами 22
- связные 289
- Сокращение нулей и полюсов 122, 255, 262
- Сравнение регуляторов 206
- Структура Р-каноническая 311, 312, 322, 337
- V-каноническая 311, 312, 323, 339
- Сушилка барабанная 492
- Такт квантования 25, 33, 133, 179, 328
- Теорема *Котельникова* 458
- разделения 164, 276
- *Шеннона* 33, 112
- Теория чувствительности 198
- Теплообменник 425, 488
- Транспонирование частот 459
- Управление децентрализованное 14
- иерархическая структура 11
- каскадное 289
- программное 14
- централизованное 13
- цифровое 14
- Управляемость 57, 144, 262
- Уравнение разностное 40, 49
- *Риккати* 143, 179, 345
- характеристическое 144, 149, 211, 256
- Усилитель пропорциональный 21
- Условия идентифицируемости 376, 382
- минимальной реализации 433
- реализуемости 41
- сходимости 356
- Устойчивость 45, 327, 403
- асимптотическая 45, 446
- критерии 46
- условия 403
- Устройства исполнительные 18, 470
- — динамические характеристики 471
- — дискретного типа 475, 481
- — интегрирующие 474, 477
- — — с переменной скоростью 477
- — — — постоянной скоростью 478
- — — — регулируемой скоростью 473
- — пропорциональные 473, 476
- Фиксатор 20, 33
- Фильтр аналоговый 459
- *Баттерворта* 460
- *Бесселя* 460
- *Винера* 456
- высокочастотный 465
- *Калмана* 275, 281, 283, 288
- низкочастотный 462
- — второго порядка 464
- — первого порядка 462
- полосовой 456
- специального типа 466
- цифровой 462
- *Чебышева* 460
- Фильтрация аномальных выбросов 469
- возмущений 456
- шумов 23
- Формат с фиксированной точкой 444
- — с плавающей точкой 444
- Функция автоковариационная 241
- автокорреляционная 241
- взаимно ковариационная 242
- дискретная
- корреляционная 242
- *Кронекера* 272, 282
- описывающая 451
- решетчатая 29
- чувствительности 200, 236

Цикл предельный 446, 448

ЦП (центральный процессор) 443

Частота среза 459

— — граничная 459

— — нормированная 459

Чувствительность 199, 227

— критерия качества 203

— параметрическая 200

— переменных состояний 203

— собственных значений 203

Шаг квантования 442

Шум белый 242, 275

— квантования 446, 447

Экстраполятор нулевого порядка 20,
38

z-преобразование 34

— — обратное 36

— — теорема 36

Элемент главный 311, 316

— связи 311, 316

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Введение	11
Иерархическая структура управления	11

Часть I

Объекты управления и управляющие ЭВМ

Глава 2. Принципы управления с помощью ЭВМ	19
Глава 3. Дискретные системы управления	25
3.1. Дискретные сигналы	25
3.1.1. Дискретные по времени функции и разностные уравнения	25
3.1.2. Решетчатые функции	29
3.2. Применение преобразования Лапласа для анализа дискретных функций времени	30
3.2.1. Преобразование Лапласа	30
3.2.2. Теорема прерывания	31
3.2.3. Фиксирующий элемент	33
3.3. z-преобразование	34
3.3.1. Введение в метод z-преобразования	34
3.3.2. Теоремы z-преобразования	36
3.3.3. Обратное z-преобразование	36
3.4. Дискретная передаточная функция	37
3.4.1. Сумма свертки	37
3.4.2. Дискретная передаточная функция	37
3.4.3. Свойства дискретной передаточной функции	40
3.5. Полюса передаточной функции и анализ устойчивости	43
3.5.1. Расположение полюсов на плоскости z	43
3.5.2. Условие асимптотической устойчивости	45
3.5.3. Билинейное преобразование и критерий устойчивости	45
3.6. Представление систем в пространстве состояний	47
3.7. Математические модели объектов управления	58
3.7.1. Основные типы технических объектов управления	59
3.7.2. Построение дискретных моделей на основе непрерывных моделей	61
3.7.3. Упрощенное представление моделей объектов управления для дискретных сигналов	66
3.7.4. Построение моделей и идентификация объектов	70

