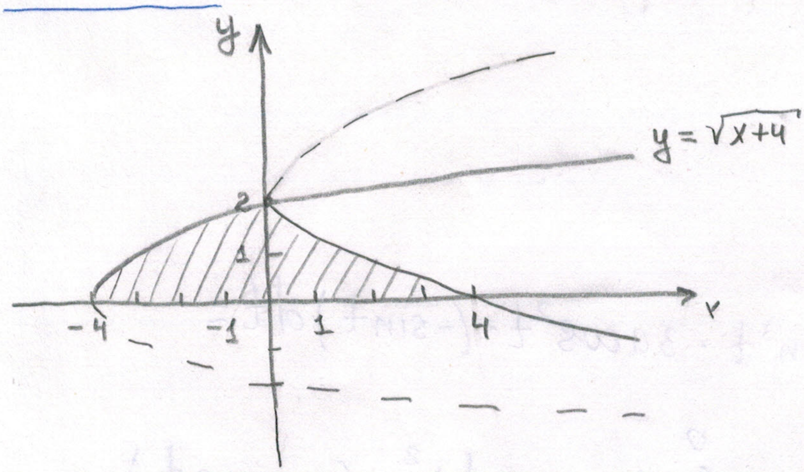
Подготовка к РК №1 по ИиДУ

„Определённый интеграл"

1) Задачи на вычисление площадей плоских фигур.

1.1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x+4}$, $y=-\sqrt{x}+2$ и осью Ox. Сделать чертёж.

Решение:



$y=\sqrt{x+4}$ – верхняя часть параболы

$y^2=x+4$ – парабола со сдвигом по оси Ox влево на 4

$y=-\sqrt{x}+2$ – нижняя часть параболы

$\sqrt{x}=2-y$

$x=(2-y)^2$ – парабола со сдвигом вверх по оси Oy на 2

Точки пересечения $y=\sqrt{x+4}$ и $y=-\sqrt{x}+2$ – это точка $(0,2)$. Точки пересечения $y=\sqrt{x+4}$ и $y=-\sqrt{x}+2$ с осью Ox – это $(-4,0)$ и $(4,0)$ соответственно.

$$S_{\text{фигуры}}=S_1+S_2=\int_{-4}^{0}\sqrt{x+4}\,dx+\int_{0}^{4}(-\sqrt{x}+2)\,dx=$$

$$=\int_{-4}^{0}(x+4)^{1/2}d(x+4)+2\int_{0}^{4}dx-\int_{0}^{4}x^{1/2}dx=\frac{(x+4)^2}{2}\Bigg|_{-4}^{0}+$$

$$+\left(2x-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_{0}^{4}=\left(\frac{16}{2}-0\right)+\left(8-\frac{2}{3}\cdot 2^3-0\right)=8+8-\frac{16}{3}=$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}$$

Ответ: $S_{фигуры} = \frac{32}{3}$

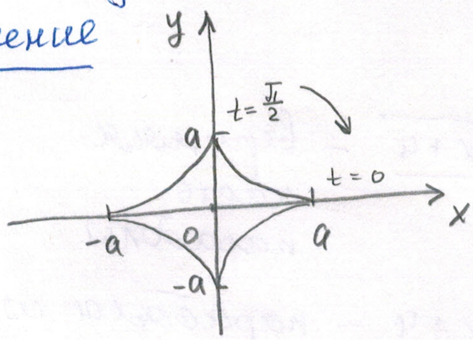
1.2 Найти площадь фигуры ограниченной астроидой

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

№ 6.478 [ЕД]

Сделать чертёж.

Решение



t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π
x	a	0	0	-a
y	0	a	-a	0

$$S_{фигуры} = 4\, S_1.$$

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)\,x'(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)\,dt =$$

$$= -3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t \cdot \cos^2 t\,dt = -3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= -3a^2 \cdot \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 2t)(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= -\frac{3a^2}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\,dt =$$

$$= -\frac{3a^2}{8} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2t\,dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1+\cos 4t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int^{0} \cos^2 2t\,d(\sin 2t) \right] =$$

$$= -\frac{3a^2}{8}\left[\left(0-\frac{\pi}{2}\right) - \frac12 \cdot \sin 2t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac12\left(t - \frac14 \sin 4t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac12 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\sin^2 2t)\, d(\sin 2t)\right] =$$

$$= -\frac{3a^2}{8}\left[-\frac{\pi}{2} - \frac12(0-0) - \frac12\left(0-\frac{\pi}{2}\right) - \frac12 \cdot -\frac14 (\sin 0 - \sin 2\pi) - \frac12\cdot \sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac12 \cdot \frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\right] =$$

$$= -\frac{3a^2}{8}\left[\overset{2}{-\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} - \frac12(\sin 0 - \sin\pi) + \frac16\left(\sin^3 0 - \sin^3 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

