

Лекция 1
Неопределённый
Интеграл

Пусть φ -функции $f(x)$, $F(x)$ определены на промежутке I
 $F(x)$ - называется первообразной для $f(x)$ если для $\forall x$
принадлежащих промежутку I $F'(x) = f(x)$

Тема 1. - Свойства неопределённых интегралов и первообразных.

Пусть $f(x)$, $F(x)$, $G(x)$ определены на промежутке I

Пусть $f(x)$ и $G(x)$ - первообразные на I

Тогда первообразные отличаются не более чем на const

Док-во:

и.а. $F(x)$ и $G(x)$ - первообр. φ -функции $f(x)$ на промежутке

$$\begin{aligned} \text{то по определению} \quad & \left. \begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ G'(x) &= f(x) \end{aligned} \right\} (1) \end{aligned}$$

Рассм. φ -функцию $\varphi(x) = F(x) - G(x)$

Найдём производную этой φ -функции

$$\varphi'(x) = \underbrace{F'(x) - G'(x)}_{(1)} = f(x) - f(x) = 0$$

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C, \quad C = \text{const}$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \text{const} \quad \blacksquare$$

Неопределённый интеграл - совокупность первообразных φ -функций $f(x)$ - назыв. неопр. интегралом

на кр-ке I дана эта ф-ция и обоза. $\int f(x) dx$

$f(x)$ - подынтегральная ф-ция

$f(x) dx$ - подынтегр. выражение

x - переменная интегрирования

Согласно сар. ио неопр. интеграла

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C = \text{const}$$

Теор. смысл.

связность кривых со скоростью и касательной

Свойства неопр. интеграла:

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$2. d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$3. \int d f(x) = f(x) + C$$

$$4. \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad \lambda \neq 0, \lambda = \text{const}$$

$$5. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Теорема 5.2

Подстановка в неопр. интеграле

1) Пусть t . $u = f(x)$ опр-на и гл-на на кр-ке I_1

2) Пусть ф-ция $f(u)$ - опр-на на кр-ке I_2

$$3) \text{ Пусть } \int f(u) du = F(u) + C, \quad C = \text{const}$$

$$\int f(f(x)) f'(x) dx = F(f(x)) + C$$

Доказ-во

т.е. $\int f(u) du = F(u) + C$, $C = \text{const}$, тогда по сур.

$$F'(u) = f(u)$$

$$\begin{aligned} \text{какая } (f(f(x)))' &= f'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \left\{ f'(f(x)) = f'(u) = f(u) = f(f(x)) \right\} = \\ &= f(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow f(f(x)) - \text{первообр. ф-ция } f(f(x)) \\ &\cdot f'(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int f(f(x)) f'(x) dx = F(f(x)) + C$$

Теорема 3

Важная теорема в теор. интегрирования

Пусть

- 1) $x = f(t)$ сур-на и гомеоморфизм на I_1
- 2) $x = f(t)$ осуществляет взаимно однознач. отображ. отрезка I_1 на отрезок I_2
- 3) $f'(t) \neq 0$ для $\forall t \in I_1$
- 4) $f(t)$ сур-на на отрезке I_2 ,

тогда если на отрезке I_1

$$\begin{aligned} \int f(f(t)) f'(t) dt &= F(t) + C, \text{ то на } I_2 \int f(x) dx = \\ &= F(f^{-1}(x)) + C, \text{ где } t = f^{-1}(x) - \text{обр. ф-ция } x = f(t) \end{aligned}$$

Дока-во:

Т.к. ф-ция $x = f(t)$ ~~обозначает~~^{осущ.} взаимное
однозн. отобра. f на пр-ке I_1 на I_2 ,
т.к. она ф-ция на I_1 и $\neq \emptyset$ и в любой
точке этого пр-ка f обратная ф-ция
производящая которой равна (по т. об. обр. пр-от)

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (3)$$

$$\int f(f(t)) f'(t) dt = f(t) + c \Rightarrow f'(t) = f'(f^{-1}(x)) =$$
$$= \underbrace{f(f(f^{-1}(x))) f'(f^{-1}(x))}_{f(f(t)) \cdot f'(t)} \rightarrow (2)$$

Найдем пр-ую

$$(f(f^{-1}(x)))' = \underbrace{f'(f^{-1}(x))}_{(2)} \cdot (f^{-1}(x))' =$$

исч 2

$$= f(f(f^{-1}(x))) f'(f^{-1}(x)) \cdot \underbrace{(f^{-1}(x))'}_{\text{исч (3)}}$$

$$= f(f(f^{-1}(x))) \cdot \cancel{f'(f^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{\cancel{f'(f^{-1}(x))}}$$

$$= f(f(f^{-1}(x))) = f(x)$$

$\Rightarrow f(f^{-1}(x))$ — первообр. ф-ция $f(x)$ т.е.

$$\int f(x) dx = F(f^{-1}(x)) + c$$

Примечание

$$1) \int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + c$$

$$b = \text{const}$$

$$f'(x+b) = f'(x+b) \cdot (x+b)' = f'(x+b) = f'(x+b)$$

$$2) \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c$$

$$a = \text{const}, a \neq 0$$

$$\int f(ax) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = ax \\ dt = a dx \\ dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{a} F(t) + c = \frac{1}{a} F(ax) + c$$

$$\int f(x+b) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+b \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int f(t) dt = F(t) + c = F(x+b) + c$$

$$3) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Теорема 54

Интегрирование по частям в неопр. интеграле

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — произвольные функции на отрезке I

Пусть существуют первообразные функции

$$v \cdot u', \text{ тогда } \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int v \cdot u' dx \quad \text{или}$$

$$\underbrace{\int u dv = u \cdot v - \int v du}_{\text{формула замены}}$$

Док-во:

4. Интеграл

$$(u \cdot v)' = u' v + u \cdot v'$$

$$\underbrace{d(u \cdot v)}_{(uv)'} = u' v dx + u v' dx$$

$$d(uv) = v du + u dv \quad (du = u' dx) \quad (dv = v' dx)$$

$$u dv = d(uv) - v du$$

$$\int u dv = \int (d(uv) - v du)$$

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

или б. с точностью

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{или} \quad \int u v' dx = uv - \int v u' dx$$

4. Интеграл

$$I. \int P_n(x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \operatorname{arccot} x \end{array} \right\} dx$$

$P_n(x)$ — многочлен степени n

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Замена $u \left\{ \begin{array}{l} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \operatorname{arccot} x \end{array} \right\} \Rightarrow du =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{1+x^2} \\ -\frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} dx$$

$$dv = P_n(x) dx \Rightarrow v = \int P_n(x) dx$$

Примеры

интегрирование квадратичных трехчленов

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \end{array} \right\} =$$
$$= \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x + \frac{1}{2}} + C$$

$$I. \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{b}{a} = p \\ \frac{c}{a} = q \end{array} \right| =$$

$$a, b, c = \text{const}, a \neq 0, b \neq 0$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \ln \left| \frac{t + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{t - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right|$$
$$= \frac{1}{a \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \ln \left| \frac{x + \frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{x + \frac{p}{2} - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right| \text{ при } q - \frac{p^2}{4} > 0$$

$$II \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \left\{ (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b \right\}$$

$$= \int \frac{(2ax + b) + N - \frac{Mb}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx +$$

$$+ \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = ax^2 + bx + c \\ dt = (2cx + b) dx \end{array} \right\} = \frac{M}{2a} \int \frac{1}{t} dt + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right)$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{M}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

Интегрирование рациональных дробей

Ф-ия $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ многочлен степени m

а $Q_n(x)$ многочлен степени n называется
рац. дробью

Если $m \geq n$, то ф-ция наз. некрив. рац.
дробью

Если $m < n$, то правильная

Если $m \geq n$ то для интегрирования
рац. дроби нужно разделить многочлен $P_m(x)$
на многочлен $Q_n(x)$, в рез-те получается
сумма некоторого многочлена степени $m-n$
и крив. рац. дроби.

Рассмотрим интегрирование рациональной
дроби

$$I \quad \frac{A}{x-x_0}$$

$$II \quad \frac{A}{(x-x_0)^k}$$

$$III \quad \frac{Mx + P}{x^2 + px + q}$$

$$IV \quad \frac{Mx + P}{(x^2 + px + q)^k}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

- А корни многочлена ит-по
- 1) каковы корни ит-по $Q_n(x)$ этих корней будут
 - и
 - 2) располагавшие рациональными дробями и сумму простейших дробей, при этом каждому простому действ. корню (корню действ. имеет кратность Γ) (каждому действ.-ому корню кратности ν будет соответ. сумма ν простейших дробей вида Π)

если x_i - корень многочлена $Q_n(x)$ кратности ν , то если в разложении будет соответ. сумма Γ дробей вида: $\frac{A}{(x-x_i)} = \frac{A_{\nu-1}}{(x-x_i)^{\nu-1}}$

- 3) Если многочлен содержит комплекс сопряженных кор. $x_1 = a + ib$ (корни комплекс. $x_1 + x_2 = a - ib$)

только значения при мнимой части, а-действ. часть некомп. числа ib - мнимая часть), тогда этот пар комплексно-сопряженных корней будет соответ. дробь вида $\overline{\Pi}$

- 4) Если ~~многочлен~~ многочлен $Q_n(x)$ содержит ~~комплексно~~ комплексно-сопряженных корни кратности ν , то для этого из корней в разложении будет соответ. сумма ν простейших дробей

иногда

$$\frac{M_0 x + N_0}{(x^2 + px + q)^0} + \frac{M_{v-2} x + N_{v-2}}{(x^2 + px + q)^{v-2}} + \dots + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^1}$$

в рез-те рациональная дробь будет.

Представлена в виде суммы простейших дробей в зав-ти от типа корня где коэф

$AN = \text{const}$ (известные)

Находим неизвестные коэффициенты методом неопр. коэф. для этого приводим простейшие дроби к общ. знаменателю

В рез-те зп-н^е получаем многочлен $Q_n(x)$, поскольку мы рассматриваем

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dots = \frac{S_m(x)}{Q_n(x)}, \text{ то и числит. будут равны}$$

Для того чтобы найти коэф. приравниваем числители $P_m(x) = S_m(x)$, два многочлена равны. если равны коэф. при одинаковых коэф. при $P_m(x)$ и $S_m(x)$ в рез-те чего получаем систему ур-ий, решая которую, получаем коэф $A \in \mathbb{Q}, M \in \mathbb{Q}, N \in \mathbb{Q}$

б) Находим интеграл от рациональной дроби, как интеграл суммы простейших

дробей с натуральными в них коэф., что в свою очередь, равно сумме чисел от этих др.-их дробей

$$I. \int \frac{A}{x-x_0} dx = A \int \frac{1}{x-x_0} dx = A \ln(x-x_0) + C$$

$$II. \int \frac{A}{(x-x_0)^2} dx = A \int \frac{1}{(x-x_0)^2} = A \cdot \frac{1}{-1+1} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{-1+1}} + C$$

$$\int \frac{x+2}{x^4+5x^3-6x^2} dx = \frac{1}{36} \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{36} \int \frac{1}{x+2} dx - \frac{1}{36} \int \frac{1}{x+3} dx$$

$$1) x^4 + 5x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 + 5x - 6) \quad \textcircled{=}$$

$x=0$ - действ. корень кратности $\nu=II$

$x_2 = -2$ - действ. корень (кросстой) $\nu \in I$

$x_3 = -3$ - действ. корень $\nu \in I$

$$2) \frac{x+2}{x^4+5x^3-6x^2} = \frac{A_2}{(x-0)^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

чтобы найти A_1, A_2, B, C нужно привести к общ.