Часть II

Системы управления с детерминированными возмущениями

Глава 4. Детерминированные системы управления	73
Глава 5. Параметрически оптимизируемые регуляторы	81
5.1. Дискретное представление дифференциальных уравнений непрерывных ПИД-регуляторов	81

5.2.	Параметрически оптимизируемые дискретные алгоритмы управления низкого порядка	83
5.2.1.	Алгоритмы управления первого и второго порядков	86
5.2.2.	Алгоритмы управления с заданным начальным значением управляющей переменной	90
5.3.	Модификации дискретных алгоритмов управления	91
5.4.	Результаты моделирования	94
5.4.1.	Тестовые объекты	94
5.4.2.	Результаты моделирования алгоритмов управления второго порядка	96
5.5.	Выбор такта квантования для параметрически оптимизируемых алгоритмов управления	110
5.6.	Правила настройки параметрически оптимизируемых алгоритмов управления	113
Глава 6.	Компенсационные регуляторы	120
Глава 7.	Регуляторы для систем с конечным временем установления (апериодические регуляторы)	125
7.1.	Обычный аperiодический регулятор	125
7.2.	Аperiодический регулятор повышенного порядка	129
7.3.	Выбор такта квантования для аperiодических регуляторов	133
Глава 8.	Регуляторы состояния	136
8.1.	Оптимальные регуляторы состояния по начальным условиям	136
8.2.	Оптимальные регуляторы состояния для внешних возмущений	146
8.3.	Регуляторы состояния с заданным характеристическим уравнением	150
8.4.	Модальные регуляторы состояния	152
8.5.	Регуляторы состояния с конечным временем установления	157
8.6.	Наблюдатели состояния	159
8.7.	Регуляторы состояния с наблюдателями	162
8.7.1.	Наблюдатель для начальных условий	163
8.7.2.	Наблюдатель для внешних возмущений	165
8.8.	Наблюдатель состояния пониженного порядка	173
8.9.	Выбор весовых матриц и такта квантования	177
8.9.1.	Весовые матрицы для регуляторов состояния и наблюдателей	178
8.9.2.	Выбор такта квантования	179
Глава 9.	Регуляторы для объектов с большим запаздыванием	181
9.1.	Модели объектов с запаздыванием	181
9.2.	Детерминированные регуляторы для объектов с запаздыванием	183
9.2.1.	Объекты с большим запаздыванием и дополнительной динамикой	183
9.2.2.	Объекты с чистым запаздыванием	185
9.3.	Сравнение качества процессов управления и чувствительности различных регуляторов для процессов с запаздыванием	190
Глава 10.	Управление нестационарными объектами с помощью регуляторов с постоянными параметрами	198
10.1.	Чувствительность систем с обратной связью	199
10.2.	Управление объектами с большими изменениями параметров	204
Глава 11.	Сравнительный анализ регуляторов для детерминированных возмущений	206
11.1.	Сравнение структур регуляторов: полюса и нули	206
11.1.1.	Обобщенные линейные регуляторы с заданным расположением полюсов	208
11.1.2.	Параметрически оптимизируемые регуляторы низкого порядка	210

11.1.3.	Обобщенный компенсационный регулятор	210
11.1.4.	Апериодический регулятор	210
11.1.5.	Регулятор-предиктор	212
11.1.6.	Регулятор состояния	213
11.2.	Сравнение показателей качества	216
11.3.	Сравнение качества алгоритмов управления	218
11.4.	Сравнение динамического показателя управления	231
11.5.	Рекомендации по применению алгоритмов управления	237