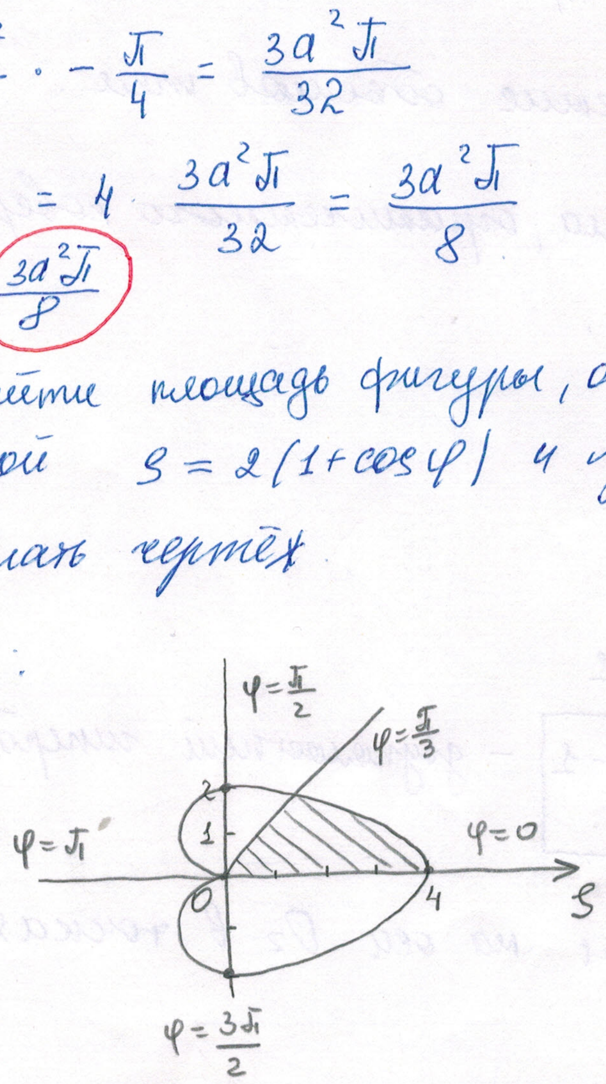
$$= -\frac{3a^2}{8} \cdot -\frac{\pi}{4} = \frac{3a^2\pi}{32}$$

$$S_{\text{фигуры}} = 4 \cdot \frac{3a^2\pi}{32} = \frac{3a^2\pi}{8}$$

Ответ: $\frac{3a^2\pi}{8}$

1.3 Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сделать чертёж

Решение:



φ	r
0	4
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	2
2π	4

$$S_{\text{фигуры}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\varphi$$

$$S_{\text{фигуры}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 2\cdot\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi\, d\varphi + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi\right] =$$

$$= 2\left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \left(3\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{3} + 4\cdot\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \pi + \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $S_{\text{фигуры}} = \pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}$

---

2. Задачи на вычисление объёмов тел.

2.1 № 6.538 из [Е.Д]

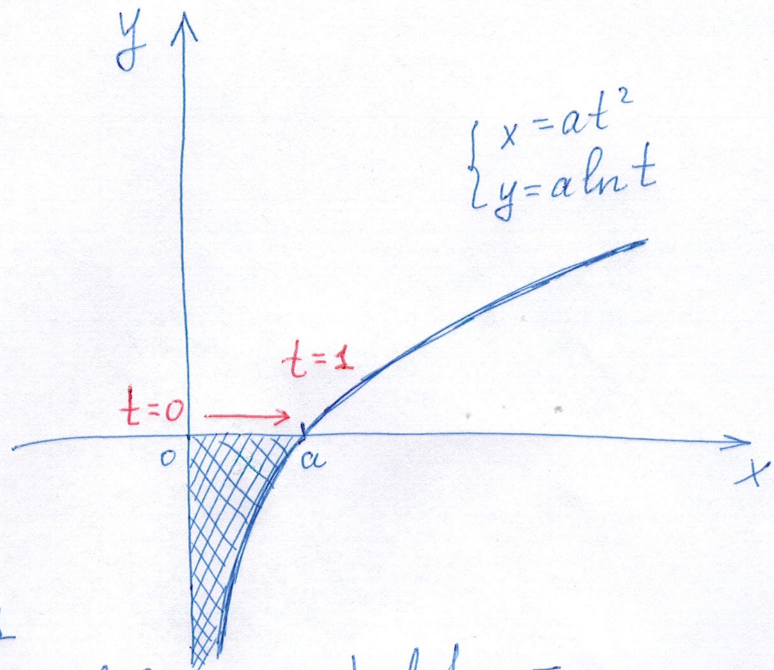
2.2 № 6.540 из [Е.Д]