знамен

$$= \frac{A_2 (x+2)(x+3) + A_1 x (x+2)(x+3) + B (x+3)x^2 + C (x+2)x^2}{x^2 (x+2)(x+3)}$$

приравниваем числитель

$$x+2 = A_2 x^2 + \nu A_2 x + 6 A_2 + A_1 x^3 + 5 A_1 x^2 +$$

$$+ 6 A_1 x + B x^3 + 3 B x^2 + C x^3 + 2 C x^2$$

$$x+2 = (A_2 + B + C) x^3 + (A_2 + 5 A_1 + 3 B + 2 C) x^2 +$$

$$+ (3 A_2 + 6 A_1) x + 6 A_2$$

$$x^3 : 0 = A_1 + B + C$$

$$x^2 : 0 = A_2 + 5A_1 + 3B + 2C$$

$$x : 5A_2 + 6A_1 = 1$$

$$x^0 : 1 = 6A_2$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

$$6A_1 = 1 - \frac{5}{6} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{36}$$

$$\begin{cases} B + C = -\frac{1}{36} \\ 3B + 2C = -\frac{1}{36} \end{cases} \quad B = \frac{1}{36}$$

$$C = -\frac{1}{36}$$

$$\textcircled{=} \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln|x| + \frac{1}{36} \ln|x+4| - \frac{1}{36} \ln|x+3|$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx$$

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

$$\frac{A(x+a) + B(x-a)}{x^2 - a^2} = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

$$1 = A(x+a) + B(x-a)$$

$$x = a \quad 1 = 2Aa \rightarrow A = \frac{1}{2a}$$

$$x = -a \quad 1 = -2Ba \rightarrow B = -\frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x-a} dx - \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x+a} dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

Лекция 53

Интегрирование тригонометрических ф-ций

$$I \int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

а) m - нечетное
 n - четное

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx =$$
$$= \left\{ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \right\} = \int \sin^{m-1} x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x \, dx =$$
$$= \int \sin^{m-1} x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin x \, dx = \left\{ t = \sin x \right.$$
$$\left. \frac{dt}{dx} = \cos x \right\}$$
$$= \int t^{m-1} (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

б) m - четное
 n - нечетное

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \cdot \sin x \, dx =$$
$$= \left\{ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \right\} = \int (1 - \cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \sin x \, dx =$$
$$= \left\{ t = \cos x \right.$$
$$\left. \frac{dt}{dx} = -\sin x \right\} = \int (1 - t^2)^{\frac{m-1}{2}} t^{n-1} \cdot dt =$$

в) m - нечетное
 n - нечетное — замена на $\sin$ и $\cos$, так и в а.б.

г) m - четное
 n - четное — используем ф-лу понижения степеней

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^{\frac{m}{2}} dx \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^{\frac{n}{2}} dx$$

где m, n — чётные.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int (1 + \cos 4x) dx$$

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

II §

$$\textcircled{1} \int \sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} \int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int \sin(m-n)x dx = -\frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x + C$$

$$\textcircled{3} \int \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x + C$$

$$\textcircled{2} \int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + C$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

иногда
но сверху

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$(1) - (2) \quad 2 \sin \alpha \sin \beta = (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

пар. гроба за

$$\text{III} \quad \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

для верха ила мрмолонетр. нолер.

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \arctan t$$

$$dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Примечание Если $R(-\sin x, -\cos x)$, то замена

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Интегрирование некоротких

уражнений
по-русски

С помощью тригонометр. подстановки

$$I \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$x = a \sin t \quad \text{или} \quad x = a \cos t$$

$$dx = a \cos t dt$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} =$$

$$= a \sqrt{\cos^2 t} = a \cos t$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 t} = a \sqrt{1 - \cos^2 t} = a \sin t$$

$$\sin(a \cos x) = \sqrt{1 - (\cos(a \cos x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(a \sin x) = \sqrt{1 - (\sin(a \sin x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$II \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$$

$$x = a \tan t$$

или

$$x = a \sec t$$

$$dx = a \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$dx = -a \frac{1}{\sin^2 t} dt$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2} = a \sqrt{\tan^2 t + 1} = a \frac{1}{\cos t}$$

$$dx = -a \cdot \frac{1}{\sin u} du$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \csc^2 u + a^2} = a \sqrt{\csc^2 u + 1}$$

$$= \frac{a}{\sin u}$$

by

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 u} - a^2} =$$

$$= a \sqrt{\frac{1}{\sin^2 u} - 1} = a \sqrt{\frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u}} = a \sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}$$

$$= a \frac{\cos u}{\sin u}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 u} - a^2} = a$$

Пример 54

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9+x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 9t \\ dx = \frac{3}{\cos t} dt \\ \sqrt{9+x^2} = \sqrt{9+9+9t^2} = 3\sqrt{1+t^2} = 3 \cdot \frac{1}{\cos t} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{\cos t}}{9 + 9t^2 \cdot \frac{3}{\cos t}} dt = \frac{1}{3} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \frac{1}{3} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sin(\arctan \frac{x}{3})} + C$$

IV

$$\int R \left(\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{p_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{p_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{p_k}} \right) dx$$

$$a, b, c, d = \text{const}$$

Заменим $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, где n — наименьшее общее кратное чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Определение интеграла

Пусть $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a, b]$
 для $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq 0$

Разобьем отрезок a, b на n — равных отрезков
 такими же $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

поэтому называем разбивание P отрезка ab

и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n-1$ назыв. отрезками
 разбиения

Вел-ия $J(\tilde{f}) = \max (A x_i)$ — значение разбивки
 Водереш на координаты n -гои x_i в которой
 z_i — $f(x_i)$ в n -гои x_i будет наим.

$$m_i = f(\mu_i), \quad i = 1, \dots, n$$

y_i — координаты n -гои x_i будет наим. на n -гои x_i

и обозн. $M_i = P(y_i) \quad i = 1, \dots, n.$

Составим Σ

$$S' = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{— нижняя интегр. сумма}$$

$$S'' = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{— верхняя интегр. сумма}$$

$$S' < S''$$

Водереш $m = \min m_i$ из $m_i \Rightarrow S' = \sum m_i \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^n \min m_i \Delta x_i =$

$$= m \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

$$M = \max m_i$$

$$\Rightarrow (M \geq m_i)$$

$$S'' = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq S' < S'' \leq M(b-a)$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{и составим интегр. сумму}$$

Определение

Предел интегральных сумм при сжатии $\Delta(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 0$ независим от разбиения $\tilde{\Gamma}$ интервала a, b и выбора точек ξ_i , если этот предел существует, то наз. св. интегралом по св-ву $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ где } a \text{ назыв. нижний гр-л в интегр.}$$

a, b - верхний предел в интегр.

Опрез. интеграл $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

Число I назыв. опред. интегралом от $f(x)$ по a, b если для $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое что для $\forall$ разбиения $\tilde{\Gamma}$ интервала a, b при котором $|\Delta(\tilde{\Gamma})| < \delta$ выполн. кр-во $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I| < \varepsilon$

Теорема

Если $f(x)$ св-ва и непрерывна на $[a, b]$ то она ограничена на этом интервале

Кусочно непрерыв. - если она непрерывна во всех точках этого интервала за исключением конечного числа точек разрыва I рода.

Теорема:

Пусть $f(x)$ — непрерывная и кусочно непрерывная на отрезке $[a, b]$, тогда она интегрируема на этом отрезке.
 При разбиении $[a, b]$ можно выбрать в качестве n разбиений

следствие

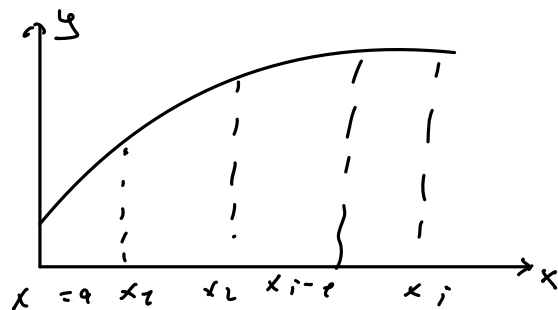
Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке

Геометр. смысл опред. интеграла

Линейной трап. называется фигура, ограниченная пр. функцией $y = f(x)$ и осью Ox

$$y = f(x) \quad f(x) \geq 0 \text{ на } [a, b]$$

$$\begin{aligned} x &\geq a \\ x &\leq b \end{aligned}$$



тогда

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

Если на отрезке x_i мы возьмем наиб. значение функции, тогда сумма будет равна $M_i \Delta x_i$;

это верхняя оценка. Если же взять наим. значение функции, тогда сумма будет равна $m_i \Delta x_i$ и получим нижнюю оценку.

и получим $f(\xi_i)$

$$S = f(\xi_i) \Delta x_i$$

Высота равна ил-зи ступ. ф-ции или $\sum$ ил-зи аппроксимаций

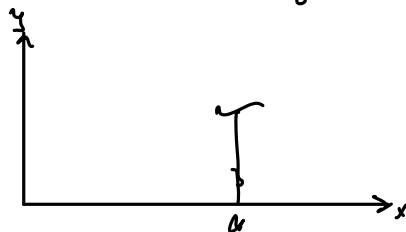
Если $\Delta x_i \rightarrow 0$ то ил-зи приближенного интеграла состоит в том, что он равен ил-зи непрерыв. функции

$$S = \lim_{\Delta(\Gamma) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Пусть $f(x) = 0$ на $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b 0 dx = 0$$

Пусть $f(x)$ определена в м. а. тогда $\int_a^a f(x) dx = 0$



Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(\Gamma) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta(\Gamma) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4. $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a, b]$

$\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$
 $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot f(\xi_i) + \beta \cdot g(\xi_i)) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i) \Delta x_i + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^n \beta g(\xi_i) \Delta x_i \right] = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

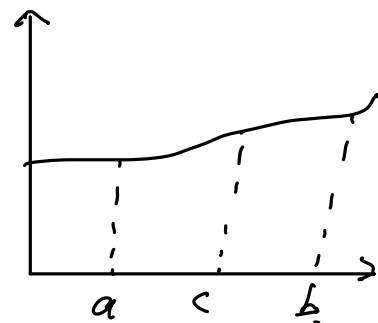
Аналогично

Лемма 5

Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Дока-во

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных отрезков так, чтобы m -с — тоже разбиение



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = c < x_{n+1} < \dots < x_m$$

$$\text{Составим интегральную сумму} \quad \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}$$

$$\lambda(\tilde{\tau}) = \max \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \text{каждый предел}$$

$$\lim_{\lambda(\tilde{\tau}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda(\tilde{\tau}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i +$$

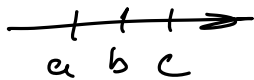
$$+ \lim_{\lambda(\tilde{\tau}) \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \int_a^c f(x) dx, \text{ т.к. } f(x) \text{ непрер.}$$
$$\int_a^b f(x) dx$$

Т.к. предел в правой части существует, то и в левой части существует. Он должен равняться $\lim_{\lambda(\tilde{\tau}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ (н.т.д.)

это в-во справедливо если

$$c > b > a$$

Если



$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

аналогично будет для $c < a < b$

б) Сравнение сир. интегралом знака функции.
 Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$
 $f(x) \geq 0$ тогда $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Доказано:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (f(\xi_i) \geq 0 \text{ и } \Delta x_i \geq 0 \Rightarrow (*) \geq 0)$$

г) Интегрирование неравенств. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Доказано:

$$\text{т.е. } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx, \text{ так как } \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - g(\xi_i)) \Delta x_i \geq 0$$

$$g(\xi_i) \neq x_i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{н.н. } f(x) \geq g(x), \text{ но} \\ f(x) - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \\ f(\xi_i) - g(\xi_i) \geq 0, \xi_i \in [a, b], i=1, n \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0 \end{array} \right\}$$

$$\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

8) Определим суп. и инфр.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\exists \forall x \in [a, b]$

$m \leq f(x) \leq M$ где $m = \min f(x)$ $x \in [a, b]$

$M = \max f(x)$ $x \in [a, b]$

тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Докажем:

н.н. $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$, но по об-б-е

$$\begin{aligned} (7) \quad \int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \\ \int_a^b m dx &= m \int_a^b dx = m \cdot |x|_a^b = m(b-a) \end{aligned}$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b-a$$

$$\int_a^b \mu dx = M \int_a^b dx = M(b-a) \quad (2)$$

Считаем (1) и (2) в (3) получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

3) Теорема о ср-е $\exists f(x)$ непрерывна и непрерывна на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ $\exists \xi$ $\int_a^b f(x) dx =$
 $= f(\xi)(b-a)$

Дока-во

Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке она достигает максим. и мин. значений

и на кажд. M значение $\forall x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$

Согласно св-ву (2)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (1)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

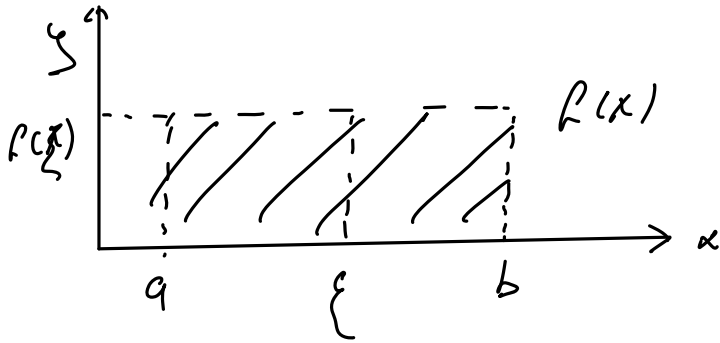
Тогда $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ - значение ср. ξ по теореме