Часть III

Системы управления со случайными возмущениями

Глава 12.	Стохастические системы управления	240
12.1.	Предварительные замечания	240
12.2.	Математические модели случайных сигналов	241
12.2.1	Основные понятия	241
12.2.2.	Марковские процессы	243
12.2.3.	Скалярные стохастические разностные уравнения	246
Глава 13.	Параметрически оптимизируемые регуляторы при случайных возмущениях	248
Глава 14.	Регуляторы с минимальной дисперсией	252
14.1.	Регуляторы с минимальной обобщенной дисперсией для объектов без запаздывания	252
14.2.	Регуляторы с минимальной обобщенной дисперсией для объектов с запаздыванием	260
14.3.	Регуляторы с минимальной дисперсией без статического смещения	263
14.3.1.	Введение дополнительного интегрирующего члена	264
14.3.2.	Минимизация ошибки регулирования	265
14.4.	Регуляторы с минимальной дисперсией для объектов типа чистого запаздывания	265
14.5.	Результаты математического моделирования	267
Глава 15.	Регуляторы состояния при случайных возмущениях	272
15.1.	Оптимальные регуляторы состояния в случае белого шума	272
15.2.	Оптимальные регуляторы с оценкой состояния в случае белого шума	275
15.3.	Оптимальные регуляторы с оценкой состояния при случайных возмущениях	277
15.4.	Алгоритм оценки состояния (фильтр Калмана)	281
15.4.1.	Взвешенное усреднение двух векторных величин	283
15.4.2.	Рекуррентный алгоритм оценивания вектора состояния	285

Часть IV

Связные системы управления

Глава 16.	Каскадные системы управления	290
Глава 17.	Регуляторы с прямой связью	298
17.1.	Компенсационные регуляторы с прямой связью	299
17.2.	Параметрически оптимизируемые регуляторы с прямой связью	302
17.2.1.	Параметрически оптимизируемые регуляторы с прямой связью без заданного начального значения управляющей переменной	302

17.2.2. Параметрически оптимизируемые регуляторы с прямой связью с заданным начальным значением управляющей переменной	303
17.3. Регуляторы с прямой связью для переменных состояния	306
17.4. Регуляторы с прямой связью с минимальной дисперсией	306

Часть V

Многомерные системы управления

Глава 18. Структуры многомерных объектов	309
18.1. Структурные свойства представления объектов в виде передаточных функций	310
18.1.1. Канонические структуры	310
18.1.2. Характеристическое уравнение и коэффициент связи	313
18.1.3. Влияние внешних сигналов	317
18.1.4. Взаимодействие главных регуляторов	318
18.1.5. Представление в матричной полиномиальной форме	320
18.2. Структурные свойства представления в пространстве состояний	321
Глава 19. Параметрически оптимизируемые многомерные системы управления	326
19.1. Параметрическая оптимизация главных регуляторов	327
19.1.1. Области устойчивости	328
19.1.2. Оптимизация параметров и правила настройки двумерных регуляторов	331
19.2. Развязка с помощью перекрестных регуляторов	335
19.3. Параметрическая оптимизация главных и перекрестных регуляторов	339
Глава 20. Многомерные матричные полиномиальные системы управления	340
20.1. Обобщенный матричный полиномиальный регулятор	340
20.2. Матричный полиномиальный апериодический регулятор	340
20.3. Матричные полиномиальные регуляторы с минимальной дисперсией	342
Глава 21. Многомерные системы управления с регуляторами состояния	344
21.1. Многомерные регуляторы состояния с заданным расположением полюсов	344
21.2. Многомерные регуляторы, основанные на решении матричного уравнения Риккати	345
21.3. Многомерные регуляторы состояния для развязки систем	345
21.4. Многомерные регуляторы состояния с минимальной дисперсией	345

Часть VI

Адаптивные системы с идентификацией параметров объектов управления

Глава 22. Адаптивные системы управления	348
Глава 23. Методы текущей идентификации динамических объектов и моделей случайных сигналов	352
23.1. Модели объектов и случайных сигналов	352
23.2. Рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК)	354
23.2.1. Идентификация модели динамического объекта	354
23.2.2. Случайные сигналы	360
23.3. Обобщенный рекуррентный метод наименьших квадратов (ОРМНК)	361