$$\begin{cases} x = at^2, \\ y = a\ln t \end{cases}, \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{x}{a}, \; t = \sqrt{\frac{x}{a}} \quad \boxed{y = a \ln \sqrt{\frac{x}{a}}}$$

а) Ox; V_{Ox} – ?

б) Oy; V_{Oy} – ?

t	1	e	0
x	a	ae^2	0
y	0	a	$-\infty$



а) $V_{0x} = \pi \cdot \int\limits_a^b y^2 dx =$

$$= \pi \int\limits_0^1 y^2(t)\, x'(t)\, dt = \pi \int\limits_0^1 \underbrace{a^2 \ln^2 t}_{y^2(t)} \cdot \underbrace{2at\,dt}_{x'(t)} =$$

$$= 2\pi a^3 \int\limits_0^1 t \ln^2 t \, dt \; = $$

$$\int\limits_0^1 t \ln^2 t \, dt = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ \text{особ. в т. } x = 0 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 t \ln^2 t \, dt \; \triangleq$$

$$\int_{0+\varepsilon}^{1} t\ln^2 t\,dt = \int_{0+\varepsilon}^{1} \ln^2 t\,d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{t^2}{2}\ln^2 t\,\Big|_{0+\varepsilon}^{1} -$$

$$-\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{t^2}{2}\cdot 2\cdot \ln t\cdot \frac{1}{t} = \frac{t^2}{2}\ln^2 t\,\Big|_{0+\varepsilon}^{1} -$$

$$-\int_{0+\varepsilon}^{1} t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\ln^2 t\,\Big|_{0+\varepsilon}^{1} - \int_{0+\varepsilon}^{1} \ln t\,d\left(\frac{t^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln^2 t\,\Big|_{0+\varepsilon}^{1} - \frac{t^2}{2}\ln t\,\Big|_{0+\varepsilon}^{1} + \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln^2 t - \frac{t^2}{2}\ln t + \frac{1}{2}\int_{0+\varepsilon}^{1} t\,dt =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2}\ln^2 t - \frac{t^2}{2}\ln t + \frac{t^2}{4}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^{1} =$$

$$= \frac{t^2}{2}\left(\ln^2 t - \ln t + \frac{1}{2}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{t^2}{2}\left(\ln^2 t - \ln t + \frac{1}{2}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - 0 + \frac{1}{2}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2\left(\ln^2\varepsilon - \ln\varepsilon + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2\left(\ln^2\varepsilon - \ln\varepsilon + \frac{1}{2}\right) \boxed{=}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2\left(\ln^2\varepsilon - \ln\varepsilon + \frac{1}{2}\right) = (0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln^2\varepsilon - \ln\varepsilon + \frac{1}{2}}{\varepsilon^{-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \text{Пр. Л-Б.} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\left(\ln^2\varepsilon - \ln\varepsilon + \frac{1}{2}\right)'}{\left(\varepsilon^{-2}\right)'} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\ln\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}}{-2\varepsilon^{-3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^2\ln\varepsilon - \varepsilon^2\right) = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\varepsilon +$$

$$+\frac{1}{2}\underset{\downarrow\, 0}{\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\varepsilon = (0\cdot\infty) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \text{Пр. Л-Б.} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\varepsilon^{-2}\right)'} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-2\varepsilon^{-3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 = 0.$$

$$\boxed{=}\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{4}$$

$$\triangle\!\!=\ \frac{1}{4}$$

$$= 2\pi a^3\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi a^3}{2}$$ **Ответ.**

б) $V_{oy} = 2\pi \int\limits_0^1 \underbrace{at^2}_{x} \underbrace{(-a \ln t)}_{-y} \cdot \underbrace{2at\,dt}_{x'} =$