достигаемое в нек-ой точке $\xi \in [a, b]$

$$\mu = f(\xi) \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Геометр. пояснение



Горизонтальная сумма, что ил-дл приводимой
процесса от-от шр-ном $y = f(x)$ и Δx

будет равна ил-дл прямоуго. с высотой $f(\xi)$
и основанием $(b-a)$

10) Оценка модуля от-ного ил-дл

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда $|f(x)|$ непрерывна на $[a, b]$. Если $b > a$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Если $a > b$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Доказ-во

1) $b > a$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \lim_{d(\Gamma) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| =$$

$$= \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \left\{ \begin{aligned} |a+b| &\leq |a| + |b| \\ \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \cdot |\Delta x_i| \end{aligned} \right\} =$$

$$\leq \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\text{При } b > a \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

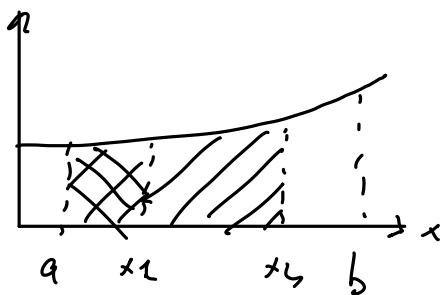
2) При $a > b$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| - \int_b^a f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| \leq \\ &\int_b^a |f(x)| dx = \left| \int_b^a |f(x)| dx \right| = \left| - \int_a^b |f(x)| dx \right| = \\ &= \left| \int_a^b |f(x)| dx \right| \end{aligned}$$

$$\text{т.е.} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |f(x)| \quad \text{при } a > b$$

Интеграл с переменным
верхним пределом

Пусть $f(x)$ непрерывна и непрерывна на $[a, b]$ $\Rightarrow f(x) \in C[a, b]$ $\exists \int_a^b f(t) dt = F(x)$, который назыв. интегралом с переменным верхним пределом



Теорема (4); О непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$
 $\int_a^x f(t) dt$ будет непрерывной для $\forall x \in [a, b]$

Докажем;

$f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a, b]$
 $\Rightarrow \exists M > 0: \forall x \in [a, b] |f(x)| \leq M$ (по определению)

$$\begin{aligned}
 & x \in [a, b] \\
 & x + \Delta x \in [a, b] \quad \Bigg| \Rightarrow | \Delta f(x) | = | f(x + \Delta x) - f(x) | = \\
 & = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left\{ \begin{aligned} &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt (3^\circ) \end{aligned} \right\} = \\
 & = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \right| \stackrel{3^\circ}{=} \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq \\
 & \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq \int_x^{x+\Delta x} M \cdot dt = M \Delta x
 \end{aligned}$$

$$|f(t)| \leq M$$

при $x \rightarrow 0$ и $f(x) \rightarrow 0$

Какому приращению арг-та соотв. такое

прир. функции $\Delta f(x) \Rightarrow$ т.е. $\Delta f(x) = 0 \Rightarrow$

$f(x)$ - непрерывная по определению непрерывная и произвольная т. $[a, b] \Rightarrow f(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ =

Теорема 15 О производной маг-ты с пере-
менным верхним пределом

Пусть $f(x)$ непрерывна и непрерывная на $[a, b] \Rightarrow$

$f(x)$ - диф-ная в $x \in [a, b]$ и $f'(x) = f(x)$

Дока-во:

$$\left. \begin{array}{l} x \in [a, b] \\ x + \Delta x \in [a, b] \end{array} \right| \Rightarrow \left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) - f(x) \right| =$$

$$\stackrel{30}{=} \left| \frac{1}{\Delta x} \left(\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \right) - f(x) \right| \stackrel{30}{=} \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - f(x) \right| = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \\ \frac{1}{\Delta x} f(x) \cdot \int_x^{x+\Delta x} 1 dt = \\ = \frac{1}{\Delta x} \cdot f(x) \cdot \Delta x = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt \right|_{\zeta_0} =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dt \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta x|} \int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dt$$

Лемма 5.6

$$\frac{1}{|\Delta x|} \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt = \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) - f(x) dt \right|$$

тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall t : |t - x| < \delta$

$$\frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} \frac{\varepsilon}{2} dt \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \frac{\varepsilon}{2} \int_x^{x+\Delta x} dt = \frac{1}{|\Delta x|} \frac{\varepsilon}{2} \Delta x$$

$$\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при условии}$$

$$|\Delta x| < \delta \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x)$ гармон. в $x \in [a, b]$

x - произб. точка $\Rightarrow$ гармон. на $[a, b]$

Теорема (6): Кватер - Лейбница

Пусть $f(x)$ непрерывна и непрерывна на $[a, b]$

Пусть $\Phi(x)$ одна из первичных $f(x)$ на $[a, b]$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$*$ - формула теоремы

Доказ.

Согласно м. (5) о произв. интеграла с переменным предельным (верхним) пределом из непрерывных $f(x)$ является интеграл с переменным предельным $f(x)$ с $\int_a^b f(x) dx$

Все перв-ных отменяется и остается нем
на const тогда $\Phi(x) - f'(x) = C, C = \text{const}$

$$\Phi(x) - \int_a^x f(t) dt = C \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = \Phi(x) - C$$

$$\text{Если } x = a \Rightarrow \sum_a^a f(t) dt = \Phi(a) + C$$

$$\Phi(a) + C = 0 \Rightarrow C = -\Phi(a)$$

$$\text{и тогда } x = b \Rightarrow \sum_a^b f(t) dt = \Phi(b) + C$$

$$\text{т.к.: } C = -\Phi(a) \Rightarrow \sum_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

заменяем $x = t$

$$dx = dt$$

$$\sum_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{или}$$

Теорема 4: об интегрировании составного
для кр. интеграла

Пусть $f(x)$ кр-ая и некр-ая на $[a, b]$

Пусть $f(t) = x$, ϕ непрерыв, убывающая и гур-
ная на $[a, b]$ При этом $\forall t \in [a, b] f(t) \in [a, b]$
 $f(a) = a, f(b) = b$ тогда $\sum_a^b f(x) dx = \sum_a^b f(f(t)) \cdot$

$$\cdot f'(t) dt$$

Доказ:

Пусть $f(x)$ — перв-ая $h(x)$ на $[a, b]$

$f(f(t))$ — перв-ая $f(f(t)) \cdot f'(t)$

$$\text{т.н. } (f(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = f(x) \\ x = \varphi(t) \end{array} \right\} = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

теор. Гр. Которая следует

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a) \quad (x \cdot *)$$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = f(\varphi(t)) \Big|_a^b =$$

$$= f(\varphi(\beta)) - f(\varphi(\alpha)) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\beta) = b \\ \varphi(\alpha) = a \end{array} \right\} =$$

$$= \int_a^b f(x) dx \quad \text{чтд.}$$

Тема 8: об интегрировании по частям
в кр. и кр-ле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ окр-ны
и непрерывны экстр-ми на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

или $\int_a^b u(x) dv = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du$

Доказ.

$$F(x) = u(x) \cdot v(x) - \int_a^x v(t) u'(t) dt$$

$$F'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x) - v(x) u'(x)$$

$$= u(x) \cdot v'(x) \Rightarrow F(x) - \text{первообр. от}$$

интеграл по частям $u(x) v'(x)$

или

$$\int_a^b v'(x) u(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx =$$

$$= u(b) v(b) - \int_a^b v(x) u'(x) dx - u(a) v(a)$$

$$\int_a^b v(x) u'(x) dx = u(b) v(b) - u(a) v(a) -$$

$$- \int_a^b v(x) u'(x) dx = \left[\frac{d}{dx} \right] u(x) v(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b v(x) u'(x) dx =$$

$$\left. \begin{aligned} u'(x) dx &= du(x) \\ v'(x) dx &= dv(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_a^b u(x) dv(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b -$$

$$- \int_a^b v(x) du(x)$$

интеграл по частям

Определение: Периодическая функция

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси $f(x)$ называется периодической функцией, если $\exists T \neq 0$ такая, что $f(x+T) = f(x)$

Теорема 3 Интеграл по частям периодической функции

Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом

$t > 0$, тогда она непрерывна на $\forall$ отрезке
 функции t и $\int_a^{a+t} f(x) dx$ не заб-т о b
 $\int_a^b f(x) dx + \int_b^{a+t} f(x) dx = \int_a^{a+t} f(x) dx$

Дока-во

$$\int_a^{a+t} f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = b+t, \quad b = x-t \\ db = dx \\ x_1 = t \Rightarrow b_1 = 0 \\ x_2 = a+t \Rightarrow b_2 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^a f(b+t) db = \left\{ \begin{array}{l} f(b+t) = f(b) \\ \text{но не } t \end{array} \right\} =$$

$$= \int_a^{a+t} f(b) db = \left\{ \begin{array}{l} b = x \\ db = dx \end{array} \right\} = \int_0^a f(x) dx =$$

$$= \int_a^{a+t} f(x) dx$$

Поэтому $d \rightarrow x$

$$\int_a^{a+t} f(x) dx = \int_0^t f(x) dx - \int_a^0 f(x) dx + \int_a^0 f(x) dx$$

$$= \int_0^t f(x) dx \Rightarrow \int_a^{a+t} f(x) dx = \int_0^t f(x) dx$$

интегр. мерных φ -функций суммируемых
 в м-но по мере Лебег.

$\exists f(x)$ непрерывна $[a, b]$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (3)$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = -x \\ dt = -dx \\ x_1 = -a \\ t_2 = a \\ x_2 = 0 \\ t_2 = 0 \end{array} \right\} = \int_a^0 f(-t) dt =$$

$$= \int_0^a f(-t) dt = \left[\begin{array}{l} t = x \\ dt = dx \\ x_1 = 0, x_2 = a \end{array} \right] = \int_a^0 f(-x) dx \quad (4)$$

4 → 3 :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx =$$

$$= \int_a^0 (f(-x) + f(x)) dx \quad \Leftrightarrow$$

$$1) \Rightarrow f(x) - \text{четная н.е.} \quad f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) + f(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

$$2) \exists f(x) - \text{нечетная н.е.} \quad f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) + f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) - \text{четная} \\ 0, & f(x) - \text{нечетная} \end{cases}$$

Необходимые условия I прога

Дарование: необ. усл. I прога

Пусть $f(x)$ вып-ая и непрерывная

на $[a; +\infty)$ и интеграл на промежутке $[a; b]$

$$f(x) = \int_a^b f(x) dx$$

Приведем свойство функции $b \rightarrow +\infty$

наз-ся несобственным интегралом I рода вып-ая

от a до $+\infty$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Согласно определению $\int_a^{+\infty} f(x) dx =$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

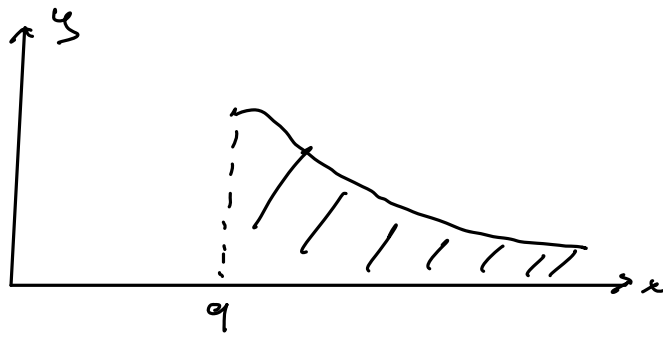
Вып-ая, сходящаяся и расходящаяся

Если вып-ая (1) сущ. и конечна, то несобственный интеграл I рода $(H \text{ и } I)$ наз-ся сходящимся

Если вып-ая $\neq$, не сущ. или $= 0$, то H и I наз-ся расходящимися

Теорема о сходимости H и I

$$\left. \begin{aligned} & \exists f(x) \text{ вып и непрерывна на } [a; +\infty) \\ & \exists \forall x \in [a; +\infty) f(x) \geq 0 \\ & \exists \int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходящийся} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



НЧ* площадь под кривой от произвольной точки $x=a$ обозначаемой на p -оси

НЧ (функция)

$\int f(x)$ от a и b на x -оси

интегр. на $[a, b]$ Тогда $\int_a^b f(x) dx$

лимит $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ по промежутку $(-\infty; b]$ и обозн.

