Подготовка к КР №2

„Дифференциальные уравнения 1-го порядка"

Вариант 0

1. $\dfrac{dx}{x(y-1)}+\dfrac{dy}{y(x+2)}=0$ диф. ур. с разд. перем.

О.Д.З.
$x\neq0$
$y\neq0$
$x\neq-2$
$y\neq1$

$$\frac{dy}{y(x+2)}=\frac{dx}{x(1-y)}\quad\Big|\begin{array}{l}\cdot(1-y)\\ \cdot(x+2)\end{array}$$

$$\frac{1-y}{y}dy=\frac{x+2}{x}dx$$

$$\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$$

$$\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$$

$$\int\frac{dy}{y}-\int dy=\int dx+2\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|-y=x+2\ln|x|+C\ ,\ \forall C$$

$$\ln|y|-2\ln|x|=y+x+C$$

$$\ln\left|\frac{y}{x^2}\right|=y+x+C$$

$$\left|\frac{y}{x^2}\right|=e^{y+x}\cdot e^{C}=e^{y+x}\cdot C_1\ ,\ \forall C_1>0$$

$$\frac{y}{x^2}=\pm C_1e^{y+x}=C_2e^{y+x}\ ,\ \forall C_2\neq0.$$

$$y=x^2e^{y+x}\cdot C_2\ ,\ \forall C_2\neq0.$$

Ответ: $y=x^2e^{y+x}\cdot C_2$, $\forall C_2\neq0$.

2 $(y^4+2x)\,y' = y$

$$y' = \frac{y}{y^4+2x}$$

$$x' = \frac{y^4+2x}{y} \qquad y \neq 0.$$

$$x' = \frac{2}{y}x + y^3 \qquad \text{ЛНДУ}$$

$$x' = \frac{2}{y}x \qquad \text{ЛОДУ}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2\frac{x}{y} \quad \Big| : x \cdot dy$$

$$\frac{dx}{x} = 2\frac{dy}{y}$$

$$\ln|x| = 2\ln|y| + c_1 \quad \forall c$$

$$x = y^2 \cdot c_1, \ \forall c_1 \neq 0$$

$x \neq 0$

$$x_{оо} = y^2 \cdot c_1, \ \forall c_1$$

$$x_{он} = y^2 \cdot c_1(x)$$

$$\cancel{2y\,c_1} + y^2 \cdot c_1' = \cancel{\frac{2}{y}\,y^2 c_1} + y^3$$

$$c_1' = y$$

$$c_1 = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + \tilde{c}, \ \forall \tilde{c}$$

$$x_{он} = \left(\frac{y^2}{2} + \tilde{c}\right) y^2 = \frac{1}{2}y^4 + \tilde{c}y^2, \ \forall \tilde{c}$$

$$y = 0$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}y^4 + \tilde{C}y^2, \ \forall \tilde{C}$

Классифицировать каждое из уравнений и решить задачу Коши

③ $\left\{\begin{array}{l} 2y'ctgx - 4y = -y^2\sin 2x, \ \text{Д.У} \\ y(0) = 1. \ \text{нач. усл.} \end{array}\right\}$ задача Коши

О.Д.З
$\sin x \neq 0$
$x \neq \pi n$
$n \in \mathbb{Z}$

$2y'ctgx - 4y = -y^2\sin 2x$

$2y'ctgx = 4y - y^2\sin 2x$

$y' = \frac{4y - y^2\sin 2x}{2ctgx}$

$y' = 2\,tgx \cdot y - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\sin x \cancel{\cos x}\,\sin x}{\cancel{\cos x}}\,y^2$

$y' = 2\,tgx \cdot y - \sin^2 x\, y^2$ ур-ние Бернулли

$m = 2$

$z = y^{1-m} = y^{1-2} = y^{-1}$

$y = z^{-1}$

$y' = -z^{-2}z'$

$-z^{-2}z' = 2tgx \cdot z^{-1} - \sin^2 x \cdot z^{-2}$

$z' = -2tgx \cdot z + \sin^2 x$ ЛНДУ

$z = u \cdot v$

$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = -2tgx \cdot u \cdot v + \sin^2 x$