$= -4\pi a^3 \int\limits_0^1 t^3 \ln t\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ \text{особ. в т. } x=0 \end{array} \right| \boxed{=}$

$$\int\limits_0^1 t^3 \ln t\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 t^3 \ln t\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln t\,d\left(\frac{t^4}{4}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{4} t^2 \ln t \Big|_{0+\varepsilon}^1 - \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{t^4}{4} \cdot \frac{1}{t}\,dt \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{4} t^2 \ln t \Big|_{0+\varepsilon}^1 - \frac{1}{4} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 t^3\,dt \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{4} t^2 \ln t \Big|_{0+\varepsilon}^1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_{0+\varepsilon}^1 \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} \ln 1}_{0} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4} \varepsilon^2 \ln \varepsilon - \frac{1}{16} \cdot 1 + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{16} \cdot \varepsilon^4}_{0} =$$

$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \varepsilon =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \varepsilon = (0 \cdot \infty) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^{-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \text{Пр. Л-Б.}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\ln \varepsilon)'}{(\varepsilon^{-2})'} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-2\varepsilon^{-3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 = 0$$

$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\cdot 0 = -\frac{1}{16}$$

$$= -4\pi a^3 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}\pi a^3$$

Ответ

Замечание: 1 В пункте а м/о было составить интеграл $V_{ox} = \pi \int_0^a \left(a \ln\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 dx =$

$$= \boxed{\pi a^2 \int_0^a \ln^2 \sqrt{\frac{x}{a}}\, dx = V_{ox}}$$

Ответ получился бы тот же самый.

2 В пункте б ~~вместо~~ вместо y подставили $(-y)$ т.к график ф-ции $y = a \ln\sqrt{\frac{x}{a}}$ лежит

Н

ниже оси Ox при $x \in [0; a]$

3 в пункте б) нужно было составить интеграл $V_{oy} = \pi \int\limits_c^d x^2(y)\,dy =$

$$= \pi \int\limits_{-\infty}^{0} a^2 \left(e^{\frac{2y}{a}}\right)^2 dy = \boxed{\pi a^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\frac{4y}{a}} dy = V_{oy}} =$$

несоб интег 1-го рода

$$= \pi a^2 \cdot \frac{a}{4} \cdot \lim_{b \to -\infty} \int\limits_b^0 e^{\frac{4y}{a}} d\left(\frac{4y}{a}\right) =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} \cdot \lim_{b \to -\infty} e^{\frac{4y}{a}} \Big|_b^0 =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} \left(1 - \lim_{b \to -\infty} e^{\frac{4y}{a}}\right) = \frac{\pi a^3}{4} (1 - 0) =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4}.$$ Ответ.

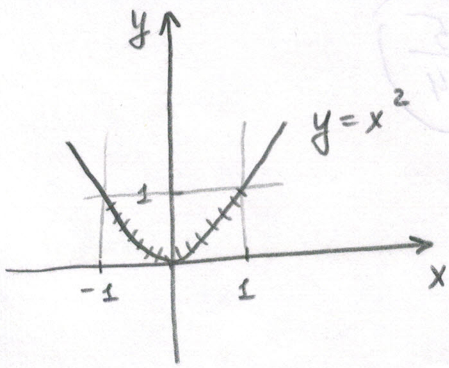
2.3 6.543 из [Е.Д]

2.9 См. № 6.543. Еф. Дем.

3 Задачи на вычисление длин дуг и площадей поверхностей.

3.1 Найти длину дуги кривой $y=x^2$ от точки $(-1,1)$ до точки $(1,1)$. Сделать чертёж.

Решение: $y=x^2$ - парабола



$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+{y'_x}^2}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx =$$

$$\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{1+4x^2},\ du=\dfrac{8x\,dx}{2\sqrt{1+4x^2}}=\dfrac{4x\,dx}{\sqrt{1+4x^2}} \\ dv=dx, \\ v=x\end{array}\right|=$$

$$=x\sqrt{1+4x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx=x\sqrt{1+4x^2}\Big|_0^1-$$

$$-\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}=\sqrt{5}-\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\Big|_0^1=\sqrt{5}-\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx+\frac{1}{2}\ln|2+\sqrt{5}|$$

Итак: $2\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln|2+\sqrt{5}|$

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln|2+\sqrt{5}|$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln|2+\sqrt{5}|$$