Согл. с $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx$ (2)

Если $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ существует, то НЧ

$\int_{-\infty}^b f(x) dx$ - существует

Если (2) не свз. или равен ∞ , то

$\int_{-\infty}^b f(x) dx$ - расходится.

Лемма 5.4

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Пусть ф-ция f определена на интервале $(-\infty; b]$

$$f(a) = \int_a^b$$

1. Аддитивность

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$

$[a; +\infty)$ и интеграл на $\mathbb{R}$ определен $[a; b]$

Пусть $c \in [a; +\infty)$

Тогда Н.Ч. и р.з. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x) dx$
сходятся или расходятся одновременно

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx =$$

Согласно св-ву аддитивности несобр. интегр.

если $f(x)$ определена и непрерывна на интер. $[a, b]$
и $m, c \in [a, b]$ тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^m f(x) dx + \int_m^b f(x) dx \quad \text{Переходим к пределу}$$

в этом выражении при $b \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right) = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx = \\
 &= \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx. (*)
 \end{aligned}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad (2)$$

Если $\int$ и конечны пределы в правой части выраж. (1) то эквив. и конечны пределы в левой части (2) м.а. это вып. интеграл и он сходится, то сходится и интеграл от a ; $+\infty$

Если инт-л от c ; $+\infty$ расходится, то не сходится интеграл в выражении 1.

Тогда в левой части $\int$ или равен бесконечности или расходится.

$$\text{из (1)} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \quad (3)$$

Аи-чо предыдущего

2° Линеарность

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ вып-ны и непрерывны и интегрируемы на $[a, b]$

Пусть $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$

Пусть сходится или-ли $f(x)$ и $g(x)$, тогда

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx =$$

$$= \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Согласно св-ву линейности интеграла

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Перейдем в этом выражении к пределу

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx +$$

$$\beta \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx$$

по предельному переходу в правой части

сущ-ет и конечны, $\Rightarrow$ тогда сущ-ет и конечны
предел левой части - и по варианту несобств. интеграла
и тогда получаем

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

3° интегрирование неравенств.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a; +\infty)$ и интегр. на $[a; b]$

Пусть где $\forall x \in [a; +\infty)$ $f(x) = g(x)$

То есть $\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \int_a^{+\infty} g(x) dx$, если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся. Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a, b]$ где $\forall x \in [a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве при $b \rightarrow +\infty$

Используя известное неравенство

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \geq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx \quad (5)$$

т.е. по условию $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ - существуют
то есть. предельная неравенство имеет вид (5)

Поэтому:

$$1) \text{ Пусть } \alpha \neq 1, \text{ тогда } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1 \\ \infty & \text{при } \alpha < 1 \end{cases} \quad \left(\frac{b}{b^\alpha} \rightarrow \infty \right)$$

$$2) \text{ Пусть } \alpha = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \ln|x| \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln b - \frac{\ln 1}{1} \right)$$

$= +\infty$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, x > 1 \\ \infty, x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \begin{cases} \text{сходится при } x > 1 \\ \text{расходится при } x \leq 1 \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — ф.р. и непрерывная на $[a, b]$

и не о.р.-на или по какому-то н.г.-ле от $[b-\varepsilon, b]$ где $\varepsilon < b-a$ $x=b$ — т. разрыва $\bar{I}$ рода гр-ции $f(x)$

Пусть $f(x)$ н.г.-на на $\forall [a, c], c < b$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ — наз. несобств. н.г.-лем $\bar{I}$ рода

от неопр. гр-ции $f(x)$ на н.г.-ле от $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (6)$$

Если лем в кр. (6) сущ. и конечен, то $\bar{I}$ и $\bar{I}$ рода наз. сходящимися, а если в кр. (6) не сущ. или равен ∞ , то несконвергентными

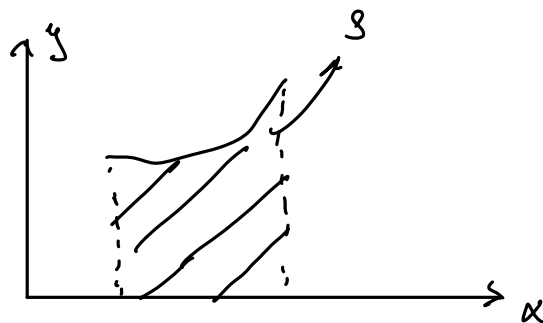
Тем самым $\bar{I}$ и $\bar{I}$ рода

Пусть $f(x)$ — ф.р. и непрерывная на $[a, b]$

и не о.р.-на или по какому-то н.г.-ле от $[b-\varepsilon, b]$ где $\varepsilon < b-a$. Пусть $f(x)$ н.г.-на на $\forall [a, c], c < b$

Пусть $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a, b]$

Пусть $\int_a^b f(x) dx$ сходится, тогда он вер-ет $\int$ бесконечной кривой. пример $y = f(x)$ или dx и др-ой $x=a$



Пусть $f(x)$ вер и непрерывна на $[a, b]$ и не ор-на или на каком-то $(a, a+\epsilon)$ где $0 < \epsilon < b-a$ (т.е. $x=a$ и разрыв $\sqrt{f}$ раз $f(x)$)

Пусть $f(x)$ ит-на $\forall [c; b]$, где $c > a$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ — наз. несобств. ит-ном $\sqrt{f}$ раз.

Он неор. ф-ция $f(x)$ на ит-на 0 на a до b $(a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx \quad (*)$$

то сходится, если не суж или ∞ то не сходится.

Свойства ИИ- $\sqrt{f}$ раз такие же как ИИ $\sqrt{f}$ раз

Пусть $f(x)$ вер-на и непрерывна на $(a, +\infty)$ и ит-на $\forall [a, b]$

тогда $f(x)$ непрерывна и непрерывна на $[a; +\infty)$

и интеграл на $[a, b]$

Если $\int_a^b f(x) dx$ сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$

сходится, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

сходится абсолютно

Если $\int_a^b f(x) dx$ сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$

не сходится, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

сходится условно

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b)$ $(b-\varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b-a$

и непрерывна на $[a, b]$, где $a < b$ и интеграл на $[a, b)$

и непрерывна на каком-либо интервале $(b-\varepsilon, b)$, $\varepsilon < b$

Лемма Бэ

Признаки сходимости несобственных интегралов

Теорема 10. Признак сходимости по перву
НХХI

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a; +\infty)$
и интегралы на $\forall$ отрезке $[a, b]$

Пусть $x \in [a, +\infty)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$

тогда: 1) Если НХХI $\int$ рода

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то сходится НХХI $\int$ рода

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$

2) Если НХХI $\int$ рода $\int_a^{+\infty} R(x) dx$ — расходится
то расходится и НХХI $\int$ рода $\int_a^{+\infty} g(x) dx$
Рассуждение

1) По св-ву интегрирования перв в отрезке
Если $R(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a; b]$
для $\forall x \in [a, b]$ $0 \leq R(x) \leq g(x)$, то

$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. Перейдем к пределу в перв-ве
при $b \rightarrow +\infty$

Используя св-во интегрирования перв для несобст.
инт-ла,

$$0 \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx$$

Если ч.ч. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = C, \quad C \neq \infty$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \neq C \Rightarrow \lim \int \text{ не существует}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \text{н.ч. } \int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходится}$$

по определению
из (1)

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

2) Пусть н.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится

Предположим, что н.ч. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ - сходится.

по условию не-верно Для $\forall x \in [a, +\infty)$

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Тогда по доказанному в а.1., если н.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то сходится н.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

$\int_a^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow$ предположение неверно и н.ч. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

расходится

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx \text{ - и.и. } I_{\text{поз}}$$

и.и. $R(x)$ и непрерывна

Верхний предел имеет
расхождение.

$$f(x) = \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2} = g(x)$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ - сходится, и.и. это интеграл}$$

Далее $\alpha \geq 2 > 1$.

$\Rightarrow$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx \text{ - и.и. } I_{\text{поз}} \Rightarrow \text{сходится по ср-му сходимости по пер-ву}$$

Теорема и Предельный критерий сходимости

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и непрерывны на $(a; +\infty)$
и непрерывны на $\forall$ отрезке $[a, b]$

Пусть $x \in [a, +\infty)$ $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$

Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ $0 < A < \infty$
то и.и. $I_{\text{поз}}$ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ -

сходится и расходится одновременно

**** Приложение** Сходимость или расходимость И.и.

не меняется при умножении с.о на const.

Согласно св-ву линейности И.И.

Дока-во:

Пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $0 < A < \infty$
тогда по св-ву л.и. $f(x)$ и $g(x)$ имеем A -предел
функции $\frac{f(x)}{g(x)}$, при $x \rightarrow +\infty$, если для $\forall \varepsilon \in \frac{A}{2} > 0$
существует $M = M(\varepsilon) > 0$, но для всех x , для которых
вып-ся пер-во $x \rightarrow M$ выполн. пер-во $|\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \frac{A}{2}$

$$-\frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - A < \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3A}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{A}{2} g(x) < f(x) < \frac{3A}{2} g(x)$$

$$\text{когда } \frac{A}{2} \int_a^{\infty} g(x) dx < \int_a^{\infty} f(x) dx < \frac{3A}{2} \int_a^{\infty} g(x) dx. (2)$$

и-а св-во линейности

Рассмотрим правую часть пер-ва (2)

$$1) \int_a^{\infty} f(x) dx < \frac{3A}{2} \int_a^{\infty} g(x) dx$$

или и.и. $\int_a^{\infty} g(x) dx$ сходится, по (*)

сходится и и.и. $\int_a^{\infty} \frac{3A}{2} g(x) dx$

$\Rightarrow$ по критер. сходимости по пер-ву сходится

и и.и. $\int_a^{\infty} f(x) dx$

Если и.и. $\int_a^{\infty} g(x) dx$ расходится, то по критер.

сходимости по пер-ву расходится и и.и. $\int_a^{\infty} f(x) dx$

$$\frac{3A}{2} \int_a^{\infty} g(x) dx \Rightarrow \text{расходится и.и. } \int_a^{\infty} f(x) dx$$

2) Рассмотрим левую часть нерав(2)

$$\frac{A}{2} \int_a^{+\infty} g(x) dx < \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

т.е. н.ч. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, по (*)

сходится и н.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

по (*) сходится н.ч. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ и н.ч.

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$, по (*) расходится н.ч.

$\int_a^{+\infty} g(x) dx \Rightarrow$ по пр. сходимости по нерав(2) расходится и н.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

4) 1) и 2) $\Rightarrow$ что н.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится или расходится одновременно.

$\int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{x} dx$ - н.ч. $\int$ ряда, т.к. $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ непрерывна на $(1; +\infty)$ и верхний предел интеграла делового

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

н.ч.

$$g(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ при } x \in (1; +\infty)$$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \text{расходится, т.к. это интеграл Рунне}$$

при $k=1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{x} dx$ - расходится по предельному пр-ву сходимости

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} a \ln x \sim \frac{1}{x}, \text{ при } x \rightarrow +\infty \\ \end{array} \right.$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

Г-ма и: Признак абсолютной сходимости

Пусть $f(x)$ — неп-ая и непрерывная на $[a; +\infty)$
и интеграл на $[a, b]$

Пусть $g(x)$ — монотонно убывающая на $[a; +\infty)$

Тогда, если ч.ч. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то

ч.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно

для $\forall x \in [a; +\infty)$ выполняется — 1-ое — $|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Прибавим по всем членам неравенства $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$

$$0 \leq \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \leq 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Если ч.ч. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится $\Rightarrow$ то и

(*) сходится ч.ч. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Сходится по аб-му критерию по 1-му

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

по
свойству
линейности

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx =$$

$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx$ сходится по доказанному
вместе

$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится по ука-нию $\Rightarrow$ по (*) сходит
к.ч. $\int$ разг $-\int_a^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится

н.ч. $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, но по ука-нию к.ч. $\int$
разг $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно н.г.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$ - к.ч. $\int$ разг

н.ч. $|f(x)| = \frac{\sin x}{x^4}$ непрерывна на $[1; +\infty)$, верхний гр.г.
интегрирования беск.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^4}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x^4} \right| = \frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4} = g(x) \quad \int_1^{+\infty} g(x) dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx - \text{сходится, н.ч. это чет-л. Дарли}$$

$$\text{или } 4 = 4 > 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x} dx \quad \text{н.ч. } \Pi \text{ разг } f(x) = \frac{\sin x}{1+x}, \quad x=0$$