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+2tgx\cdot u\cdot v-\sin^2x=0$$

$$v\left(\frac{du}{dx}+2tgx\cdot u\right)=\sin^2x-u\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}+2tgx\cdot u=0.$$

$$\frac{du}{dx}=-2tgx\cdot u \quad \Big|:u \qquad u\neq 0$$

$$\frac{du}{u}=-2tgx\,dx$$

$$\ln u=-2\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=+2\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}dx=2\ln|\cos x|+C,$$
$$\forall C$$

$$\ln|u|=2\ln|\cos x|+C$$

$$|u|=|\cos x|^2\cdot C_1,\ \forall C_1>0$$

$$u=\cos^2x\cdot C_2,\ \forall C_2\neq 0$$

$$u=\cos^2x\cdot C_2,\ \forall C_2$$

$$C_2=1$$

$$u=\cos^2x$$

$$\sin^2x-\cos^2x\,\frac{dv}{dx}=0.$$

$$\cos^2 x \, \frac{dv}{dx} = \sin^2 x$$

$$\frac{dv}{dx} = tg^2 x$$

$$dv = tg^2 x \, dx$$

$$\int dv = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

$$= tg x - x + C \ , \ \forall C.$$

$$v = tg x - x + C$$

$$z = uv$$

$$z = \cos^2 x \cdot (tg x - x + C) \ , \forall C.$$

$$\frac{1}{y} = \cos^2 x \, (tg x - x + C)$$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x \, (tg x - x + C)}$$ – общее решение ур-ния Бернулли.

$y(0) = 1$ – начальное условие

$x = 0$
$y = 1$

$$1 = \frac{1}{\cos^2 0 \, (tg 0 - 0 + C)} = \frac{1}{1 \cdot (0 - 0 + C)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 1.$$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x \, (tg x - x + 1)}$$ частное решение ур-ния Бернулли.

Ответ: $y = \dfrac{1}{\cos^2 x\,(\operatorname{tg} x - x + 1)}$

4) $\begin{cases} (3x^2 - y^2)\,dy = 2xy\,dx, \\ y(2) = 1 \end{cases}$ д.у

нач. усл

задача Коши

$$(3x^2 - y^2)\,dy = 2xy\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy} \qquad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}{2\cdot\left(\frac{x}{y}\right)}$$

однородное уравнение

$$\frac{x}{y} = u$$

$$x = uy$$

$$x' = u'y + u$$

$$u'y + u = \frac{3\cdot u^2 - 1}{2\cdot u}$$

$$(u'y + u)\cdot 2u = 3u^2 - 1$$

$$2uy\,u' + 2u^2 = 3u^2 - 1$$

$$2uy\,u' - u^2 + 1 = 0$$

$$2uy\,u' = \cancel{1 - u^2}\ u^2 - 1$$

$$u' = \frac{1-u^2}{2uy} \qquad \begin{matrix} u \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix} \qquad u \neq \pm 1 \to x \neq \pm y$$

2\.

$$\frac{u\,du}{1-u^2} = \frac{1}{y}dy$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-u^2)}{1-u^2} = \int \frac{dy}{y}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-u^2| = \ln|y| + C, \quad \forall C$$

$$\ln|1-u^2| = -2\ln|y| + C_1, \quad \forall C_1$$

$$|1-u^2| = |y|^{-2} \cdot C_2, \quad \forall C_2 > 0$$

$$1-u^2 = \frac{C_3}{y^2}, \quad \forall C_3 \neq 0.$$

$$u^2 = 1 - \frac{C_3}{y^2}, \quad \forall C_3 \neq 0.$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 1 - \frac{C_3}{y^2}, \quad \forall C_3 \neq 0.$$

пот. решение $x=0,\ y=0.$

$x = \pm y.$

$$\pm(3x^2 - x^2)dx = \pm 2x \cdot x\,dx$$

$$\pm 2x^2 dx = \pm 2x dx$$

пот. решение $x = \pm y.$

общее решение диф. ур.

Начальное условие: $y(2) = 1 \Rightarrow$ при $x = 2$, $y = 1$

$$\frac{4}{1} = 1 - \frac{C_3}{1}$$

$$4 = 1 - C_3 \Rightarrow C_3 = 1 - 4 = -3.$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 1 + \frac{3}{y^2} = \frac{y^2+3}{y^2}$$

$$x^2y^2 = y^2(y^2+3)$$

$x^2 = y^2 + 3$ – частное решение диф. ур-ния.

Ответ: $x^2 = y^2 + 3$