Ответ: $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln|2+\sqrt{5}|$

3.2 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

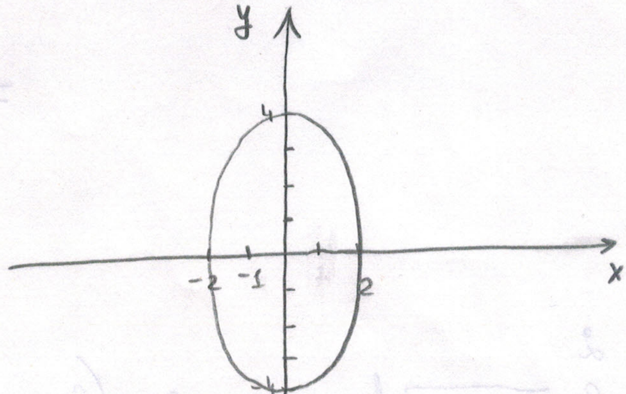
сделать чертёж:

Решение

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t, \\ \frac{y}{4} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1}$$ Эллипс

Перейдём к декартовой системе координат



$$4x^2 + y^2 = 16$$

$$y^2 = 16 - 4x^2$$

$$y = \pm\sqrt{16-4x^2}$$

$$y = \pm 2\sqrt{4-x^2}$$

$$y' = 2\cdot\frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{4x^2}{4-x^2}} = \sqrt{\frac{4-x^2+4x^2}{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4+3x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$Q_{0x} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4+3x^2}\cdot \frac{\cancel{\sqrt{4-x^2}}}{\cancel{\sqrt{4-x^2}}}\,dx =$$

$$= 8\pi \int_0^2 \sqrt{4+3x^2}\,dx =$$

$$\int_0^2 \sqrt{4+3x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{4+3x^2} \\ du = \dfrac{3x\,dx}{\sqrt{4+3x^2}} \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{4+3x^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{3x^2}{\sqrt{4+3x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{4+3x^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \sqrt{4+3x^2}\,dx + 4\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$$

Итак: $$2\int_0^2 \sqrt{4+3x^2}\,dx = x\sqrt{4+3x^2}\Big|_0^2 + 4\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}} =$$

$$= 8 + \frac{4}{\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{4+3x^2}\right|\Big|_0^2 =$$

$$= 8 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\ln|2\sqrt{3}+4| - \ln 2\right)$$

$$\int_0^2 \sqrt{4+3x^2}\,dx = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\ln|2\sqrt{3}+4| - \ln 2\right)$$

$$= 32\pi + \frac{16}{\sqrt{3}}\left(\ln|2\sqrt{3}+4| - \ln 2\right) =$$

$$= 32\pi - \frac{16}{\sqrt{3}}\left(\ln|2(\sqrt{3}+2)| - \ln 2\right) =$$

$$= 32\pi - \frac{16}{\sqrt{3}}\left(\cancel{\ln 2} + \ln(2+\sqrt{3}) - \cancel{\ln 2}\right) =$$

$$= 32\pi - \frac{16}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$$

Ответ: $32\pi - \frac{16}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$

4 Задачи исследования на сходимость несобственных интегралов

4.1 $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x\sqrt{x}+3}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{несоб. инт. 1-го рода} \\ \text{при } x \to +\infty \quad x\sqrt{x}+3 \sim x^{3/2} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{2+\cos x}{x\sqrt{x}+3} \leq \frac{2+\cos x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{3}{x\sqrt{x}} = g(x)$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$1 \leq \cos x + 2 \leq 3$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x\sqrt{x}}\,dx = 3\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \text{ — сх-ся}$$

т. к. $\alpha = 3/2 > 1$

$\Rightarrow$ исходный интеграл сх-ся по признаку сравнения

42

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}{x+3}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{нес. инт. 1-го рода} \\ \text{при } x \to +\infty \\ \sqrt{1+x^2} \to +\infty \\ \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2} \to \frac{\pi}{2} \\ \text{при } x \to +\infty \\ x+3 \sim x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\cdot 2\cdot x}{(x+3)\cdot\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}{x+3}\cdot x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\cdot \frac{x}{x+3} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 = 1 > 0$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ – расх-ся т.к $\alpha = 1$

$\Rightarrow$ исходный также расходится.

4.3

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. II-го рода} \\ x=0 \text{ т.р. ф-ции} \\ \text{при } x\to 0 \quad \ln(1+x)\sim x \\ \qquad\qquad\quad \sin x^3 \sim x^3 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ расх-ся т.к $\alpha = 2 > 1$.