сравнивает с миним. б.ч. н.г-н.г

Лекция 8

Дифференциальное

уравн. (ОУ)

незав. пер-го $\sqrt{\text{незав. пер-го}}$

- уравнение связывающее x и $y = y(x)$,

и ее производные всех порядков $y'(x)$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Если незав. пер-ая y - зависит от x и пер-ой
то диф. урав. назыв. уравн. частных пер-ых

Порядок диф. уравн. - высший порядок
наибольшей пер-ой, входящей в это уравн.

$$y' + x = 0 \quad \text{ОУ 1-го порядка}$$

$$y''' + 2y'' = e^x \quad \text{ОУ 3-го порядка}$$

Решения диф. уравн. называются

решения = $y = y(x)$, определенная и определенная
на интервале I , которая будучи подставленная в диф.
уравн. обращает его в верное равенство при

$$\forall x \in I$$

$$y' = x$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y' = x$$

$$x = x - \text{верно}$$

Линейное уравнение с частными производными - линейное уравнение

в 3-х переменных

- это уравнение связывающее $x, y, z = z(x, y)$ и z'

$$F(x, y, z') = 0$$

Лин. уравнение, разрешающее относительно z' - каноническое уравнение: $z' = P(x, y)$

Пусть $F(x, y)$ определено на области G плоскости переменных x и y , а функция $z = z(x, y)$ определена на D плоскости переменных x и y где c - произвольная константа. Обозначим решением дифференциального уравнения $z' = P(x, y)$ которое удовлетворяет условию: при $\forall x, y, c$ эта функция является решением уравнения для $\forall$ точек $(x_0, y_0) \in G$ найдется такое $c = c_0$, что $z_0 = P(x_0, c_0)$

Примечание: при некоторых значениях x может не существовать таких x , при которых $(x, c) \in D$ при этом такие значения x исключаются из рассмотрения, если значения x , при которых $(x, c) \in D$ существуют, то область определения функции

$y = y(x, c)$ м.б. при фиксированном c - обобщением
бесконечного кол-ва непересекающихся ит-ов.

В этом сл-е общим решением диф. ур-ия
явл-ся решения на отдельных интервалах, входя-
щих в заданную обл-ть, ~~в-т~~

Если при решении диф. ур-ия получаются
выражения вида $\Phi(x, y, c) = 0$, то решения
диф. ур-ия ~~основываются~~ ~~в~~ неявном виде

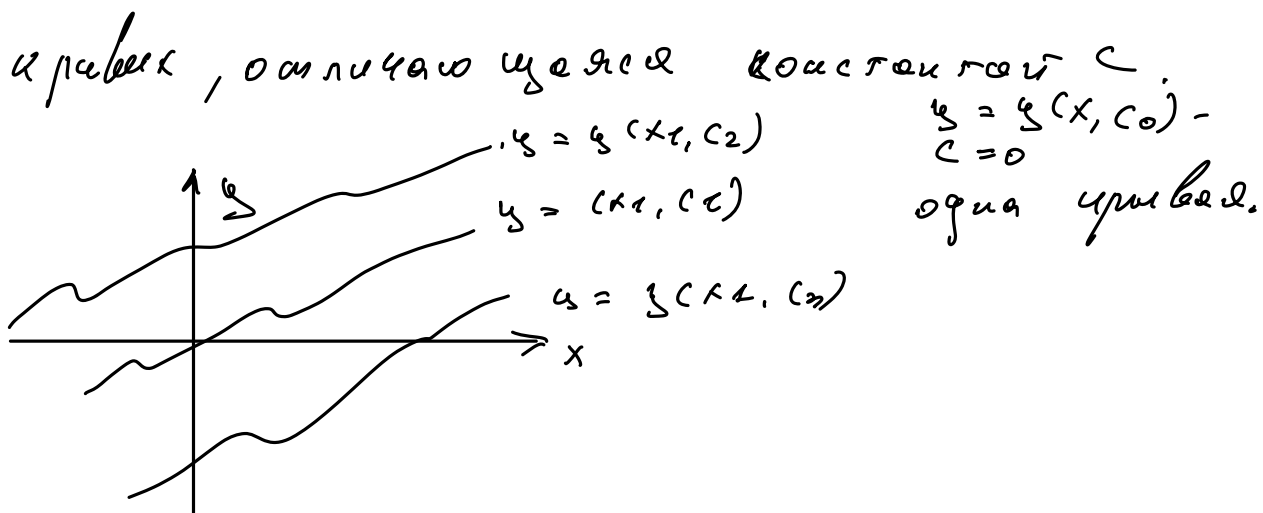
равенства $\Phi(x, y, c) = 0$ - неявно заданные
общие решения диф. ур-ия, называемые общим
интегралом

Частным решением диф. ур-ия называется
 $\forall$ ф-ция $y = y(x, c_0)$, которая получается
из общего решения, при фиксированной произволь-
ной постоянной $c = c_0$

В частных интегралах диф. ур-ия
наз-ся неявно заданное решение диф. ур-ия

$\Phi(x, y, c_0) = 0$, которое пол-ся из общего
интеграла при фикс. зн-ии $c = c_0$.

С геом. точки зрения - общее решение
диф. ур-ия представляет собой семейство



Задача Коши

Пусть $(x_0, y_0) \in G$ — известна пара переменных

x и y . Пусть функция $f(x, y)$ определена в области G плоскости переменных x и y

$y' = f(x, y)$ удовлетв. зад-ию $y(x_0) = y_0$

называется задачей Коши. x_0, y_0 — нач. условия.

Задача Коши сgeom. точкой эквивалентна в том, чтобы найти интегр. кривую данной функции, которая проходит через точку (x_0, y_0)

Теорема Коши

о существовании и единственности решения задачи Коши

Пусть функция $f(x, y)$ вместе со своей частной пр-ой по y определена и непрерывна на области G , тогда существует решение

$y' = f(x, y)$, тогда существует решение $y = y(x)$

для $\forall$ точек $x_0, y_0 \in G$

любые решения этого диф. ур-ия удовл. условиям
и могут не выполняться условиям - следовательно
всюду, где они определены.

Решение задачи Коши при заданных нач. усл-иях
суще-ет и единственно при условии непрерывности
и убавля

I ДУ с разделимыми переменными

$f(y)dy = g(x)dx$, где $f(y)$ оир-на и неир-на
на I_1

$g(x)$ оир-на и неир-на на I_2

Для решения ур-ия находим инт-лы

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx$$

II ДУ с разд. переменными

$$a) \quad M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0 \quad / : \frac{M_1(x)}{M_2(x)} \\ \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0$$

$$\frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy + \frac{M_2(x)}{M_1(x)} dx = 0 \quad \text{с разд. пер-ными}$$

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = \int \frac{M_2(x)}{M_1(x)} dx$$

$$b) \quad L(x) \cdot y' = g(y)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow L(x) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y)$$

$$L(x) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y'} = \frac{g(y)}{L(x)} dx$$

$$L(x) dy = g(y) dx \quad / : L(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{1}{g(y)} dy = \frac{1}{L(x)} dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{1}{L(x)} dx$$

При решении таких задач уравнение не является
решением, мы предполагаем, что $\neq 0$

В результате решения м.б. уравнение, когда $L(x) = 0$

В результате могут быть особые или потерянные
решения

Приравниваем к нулю обе части и ищем и находим
корни этого уравнения

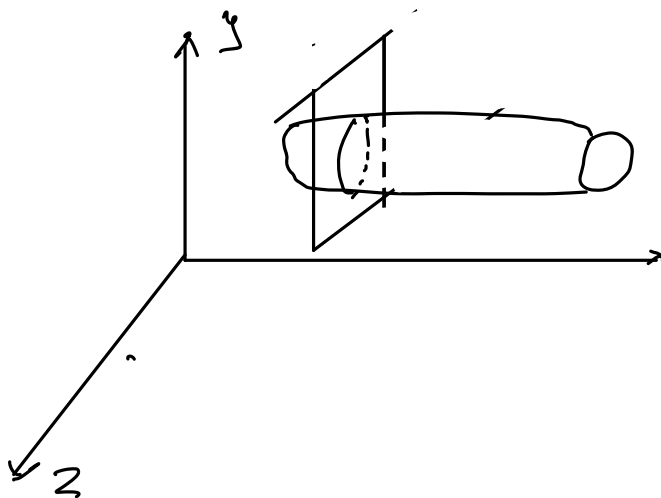
Проверяем являются ли корни решениями этого уравнения

Лекция 5 (8 марта)

Вычисление объёмов тел.

Пусть тело M заключено между плоскостями $x=a$ и $x=b$, и пусть для каждой точки $x \in [a, b]$ известна кр-ва $S(x)$ фигуры, кол. в сечении тела M кр-во тела M , перпен-д-но оси абсцисс и проходя. через данную точку.

Пусть зад-го площади $S(x)$ от $x \in [a, b]$ явл. гр-дией, т.е. непрерывна на $[a, b]$



Пусть зад-го сечения $S(x)$ от абсциссы $x \in [a, b]$ явл-ся гр-дией непрерывной на отрезке $[a, b]$

Предполагается, что для $\forall$ из возможных
разбиений $\mathcal{T}$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

0-матрица $S_{\alpha, \beta}$ в L^2 и-оме α и β α β α β
 менее α β α β α β α β

имеются наб. функции $S(\xi_i)$ заданные
везде $\forall$ сечения $\forall$ узлам, как
а сечения, имеющие на-го $S(\eta_i)$, содержится
в $\forall$ сечения этого слоя. Для этих сечений
построим кривые цилиндра $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$.

При этом цилиндр обозначен $S(\ell_i)$ и дуга
 цилиндром $\text{вал. в ед. } i - \bar{i}$ с $\bar{i}$ и $\bar{i}$,
 а цилиндр $S(y_i)$ и x , дуга цилиндром
 $\text{валом в этот сдвиг}$

Тогда объем V_i i -го окна равен 24
мемз $\{$ а-м $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$

$$S(y_i) = 4x_i \leq V_i \leq \rho(\varepsilon_c) \cdot 4x_i$$

Продумывайте чужих

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n S(y_i) \cdot A x_i \leq V \leq \sum_{i=1}^n S(x_i) \cdot A x_i$$

Переходя к пределу в первом шаге; $\rightarrow 0$,
получаем формулу для вычисления объема
тела M по известной непрерыв.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

вычисление объема тела вращ.
в декартовой пр. системе коорд.

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Ox
и радиус. траекции, имеющей основанием
отрез. $[a, b]$ и непрерыв. функцию $f(x)$
на отрезке $[a, b]$ тогда $S(x) = \pi y^2 = \pi (f(x))^2$
 $\Rightarrow$ или сразу из формулы $S(x) = \pi y^2 = \pi (f(x))^2$

Применяя формулу для вычисления объема
тела вращения вокруг оси Ox

$$V_x = \int_a^b y^2 dx \cdot \pi = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Аналогично получаем формулу для вращения
вокруг оси Oz :

$$V_z = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

Объем тела, образованного вращением
вокруг осей Ox и Oz плоской фигуры, описанной
непр. на $[a, b]$ функцией

$y = f(x)$ и $g(y) = g(x)$, $0 \leq g(x) \leq f(x)$ при

$x \in [a, b]$ и при $x = a$ $x = b$, совп. равен

$$V_k = \pi \int_a^b (f'(x) - g^2(x)) dx$$

$$V_k = 2\pi \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx$$

вычисл. объема тела

прямой, загнутой, изогнутой

$$x = f(t) \quad y = f'(t) \quad a \leq t \leq b$$

причем $f(a) = a, f(b) = b, a < b$
 $f'(t) > 0$ для $\forall t \in [a; b]$

вычисл. объема тела, обр. вращением
 прямой, кривой, окруж. осью OX , радиус R

$$V_k = \pi \int_a^b y^2(x) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} y = f'(t), x = f(t) \\ dx = x'(t) dt \text{ или } dx = f'(t) dt \\ x_1 = a \rightarrow t_1 = f^{-1}(a) = a \\ x_2 = b \rightarrow t_2 = f^{-1}(b) = b \end{array} \right\} =$$

$$= \pi \int_a^b y^2(t) x'(t) dt = \pi \int_a^b f'(t) f'(t) dt$$

$\Rightarrow$ объем тела вращ. осью OX

$$V_k = \pi \int_a^b y^2(x) dx = \pi \int_a^b f'(t) f'(t) dt$$

Объем тела вращения
 прямой, обр. вращением
 осью OX , радиус R и $f(a) = a, f(b) = b$

кривой $v = v(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ выразим ее
можно вычислить по формуле

$$v = \frac{c}{2} \int_{\alpha}^{\beta} v^2(t) \cdot \sin t \, dt$$

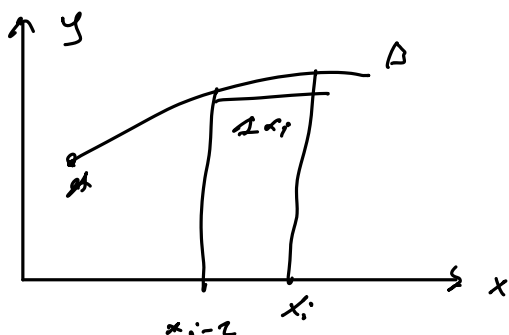
Вычисление длины кривой

Пусть Γ — кривая в пространстве xy и z

задана уравнением $z = f(x)$

найдем длину дуги AB этой кривой, разл.