23.4.	Рекуррентный метод вспомогательных переменных (РМВП)	362
23.5.	Рекуррентный метод максимального правдоподобия (РММП)	363
23.6.	Метод стохастической аппроксимации (МСА)	367
23.7.	Общая схема рекуррентных алгоритмов идентификации . .	367
23.8.	Методы повышения численной устойчивости рекуррентных алгоритмов идентификации	371
Глава 24.	Идентификация в замкнутом контуре	374
24.1.	Параметрическая идентификация в отсутствие возмущений	375
24.1.1.	Косвенная идентификация объекта управления (случай $A+B+D$)	376
24.1.2.	Прямая идентификация объекта управления (случай $B+Г+D$)	380
24.2.	Параметрическая идентификация при внешних возмущениях	384
24.3.	Методы оценивания параметров в замкнутом контуре . . .	386
24.3.1.	Косвенная идентификация параметров объекта в отсутствие возмущений	386
24.3.2.	Прямая идентификация параметров объекта в отсутствие возмущений	386
24.3.3.	Прямая идентификация параметров объекта при наличии возмущений	387
Глава 25.	Регуляторы с подстройкой параметров	388
25.1.	Введение	388
25.2.	Алгоритмы управления	393
25.2.1.	Алгоритмы управления с конечным временем установления	393
25.2.2.	Регуляторы с минимальной дисперсией	394
25.2.3.	Регуляторы с оптимизируемыми параметрами	396
25.2.4.	Линейные регуляторы обеспечивающие заданное расположение полюсов	399
25.2.5.	Регулятор состояния	399
25.3.	Сочетание алгоритмов оценивания параметров и управления (случай скалярных входа и выхода)	399
25.3.1.	Стохастически эквивалентные регуляторы с подстройкой параметров	401
25.3.2.	Стохастические регуляторы с подстройкой параметров . .	408
25.3.3.	Детерминированный регулятор с подстройкой параметров	412
25.4.	Экспериментальное сравнение различных регуляторов с подстройкой параметров	412
25.5.	Выбор априорной информации	423
25.6.	Практическая реализация адаптивного управления	424
25.6.1.	Адаптивное управление воздухомогревателем	425
25.6.2.	Адаптивное управление водородным показателем рН	426
25.7.	Адаптивное управление с прямой связью	429
25.8.	Многомерные регуляторы с подстройкой параметров	431

Часть VII

Цифровое управление с помощью управляющих и микро-ЭВМ

Глава 26.	Эффекты квантования по уровню в цифровых системах управления	441
26.1.	Источники ошибок, связанных с квантованием по уровню	442
26.1.1.	Аналоговый вход	442
26.1.2.	Центральный процессор	443
26.1.3.	Аналоговый выход	444

26.2.	Анализ различных эффектов квантования	447
26.2.1.	Влияние квантования на переменные величины	447
26.2.2.	Влияние квантования числовых коэффициентов	451
26.2.3.	Влияние квантования результатов промежуточных вычислений	451
Глава 27.	Фильтрация внешних возмущений	456
27.1.	Источники шумов в системах управления и их спектральные характеристики	456
27.2.	Аналоговые фильтры	459
27.3.	Цифровые фильтры	462
27.3.1.	Низкочастотные фильтры	462
27.3.2.	Высокочастотные фильтры	465
27.3.3.	Фильтры специальных типов	466
Глава 28.	Объединение цифровых алгоритмов управления и исполнительных устройств	471
Глава 29.	Автоматизированные методы проектирования алгоритмов управления	483
Глава 30.	Практическое применение идентификации и цифрового управления	488
30.1.	Цифровое управление теплообменником	488
30.2.	Цифровое управление барабанной сушилкой	492
30.3.	Цифровое управление парогенератором	501
30.3.1.	Идентификация по двум входам/двум выходам и автоматизированный расчет регуляторов с оптимизируемыми параметрами (пакеты программ OLID-MIMO, CADCA-MIMO, CADCA-SISO)	504
30.3.2.	Раздельное адаптивное управление подсистемами с одним входом / одним выходом (пакет программ ADREG)	505
30.3.3.	Адаптивное управление по двум входам/двум выходам (пакет программ MACS)	505
30.4.	Заключение	509
Приложение.	Тестовые объекты управления для моделирования	511
	Дифференцирование векторов и матриц	514
	Таблица z-преобразований	516
	Список сокращений и обозначений	517
	Литература	520
	Предметный указатель	531

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».

Рольф Изерман
ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Научный редактор Т. Н. Шестакова
Мл. научный редактор Н. Н. Титова
Художник В. Е. Карпов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Е. С. Потапенкова
Корректор В. И. Постнова

ИБ № 3597

Сдано в набор 27.06.83. Подписано к печати 31.01.84. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 17,00 бум. л. Усл. печ. л. 34,00. Усл. кр.-отт 34,00. Уч.-изд. л. 31,60. Изд. № 20/2603. Тираж 10 500 экз. Заказ № 2067. Цена 2 р 50 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054, Москва, Валовая, 28