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\cdot x^2}{\sin x^3 \cdot 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x^2}{x^3} = 1$$ $\Rightarrow$ по предельному признаку $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3}dx$ также расх-ся.

4.4

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. II-го рода} \\ x=0 \text{ т. разрыва} \\ \text{при } x\to 0 \quad \sin x \sim x \\ \text{при } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{ф-ции } \sin x \text{ не} \\ \text{яв-ся знакопер.} \end{array} \right|$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^{4/3}} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{1/3}}$$ сх-ся т. к $\alpha = \frac{1}{3} < 1$

$\Rightarrow$ исходный интеграл также сх-ся.

45

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+\cos x}\,dx = \left| \begin{matrix} \text{нес. инт. 1-го рода} \\ x \in [1;+\infty) \end{matrix} \right|$$

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4+\cos x} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1+\frac{\cos x}{x^4}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{\cos x}{x^4}\right)}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right)\cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\underbrace{\frac{\cos x}{x^4}}_{\to 0}\right)\cdot 1} = 1$$

$\to 0$ как огр. вел. $\cos x$ на б.м.ф $\frac{1}{x^4}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$$ — Интеграл Дирихле

$\alpha = 2 > 1$

сх-ся.

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+\cos x}\,dx$$ также сх-ся по предельному признаку.

46) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^3-3x+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ \text{особ. в т. } x=1 \end{array} \right|$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x-2)} = \frac{1}{x^2+x-2} = g(x)$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}} =$$

нес. инт. 2-го рода особ. в т. $x=1$.

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}} \ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{1-\varepsilon-1}{1-\varepsilon+2}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{-1}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{3-\varepsilon}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|-\frac{1}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{3-\varepsilon-3}{3-\varepsilon}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|-\frac{1}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\Big|\underbrace{1-\underbrace{\frac{3}{3-\varepsilon}}_{\to 0}}_{\to 1}\Big| - \frac{1}{3}\ln\left|-\frac{1}{2}\right| = -\infty$$

расх-ся

$\to \ln 0 \to -\infty$ в пределе

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^3-3x+2}\,dx$ также расх-ся. (по определению)

4.7

$$\int_1^2 \frac{x^{1/5}-1}{(e^{x^2}-e)^{\alpha}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ \text{особ. в т. } x=1 \end{array} \right|$$

$$f(x) = \frac{x^{1/5}-1}{(e^{x^2}-e)^{\alpha}} = \frac{x^{1/5}-1}{e^{\alpha}(e^{x^2-1}-1)^{\alpha}} \sim \quad e^{x^2-1}-1 \sim x^2-1 \text{ при } x\to 1$$

$$\sim \frac{x^{1/5}-1}{e^{\alpha}(x^2-1)^{\alpha}} = \frac{x^{1/5}-1}{e^{\alpha}(x-1)^{\alpha}\cdot(x+1)^{\alpha}} =$$

$$\text{Замена } \left. \begin{array}{l} x-1=t \\ \text{при } x\to 1,\ t\to 0 \\ x=t+1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{при } x\to 2,\ t\to 1 \\ dx=dt \end{array}$$

$$= \frac{(t+1)^{1/5}-1}{e^{\alpha}\cdot t^{\alpha}\cdot(t+2)^{\alpha}} \sim \frac{1/5\cdot t}{e^{\alpha}\cdot t^{\alpha}(t+2)^{\alpha}} =$$

$$(t+1)^p - 1 \sim pt \text{ при } t\to 0.$$

$$= \frac{1}{5\cdot e^{\alpha}(t+2)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-1}} = g(x)$$

нет особенности =>
не влияет на сходимость

$$\int_0^1 \frac{1}{5e^{\alpha}\cdot(t+2)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-1}}dt = \int_0^1 g(x)\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-1}} = \begin{cases} \text{сх-ся при } \alpha-1 < 1, \\ \text{расх-ся при } \alpha-1 \geq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \text{сх-ся при } \alpha < 2, \\ \text{расх-ся при } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

$\int_0^1 \frac{1}{5e^{\alpha}(t+2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ – также расх-ся при $\alpha \geq 2$ и сх-ся при $\alpha < 2$

$$\int_1^2 \frac{x^{1/5}-1}{(e^{x^2}-e)^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \text{сх-ся при } \alpha < 2, \\ \text{рас-ся при } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

по предельному признаку