между орт. проеци $x = a$ и $x = b$



разобьем интервал $[a, b]$ на n частей

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-2} < x_{i-1} < \dots < x_n = b$$

тогда можно считать соответствующие точки

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$$

Длина дуги между точками M_{i-2} и M_i

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-2})^2 + (y_i - y_{i-2})^2}$$

на σ малом интервале $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$

длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ для нек-го заданного на интервале $[a, b]$ гр-уча $y = f(x)$ построить касовую м-юю Лагранжа

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i) \Delta x_i$$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Получившее выражение (~~1.3~~)

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i) \Delta x_i)^2} = \\ = \sqrt{(1 + f'(\xi_i)^2) \Delta x_i}$$

Тогда длину всех ломаной можно найти по формуле интегр. суммы

$$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i = \\ = \Delta x_i \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$\Rightarrow$ длина дуги AB :

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Полная метрическая

Пусть f задана на отрезке

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$

и $f'(t) \neq 0$ для $\forall t \in [\alpha, \beta]$

то кривая имеет единственное направление

$y = f(x)$, непрерывно и имеет единственное направление

$$(f(x))'_x = \frac{(\varphi'(t))'_t}{(f'(t))'_t} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$$

Пусть

$$f(\alpha) = a, \quad f(\beta) = b, \quad a < b$$

соединяет две точки отрезком $x = f(t)$

$$dx = f'(t) dt \Rightarrow$$

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}\right)^2} f'(t) dt$$

$$\Rightarrow I = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Выводим граничные условия из условий в н.к.

с.к.

Второе граничное условие в н.к. с.к.

$$v = v(l), \quad l \in \alpha, \beta$$

причем $v(l) \geq 0$, $q \in \alpha; \beta$

Сделаем пограничные условия в н.к. условиями

$$x(l) = v(l) \cdot \cos l, \quad y(l) = v(l) \cdot \sin l$$

тогда граничные условия можно расписать для н.к. граничных условий

$$x'(l) = v'(l) \cdot \cos l - v(l) \sin l, \quad y'(l) = v'(l) \cdot \sin l + v(l) \cdot \cos l \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2} =$$

$$= \sqrt{(v'(l) \cos l - v(l) \sin l)^2 + (v'(l) \sin l + v(l) \cos l)^2} =$$

$$= \sqrt{(v'(l))^2 + (v(l))^2}$$

$$\rightarrow \text{поэтому } I = \int_a^b \sqrt{(v'(l))^2 + (v(l))^2} dl$$

Лезуна 20

$$y' = R(x, y)$$

φ -ум $R(x, y)$ - называется ограниченной φ -ум
и-о-о измерении, если $R(1x, 1y) = \int^u R(x, y)$

$$h(dx, dy) = dx \cdot \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{y^2} = dx \cdot (y + 1) =$$

$$2) \quad L(x, y) \Rightarrow L(x, y) = xy + y^2 - \text{wegen } y \text{ und } y^2$$

2-020 434-42

$y' = f(x, y)$ — это обыкновенное ДУ 1-го порядка,
если $f(x, y)$ — определ. ф-ция от 2-х переменных
и.е. $f(1x, 1y) = f(x, y)$

т.е. $f(x, y) = f(dx, dy)$, и потому если $d = \frac{p}{x}$

$$= P\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} y\right)$$

$$f(x, y) = f\left(r, \frac{y}{x}\right) \Rightarrow g = f\left(r, \frac{y}{x}\right)$$

Сделаем замену $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u \quad y' = u + x u'$

Подграбени

$$u + x_4' = L(1, 4)$$

$$x u' = f(t, u) - u$$

$$x \frac{dy}{dx} = f(x, y) - y$$

$$\frac{dy}{f(t,y)-y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{f(t,y)-y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$u = u(x, y) \Rightarrow y = x \cdot u.$$

$$M(x, y) dy + N(x, y) dx = 0$$

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одного и того же

$$y' = \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad \text{Положим } N(x, y) \text{ и } M(x, y) -$$

однородные функции одного и того же

$$\frac{N(x, dy)}{M(x, dy)} = \frac{d^N N(x, y)}{d^M M(x, y)} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ гур. ур-ие

IV Линейное гур. ур-ие IV рода

Лин. гур. ур-ие I порядка одно-го р-да
 $y = y(x)$ и y' назыв ур-ие вида

$$y' + p(x)y = q(x)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции непрерыв. и непрерыв. на ур-ие I

Если $q(x) = 0$, то $p(y)$ наз. однородное
 линейное гур. ур-ие I порядка.

Если $q(x) \neq 0$, то $0 \in [y]$ — неоднородное

линейное 1^{го} порядка. Миксиком гар. ур-ия
I 20 порядка от-ко $x = x(y)$ и $x'(y)$

$$x' + P(y)x = Q(y), \text{ где } P(y), Q(y) - \text{гар.}$$

опр. и непрерывные на отрезке I

Метод Бернулли решения $1^{\text{го}}$
порядка

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y = u \cdot v, \text{ где } u = u(x) \text{ и } v = v(x) - \text{гар.}$$

определенные и непрерывные на отрезке I

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + P(x)u \cdot v = Q(x)$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

Находим $v = v(x)$ из уравн.

$$v' + P(x)v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int P(x)dx$$

$$\ln |v| = - \int P(x)dx$$

$$v = e^{- \int P(x)dx}$$

то постоянным $C = 0$

б. Учитывая, что $U' + P(x)U = 0$, из (6)

$$\text{получаем } U'U = Q(x) \quad (8)$$

б. Построение u в D

$$u', \text{ где } \int S P(x) dx = Q(x)$$

$$\text{или } \frac{du}{dx} e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$du = (Q(x) e^{\int P(x) dx}) dx$$

$$\int du = \int (Q(x) e^{\int P(x) dx}) dx$$

$$u = \int (Q(x) e^{\int P(x) dx}) dx \quad (9)$$

с учетом (7) и (8) получаем

$$y = u \cdot v = \left(\int (Q(x) e^{\int P(x) dx}) dx + C \right) e^{-\int P(x) dx}$$

$e^{-\int P(x) dx}$ — общее решение $DX(5)$

Метод Лагранжа

Найдем решение совм. однородного и неодн. уравн

$$1. \quad y + P(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$Ly = -P(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int P(x) dx$$

$$y = e^{-\int P(x) dx} + C$$

$$y = c \cdot e^{-\int P(x) dx}, \text{ где } c = e^C$$

Заменяем c на $c(x)$

$$y = c(x) e^{-\int P(x) dx}$$

$$3. y' = c'(x) e^{-\int P(x) dx} + c(x) e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x))$$

$$y = c(x) e^{-\int P(x) dx} \quad \text{и} \quad y'$$

$$c'(x) e^{-\int P(x) dx} - c(x) e^{-\int P(x) dx} P(x) + P(x) \cdot c(x) e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$\Rightarrow e'(x) e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$6. c'(x) = \frac{d c(x)}{dx}, \text{ то } \frac{d c(x)}{dx} e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$d c(x) = (Q(x) e^{\int P(x) dx}) dx$$

$$\int d c(x) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx$$

$$c(x) = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} \right) dx + c_2, \quad c_2 = \text{const}$$

6. Находим $c(x)$ в (11)

$y = \left(\int (Q(x) e^{\int P(x) dx} dx) \right) \cdot e^{-\int P(x) dx}$ — общее решение ОДУ (5)

IV Ур-ие Бернулли

виза:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$P(x), Q(x)$ — ф-ции определенные и непрерывные на ур-ие E

1) Если $\alpha = 0$, то $y' + P(x)y = Q(x)$ — лин. ОДУ

1-го порядка

Если

2) $\alpha = 1$, то $y' + P(x)y = Q(x)y$ — ОДУ

с разделяющимися переменными

$$y' = (Q(x) - P(x))y$$

$$\frac{dy}{dx} = (Q(x) - P(x))y$$

$$\frac{dy}{y} = (Q(x) - P(x)) dx$$

ОДУ высших порядков.

Диф-ам ур-ние Лекция 11 и-ого порядка наз. диф. ур-ие с в.з.в. - пер-ую x , ф-ую $y = y(x)$

$$y', y'', \dots, y^{(n)}$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

$$y'' = F(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) \quad (1)$$

↑ диф. ур-ие и-ого порядка

где ф-ия F опред. и раз диф-мер на обл-ти D $(n+1)$ -го пр-ва переменных $x, y, y', \dots, y^{(n)} = 0$

Решением диф. ур-ия (1) назыв. ф-ия $y = y(x)$ опред. и раз и непрерывно диф-на на промежутке I , который будучи подставленным в л.ч. $F(x)$ обращается в верное равенство при $\forall x \in I$

Будем решать диф. ур-ие на обл-ти

D $(n+1)$ -го пр-ва наз-ся ф-ия

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad \text{определенная и непрерывная}$$

на обл-ти D $(n+1)$ -го пр-ва переменных

$x, C_1, C_2, \dots, C_n$ при $\forall$ фиксированных $C_1, C_2, \dots$

C_n является решением и диф. ур-ия
Для $\forall$ точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$

существует найдутся такие числа

$C_{10}, C_{20}, \dots$, то $y = y(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$

определяет на некотором интервале Γ , содержащем x_0 к-б
удовл. нач. ур-ию

$$y(x_0, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}) = y_0$$
$$y'(x_0, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}) = y'_0$$

$$y^{(n-1)}(x_0, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}) = y_0^{(n-1)}$$

общим решением диф. ур-ия

Всякое решение диф. ур-ия (1)
при фикс. значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ назыв. частным

Всякое заданное неявное ^{решение} получ. из общ.
интеграла назыв. частным интегралом

Примечание: C_1, C_2, C_n - произв. постоянные

Теорема Коши существования единств. решения
диф. ур-ий n -ого порядка

Пусть y -якая $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ опре-а и неперывная
вместе со своими частными y -якими
 $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ на об-ти G
($n+1$)-оо y -ва y -ва $x, y, y', \dots, y^{(n)}$

$$(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$$

сущ. решение

$$y = y(x) \quad \text{Ду} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

удовл. нач. y -ам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Любые решения y -ва y -ва совпадают y -ва y -ва
или y -ва

Задача нахождения y -ва y -ва y -ва

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

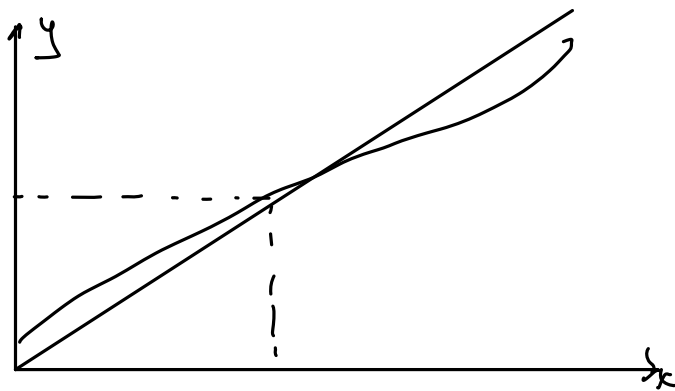
где $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ опре-а и неперывная
на об-ти G ($n+1$)-о y -ва y -ва $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

- Задача y -ва для АДУ y -ва y -ва

$f(x, y, y', y'') = 0$ - ур-ие второго
 порядка - реш-ие гур. ур-ая, удовл.
 нач. усл-иям $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y'_0$

с тем, точки зрения - найти устр. приближ
 которая проходит через x_0, y_0 и имеет в этой
 точке касат. линию с зн. к. = y'_0



Иногда пиш. гур-ич

$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)})$ - Вх не содержит явно
 $y = y(x)$

Решим замену

$$y' = p, \text{ где } p = p(x)$$

$$(y' = \frac{dy}{dx})$$

$$y'' = p'$$

Решая гур. ур-ие $p = p(x)$

Введем н.а. $y' = p(x)$, то реш-ая ОУ,
находим $y = y(x, c_1, c_2)$

$x^2 y'' = y' - 0$ 2-го порядка, и содержит
авто-г-ую $y = f(x)$

Решим задачу где $y' = p$, где $p = p(y)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

ЛГЧ

Линейная г. ур-ием а-о-о однород
нел. г-г- ур-ием всегда $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} +$

$$+ a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

Если $f(x) \equiv 0$, то $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} +$
 $+ a_n(x)y = 0$ нел. лнч. однородным ур-ием
порядка $(n \text{ ОДУ})$.

Если $f(x) \neq 0$, то ОУ нел. лнч. неоднородным
ОУ n -го порядка

Лекция 12

Найдем общее частное решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Составим ^{харак.} ~~уравн.~~ ур-ие

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \quad \text{найдем } \kappa_1, \kappa_2$$

① Пусть κ_1 и κ_2 — простые действ. корни
причем $\kappa_1 \neq \kappa_2$

Тогда частные решения ЛОДУ $y_1 = e^{\kappa_1 x}$
 $y_2 = e^{\kappa_2 x}$

Проверим яв-ся ли эти решения линейно незав.
Найдем определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\kappa_1 x} & e^{\kappa_2 x} \\ \kappa_1 e^{\kappa_1 x} & \kappa_2 e^{\kappa_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \kappa_2 e^{\kappa_1 x} \cdot e^{\kappa_2 x} - \kappa_1 e^{\kappa_2 x} e^{\kappa_1 x} = e^{\kappa_1 x} e^{\kappa_2 x} (\kappa_2 - \kappa_1) =$$

$$= \begin{cases} e^{\kappa_1 x} \neq 0 \\ e^{\kappa_2 x} \neq 0 \\ \text{и.к. } \kappa_1 \neq \kappa_2, \text{ то } \kappa_2 - \kappa_1 \neq 0 \end{cases} \neq 0$$

Тогда по определению об определителе Трюммена ЛОДУ

$\Rightarrow y_1, y_2$ — линейно независимые

и обратное. Система реш-ий

② Пусть $\kappa_1 \neq \kappa_2 = \kappa$ где κ — произвольный корень

$$y_1 = e^{\kappa x}$$

$$y_2 = z(x) y_1, \quad z = z(x)$$

$$\Rightarrow y_2 = z \cdot e^{\kappa x}$$

$$y_2' = z' e^{\kappa x} + z \kappa e^{\kappa x}$$

$$y_2'' = z'' e^{\kappa x} + 2z' \kappa e^{\kappa x} + z \kappa^2 e^{\kappa x}$$

y_2 — частное решение ЛОДУ, но подставим y_2, y_2' в это ЛОДУ

$$z'' e^{\kappa x} + 2z' \kappa e^{\kappa x} + z \kappa^2 e^{\kappa x} + a_1 (z' e^{\kappa x} + z \kappa e^{\kappa x}) + a_2 z e^{\kappa x} = 0$$

$$e^{\kappa x} (z'' + z' (2\kappa + a_1) + z (\kappa^2 + a_1 \kappa + a_2)) = 0 \quad (1)$$

$$e^{\kappa x} \neq 0$$

$\kappa^2 + a_1 \kappa + a_2 = 0$, т.е. κ явл. корнем хар. ур-ня

По теореме Вейерштрасса

$$\kappa_1 + \kappa_2 = -a_1$$

$$\text{т.е. } \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa \Rightarrow 2\kappa = -a_1 \quad \text{или} \quad 2\kappa + a_1 = 0$$

Тогда из ур-ня (1) получаем $z'' = 0$

$$dz' = 0 \cdot dx$$

$$\int dz' = \int 0 dx \quad \underline{z' = C_1}$$

$$C = \text{const}$$

$$dz = e dx$$

$$\int dz = \int C dx$$

$$z = Cx + C_2, \quad C_2 = \text{const}$$

Т.к. мы ищем частное решение, то постоянную C - произвольно.

$$C \neq 1, \quad C_2 = 0$$

$$\text{возьмем } z = x$$

$$\rightarrow y_1 = z e^{kx} = x e^{kx}$$

Проверим, является ли решением

$$y_1 = e^{kx}$$

$$y_2 = x e^{kx} \quad - \quad \text{линейно независимые}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{kx} & x e^{kx} \\ k e^{kx} & e^{kx} + k x e^{kx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2kx} + kx e^{2kx} - kx e^{2kx} = e^{2kx} \neq 0$$

По т. опр-ия Вронского для системы
линейных уравнений ЛОДУ - линейно независимые $\Rightarrow$

обр-ют фундаментальную систему решений

③ Пусть $\begin{matrix} \kappa_1 = \alpha + i\beta \\ \kappa_2 = \alpha - i\beta \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \kappa_1 = \alpha + i\beta \\ \kappa_2 = \alpha - i\beta \end{matrix}} \right\} \text{комплексно сопряженные}$
 корни харак. ур-ия

$$\tilde{y}_1 = e^{\kappa_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} =$$

$$= e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} (y_1 + \tilde{y}_1) = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2 &= \frac{1}{2i} (y_1 - \tilde{y}_1) = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} (y_1 + \tilde{y}_1) \\ y_2 &= \frac{1}{2i} (y_1 - \tilde{y}_1) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} &\text{частное решение} \\ &\text{ЛОРХ, и-к. явл-ся} \end{aligned}$$

линейными комбинациями частного решения
 по св-ву част. реш. ЛОРХ

Проверим явл-ли частное решение линейно неза-
 висимыми

$$W(x) \neq 0 \Rightarrow \text{линейно независимые}$$

Тогда (x) - ЛУЗ решение общего ЛО

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Алгоритм

$$a_i = \text{const} \quad i = 1, \dots, n$$

1) Составление харак. ур-ия.

$$u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \dots + a_{n-1} u + a_n = 0$$

2) Корни хар. ур-на

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

3) В зависимости от хар. хар. ур-на

опр. 101) X

а) Если a_i — действ. корни характ. ур-на

опр. $\forall (r \geq 1)$ то

$$y_i = e^{u_i x}$$

$$y_{i+1} = x e^{u_i x} \dots y_{i+r-1} = x^{r-1} e^{u_i x}$$

б) Если $u_i = \alpha + i\beta$
 $u_{i+1} = \alpha - i\beta$ } простые комплексно сопр.
 корни характ. ур-на

$$y_i = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_{i+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_{i+2} = x e^{\alpha x} \cos \beta x - y_{i+1} x e$$

$$y_{i+2r-1} = x^r e^{\alpha x}$$

4) общее решение ЛОДУ = ЛК. частных решений
 этого ЛОДУ

1 Неоднородное ОУ
 n-ого порядка

$$y^n + a_1(x) y^{n-1} + a_2(x) y^{n-2} + \dots + a_n(x) y = f(x) \quad (1)$$

где $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — гр-ые и
 опр. и непрерывные на I
 $f(x) \neq 0$

Общее решение ЛДУ n -ого порядка

$$y = y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3 + \dots + c_n y_n$$

где y_i — частные решения ЛДУ (1)

c_1, c_2, c_n — произб. постоянные

Дал. в

с помощью лч. дур. n -ого порядка

$$L[y] = y^n + a_1(x) y^{n-1} + \dots +$$

$+ a_n(x) y$ можно записать в виде:

$$L[y] = f(x)$$

$$L[y] = 0 \quad (0 \text{ гр-ые тожд. равные } 0)$$

примем L и гр-ые

$$y = y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3 + \dots + c_n y_n$$

$$L[y] = L[y_1 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n]$$

$$L[y_1] = f(x)$$

и.а. $y(i) = 0$ - каждое решение

$$\text{Для } y(x) = y_0$$

$$y' + y \tan x = \tan x$$

$$y' = \tan x - y \tan x$$

$$y' = \tan x (1 - y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x (1 - y) \quad | : 1 - y \neq 0$$

$$\frac{dy}{(1 - y) dx} = \tan x \quad | \cdot dx$$

$$\frac{dy}{(1 - y)} = \tan x dx$$

$$\int \frac{dy}{1 - y} = \int \tan x dx$$

$$-\int \frac{d(1 - y)}{1 - y} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow -\ln|1 - y| = \int \frac{d \cos x}{\cos x}$$

$$\ln|1 - y| = \ln|\cos x|$$

$$1 - y = \cos x$$

$$y = 1 - \cos x$$

Линейные из (олигархи)

Лин. диф. уравн. n -го
порядка

Однородное линейное диф. уравн. n -го порядка
наз. уравн. Вуга

$$(1) \quad y^n + L_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + L_n(x) \cdot y = 0$$

где n -ые $L_1(x), \dots, L_n(x), 0$ определены
и непрерывны на некотором промежутке I числовой ос.

Если $L(x) \equiv 0$, то $\forall x \in I$

наз. 1° $0 \equiv 0$, а если n -ые $L(x) \neq 0$, то

1. Неогр. $\forall x$

Теорема (о существовании и единств.
реш. линейного уравн. n -го порядка)

Для $\forall x_0 \in I$ для $\forall$ чисел $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$
существует решение $y = y(x)$ $\forall x \in I$
опр. на промежутке I и удовл. нач. условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$\forall$ 2 решения удовл. усл-ям. совпадают

Всюду, где они оба определены

Они-то

Пусть X — множество всех и раз непрерывных

Д. функций на интервале I ; Y — мн-во всех непрерывных функций на том же интервале

Пр-ва X и Y являются абст. лнн. пр-вами
они-то являются ед-нл. функцией и сумм. на мн-ве

Опред $L: X \rightarrow Y$ опре. пр-вом

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y$$

Опр. 2.

Лнн. оператор

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y$$

наз. L линейным n -го порядка

т-ка

Совокуп. всех р-н $L[y] = 0$ n -го порядка
обр. лнн. пр-во

Они-то $L[y] = 0$ n -го кор.

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0$$

где $L_1(x), \dots, a_n(x)$ определены и непрерывны на всем пр-ке Γ числ. пр., можно записать в виде

$$L[y] = 0 \quad (1)$$

Если $y = y(x)$, $y_1(x) = y_1(x)$, $y_2(x)$ — произвольные реш. этого $ОД$ и $\alpha \in R$, то в силу лин. однородности L имеем

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \quad L[\alpha y] = \alpha L[y]$$

где 0 — знак произвольн., произв. равенство на пр-ке Γ

$\Rightarrow$ Омножая пол. $y_1 + y_2$ и α на произвольн. реш. $ОД$

можно получить произв. чл-ны y_1 и y_2 с коэф. α .

Т.о. совокупность решений $ЛОДХ(n)$ образует лин. пр-во

2. Т-ма

Л. К. частных реш. $ЛОДХ$ и-го порядка

$$y^{(n)} + L_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0 \quad (2)$$

где произв. $L_1(x), \dots, L_n(x)$ определены и непрерывны на всем пр-ке Γ числ. пр.,

эв. рещ. DX

Дока-во Пусть $y_i = y_i(x)$, $y_1 = y_2(x), \dots$

$y_n = y_n(x) \sim \mathcal{L}P$. и $ODX(3)$

р-ич. л.ц. этих линейных рещ.

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Найдем

$$\begin{aligned} L[y] &= L[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n] = \\ &= \left\{ \text{ичн. л.ц. оператора } L \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 L[y_1] + \alpha_2 L[y_2] + \dots + \alpha_n L[y_n] \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем } y_i, \quad i=1,2,\dots,n \text{ л.ц. рещ.} \\ \text{л. } ODX(3) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ио } L[y_i] = \bar{0}, \quad i=1,2,\dots,n \text{ и } L[y] = \alpha_1 \bar{0} + \alpha_2 \bar{0} + \dots + \alpha_n \bar{0} = \bar{0}$$

Т.о. получим, что $L[y] = \bar{0} \Rightarrow$
р-ич. $y = y(x)$ эв. рещ. $ODY(3)$

Дур. Слест. р-ич. $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$,

$y_n = y_n(x)$, сур. иа ир-ис Γ , иэс. л.з.,

Если суц. непрерывная равн. когдo л.д. эгч
 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n \equiv 0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0$$

Опр. и. л. ф. $\varphi_1 = \varphi_1(x), \varphi_2 = \varphi_2(x), \dots, \varphi_n = \varphi_n(x)$

Опр. на пр-ке I , нз. л. нз., есл. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
 линейно независ. равн. когдo л.д. эгч $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n \equiv 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Опр. 5

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ $\varphi_1 = \varphi_1(x), \varphi_2 = \varphi_2(x), \dots, \varphi_n = \varphi_n(x)$

Опр. и-1. раз. и $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и I . Опр.

Введем этот сист. нз. в. эгч.

$$W(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Г. ма

Если сист. опр. и-1. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и I

$\varphi_1 = \varphi_1(x), \dots, \varphi_n = \varphi_n(x)$ л. з.,

то опр. Введем этот сист. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

монг. равна нулю

Доказ.

Положим $y_1, \dots, y_n$ $y_i = f_i(x)$, $y_2 = f_2(x)$.

$y_1 = f_1(x)$ линейно зависима, то, согласно определению, существует непрерывная л.д. этих

функций монг. равна нулю

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n = 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$$

$$+ \dots + \lambda_n^2 > 0$$

Продумай это р-во $n-1$ раз

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n = 0$$

$$\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \dots + \lambda_n y_n' = 0$$

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)} + \lambda_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)} = 0$$

Оценивая полагая, что есть $n-1$ линейно зависима

г-ля доказывая

г-ля со стр. общего р-ва. ЛОДХ

Совокупность решений ЛОДХ $n-1$ раз

$$y^{(n)} + L_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + L_n(x) \cdot y = 0 \quad (6)$$

где функции $L_1(x), \dots, L_n(x)$ определены на промежутке I , есть линейное уравнение

Решение:

Согласно теореме о линейном уравнении

любая совокупность n линейно независимых решений

удовлетворяет (6).

Чтобы найти общее решение, надо разложить

в базисе $y_1, \dots, y_n$ и составить

систему уравнений

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \quad y_n = y_n(x)$$

где $y_1, \dots, y_n$ — линейно независимые функции

на промежутке I .

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = \dots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \quad y_2''(x_0) = \dots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$y_n(x_0) = \dots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

где $x = x_0$

Сущ-ие матричные решения влекут
из теоремы сущ-ие и эквивалентные решения

ЛОДХ и-го порядка

составим матрицу Вронского в м. $x = x_0$

для системы линейных решений

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= \{ \text{линейно независимые функции } y_1, \dots, y_n \} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I \neq 0$$

П. А. Вронского для системы л. р. с.

в м. $x = x_0 \neq 0$, то, согласно теореме
об определителе Вронского линейно незав.
система реш. ЛОДХ и-го порядка

10 9 6) ЛЧ.

Поэтому м. $x = x_0$ — произв. м. кр-та I , то определено для этой точки ч.р. не равен нулю ни в одной точке $x \in I$

Если $y = y(x)$ — произв. решение рассм. ОДХ и даны

$$y(x_0) = C_1, y'(x_0) = C_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_n$$

Поэтому по г-ме существования и единственности ЛОДХ и-го порядка

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

т.е. для $\forall$ решение ЛОДХ и-го порядка можно взять как лине. комб. линей. решений

$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ здесь ОДХ и ка-во этих функций равно 0.

т.е. (0 сущ. функ. сР линейного однородного ОДХ и-го порядка)

Решение ЛДХ и-ого уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0$$

т.е. $a_1(x), \dots, a_n(x)$ — непрерывны и непрерывны в x_0

Условия

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}$$

$$y_1'(x_0) = y_{10}', \quad y_2'(x_0) = y_{20}', \quad \dots, \quad y_n'(x_0) = y_{n0}'$$

$$y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, \quad y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, \quad \dots$$

$$y_n^{(n-2)}(x_0) = y_{n0}^{(n-2)}$$

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \dots & y_{n0}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

находим. вер. вронскасiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \dots & y_{n0}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

но γ -ме об опис-ле Вронского 1. незав.
 сис-мы решают ЛОУ n -го порядка,
 если γ -м γ явл. 1. нез-м γ
 сис-мой рен. $W(\gamma)$, то опр. Вронского
 $\neq 0$ и в обратном случае

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ гал } \forall x \in I$$

Помогая считать, что $W(x_0) \neq 0$ при $x_0 \in I$, то можно рен. $W(x)$ $y_1 = y_1(x)$,
 $y_2 = y_2(x)$, явл. линейно нез. и опр. рун
 сис-му рен-м.

Лекция 10 (олимпиада)

Формула Вернон-Стеклова - Лекция

Рассм. ЛОД 2-го порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3)$$

$a_1(x), a_2(x)$ - пр-я, непрерыв. и непрерыв. на I

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ - ф.д. составим дет. Врон. для них

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

Приведем дет.

$$W'(x) = y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1'(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1''(x) \quad (\cong)$$

(и.а. $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ - ф.р. ЛОД (3) и.а. они линейно независимы.)

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \Rightarrow y_1' = -a_1(x)y_1' - a_2(x)y_1 \\ y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0 \Rightarrow y_2' = -a_1(x)y_2' - a_2(x)y_2 \end{cases}$$

$$- a_2(x) y_2 \} \quad (\equiv)$$

$$y_1'(x) y_2'(x) + y_1(x) (-a_1(x) y_2'(x) - a_2(x) y_2(x))$$

$$- \cancel{y_2'(x) y_1'(x)} - y_2(x) (-a_1(x) y_1'(x) - a_2(x) y_1(x)) =$$

$$= -a_1(x) y_1(x) y_2'(x) - a_2(x) y_1(x) \cancel{y_2(x)} +$$

$$+ a_1(x) y_1'(x) y_2(x) + a_2(x) \cancel{y_1(x) y_2(x)} =$$

$$= -a_1(x) (y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)) =$$

$$= -a_1 \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

В р. получаем ОУ 1-го порядка с разд. переменными.

$$w'(x) = -a_1(x) w(x)$$

$$\text{н.д. } w'(x) = \frac{dw(x)}{dx}, \quad \text{то } \frac{dw(x)}{dx} = -a_1(x) w(x)$$

$$\frac{dw(x)}{w(x)} = -a_1(x) dx \quad \int \frac{dw(x)}{w(x)} = - \int a_1(x) dx$$

$$\ln |w(x)| = - \int a_1(x) dx + C$$

$$= - \int a_1(x) dx + C$$

$$w(x) = e^{- \int a_1(x) dx + C}$$

$$W(x) = e^{-\int a_1(x) dx + C}$$

$$W(x) = e^{-\int a_1(x) dx + C}$$

$$W(x) = C_0 e^{-\int a_1(x) dx}$$

и т.д.

$$W(x) = C_0 e^{-\int_0^x a_1(t) dt}$$

Если задан нач. и кон. значения

то, $W(x_0) = C_0 e^{x_0}$, $W(x_1) = C_0 e^{x_1}$
 $W(x_0) = C_0$ и т.д. $W_0 = C_0 e^{x_0}$

(5) $W(x) = W_0 e^{x_0} \int_0^x a_1(t) dt$ — при определенных условиях — и т.д.

Примечание: при определенных условиях — и т.д.

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_n = y_n(x)$

и т.д. и т.д. и т.д.

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$$

Поэтому и т.д. и т.д. и т.д.

Рассм. ЛОПХ 2-го порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad z \in \mathcal{C}^1(x) \text{ и } a_2(x) \neq 0$$

Р-ы и сопр. и. невр. на I

Пусть задано невр. р-е: $y_1 = y_1(x)$

и будем искать его в виде

$$y_2(x) = z(x) y_1(x) \text{ и с } y_2 = z y_1$$

т.е. $y_2(x)$ — невр. р-е ЛОПХ, но

оно р-е уравн., соответств. $\{z\}$ и

y_2''

$$y_2' = z' y_1 + z y_1'$$

$$y_2'' = z'' y_1 + 2z' y_1' + z y_1''$$

$$z'' y_1 + 2z' y_1' + z y_1'' + a_1(x)(z' y_1 + z y_1') +$$

$$+ a_2(x) z y_1 = 0$$

$$z'' y_1 + z' (2 y_1' + a_1(x) y_1) + z (y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1) = 0 \quad (6)$$

т.е. $y_1 = y_1(x)$ невр. р-е ЛОПХ

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \quad (7)$$

е. е. ч. (6) ; $z(x)$

$$z'' y_1 + z' (2y_1' + q_1(x) y_1) = 0$$

показывая что оно имеет форму

кон. ервеса и оно имеет вид

и оно не содержит кон. чл.

$$\approx \sim z' = p, \text{ где } p = p(x)$$

$$z'' = p'$$

$$\text{В результате } p' y_1 + p(2y_1' + q_1(x) y_1) = 0 \approx$$

$$p = p(x), \text{ т.е. } p' = 2, \text{ но из условия}$$

$$z = \int y_1 = 2 y_1$$

2 способа. Найдем на эти две

$$y_2(x) = z(x) y_1(x) \text{ или } y_2 = 2 y_1$$

Согласно лемме Вронского для линей. ч. разн.

$$y_1, y_2'$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & 2y_1 \\ y_1' & 2y_1' + 2y_1 \end{vmatrix}$$

и сн. формулы интегрирования - 1-я формула

$$- \int u_1(x) dx \quad W(x) = W_0 e^{x_0}$$

если и. сн. неводимы по y -у и
и сн. в виде

$$W(x) = W_0 e^{x_0} \approx$$

если и сн. сн. и левая часть, то и

формула и сн. в виде

$$W(x) = e^{-\int a_1(x) dx}$$

$$\left(\begin{array}{cc} y_1 & z y_1 \\ y_1' & z' y_1 + z y_1' \end{array} \right) = e^{-\int a_2(x) dx}$$

$$z' y_1^2 + \cancel{2 y_1' y_1} - 2 y_1 y_1' = e^{-\int a_2(x) dx}$$

$$z' y_1^2 = e^{-\int a_2(x) dx}$$

- Д y и то сн.

Д y и сн. сн. сн.

$$\frac{dz}{dx} y_1^2 = e^{-\int a_2(x) dx}$$

$$Iz = \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

$$Z = \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x) dx} \right) dx \Rightarrow Z_c = Z_{y_1}$$

ЛОРД у-го порядка с const корнем

Рассм. ЛОРД у-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

$$a_i(x) = a_i, \quad a_i = \text{const}$$

$$i = 1 \dots n, \quad \text{коэф. ЛОРД}$$

$$(1) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad \text{коэф. и кор. ЛОРД у-го порядка с const корнем}$$

Ищем у-го ука. реч. ЛОРД в виде

$$y = e^{ux}, \quad \text{где } u = \text{const}$$

$$y' = u e^{ux}$$

$$y'' = u^2 e^{ux}$$

$$y^n = u^n e^{ux}$$

Предположим ср-мо $y = e^{ux}$ где u произв.

(1)

$$u^n e^{ux} + a_1 u^{n-1} e^{ux} + a_2 u^{n-2} e^{ux} + \dots$$

$$+ \dots + a_{n-2} e^{ux} + a_n e^{ux} = 0$$

$$\text{т.н. } e^{ux} \neq 0, \text{ что } u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \dots$$

$$+ \dots + a_{n-2} + a_n = 0 \quad (2)$$

Упр-ая $u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \dots + a_n = 0$ мож-ся кор-ые упр-ем левых

и-то кор-ая с упр. упр.

$$\text{Найдем } y' = e^{\lambda x} \cos \beta x + \sin \beta x \cdot e^{\lambda x} \\ (-\beta \sin \beta x + i \beta \cos \beta x) =$$

$$= e^{\lambda x} (\cos \beta x (\lambda + i \beta) + \sin \beta x (i \lambda - \beta)) =$$

$$= \begin{cases} \lambda - \beta = i (\lambda + i \beta) + \sin \beta x (i \lambda - \beta) \\ \Rightarrow 2 \operatorname{Re} i; (-i) = 1 \Rightarrow \sqrt{-1} \cdot (\sqrt{1}) = i (1 + \beta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{\alpha x} (\cos \beta x (\alpha + i\beta) + \sin \beta x (\alpha + i\beta)) = \\
 &= e^{\alpha x} \frac{(\alpha + i\beta)}{1} (\cos \beta x + \sin \beta x) = e^{(\alpha + i\beta)x} \\
 &= e^{\alpha x} e^{i\beta x}
 \end{aligned}$$

Аналогично получим изр. для кор.чл.