

Подготовка к РК №2 по МДУ

1) Составление ОДУ.

1.1 Составить ЛОДУ, зная корни его хар. ур-ния $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=1+3i, \lambda_4=1-3i$. Написать общее решение составленного диф. ур-ния.

Решение: $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = 0$
 $(\lambda - 0)(\lambda - 0)(\lambda - (1+3i))(\lambda - (1-3i)) = 0$
 $\lambda^2 \cdot ((\lambda - 1) - 3i)((\lambda - 1) + 3i) = 0$
 $\lambda^2 \cdot ((\lambda - 1)^2 - (3i)^2) = 0$
 $\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9) = 0$
 $\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 10) = 0$
 $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 10\lambda^2 = 0$

$$y^{(IV)} - 2y''' + 10y'' = 0 \quad \text{ОДУ}$$

$$\text{ФСР ЛОДУ: } = \{ e^{0 \cdot x}, x \cdot e^{0 \cdot x}, e^{1 \cdot x} \cdot \cos 3x, e^{1 \cdot x} \cdot \sin 3x \} = \\ = \{ 1, x, e^x \cos 3x, e^x \sin 3x \}$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 + c_2 x + c_3 e^x \cos 3x + c_4 e^x \sin 3x \quad \text{общее решение}$$

1.2 Составить ЛОДУ, ФСР которого состоит из ф-ций $y_1 = x, y_2 = x^3$. При каких x для этого ур-ния выполнено условие $\exists!$ решения?

Решение:

$$\text{ФСР ЛОДУ: } = \{ x, x^3 \} \Rightarrow y_{\text{оо}} = c_1 x + c_2 x^3$$

$$y' = c_1 + 3c_2 x^2$$

$$y'' = 6c_2 x$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{6x} y''$$

$$y' = c_1 + x \cdot \frac{1}{2} y'' \cdot x^2$$

$$y' = c_1 + \frac{1}{2} x y''$$

$$(c_1 = y' - \frac{1}{2} x y'')$$

Теперь подставляем все эти константы в общее решение:

$$y = x \left(y' - \frac{xy''}{2} \right) + x^3 \cdot \frac{y''}{6x}$$

$$y = xy' - \frac{x^2 y''}{2} + \frac{1}{6} x^2 y''$$

$$6y = 6xy' - 3x^2 y'' + x^2 y''$$

$$6y - 6xy' + 2x^2 y'' = 0$$

$$\boxed{x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0} \quad \text{О.У.}$$

$$x^2 y'' = 3xy' - 3y$$

$$y'' = \frac{3xy' - 3y}{x^2}$$

$$f(x, y, y') = \frac{3xy' - 3y}{x^2} \quad \text{г/б непрерывна}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{x^2} \quad \text{г/б непрерывна}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x} \quad \text{г/б непрерывна}$$

Ф-ции $f(x, y, y')$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны, если

$\boxed{x \neq 0}$. Условие при котором решение $\exists$!

13. Могут ли ф-ции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$ задавать фср некоторого ЛОДУ? Если могут, то составить это уравнение.

Решение:

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} =$$

$$= -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x} \neq 0 \Rightarrow e^x, e^{-2x} \text{ фср} \\ \forall x$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \quad \text{общее решение}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \text{хар. ур-ние}$$

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \text{диф. ур-ние}$$

1.4 Могут ли ф-ции $y_1 = e^x \sin 2x$ и $y_2 = e^x \cos 2x$ задавать фср некоторого ЛДУ? Если могут, то составить это уравнение.

Решение:

$$W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \sin 2x & e^x \cos 2x \\ e^x \sin 2x + 2e^x \sin 2x & e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \sin 2x (e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x) - e^x \cos 2x (e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x) = e^{2x} \sin 2x \cos 2x - 2e^{2x} \sin^2 2x - e^{2x} \cos 2x \sin 2x - 2e^{2x} \cos^2 2x = -2e^{2x} \neq 0 \\ \forall x$$

$$\Rightarrow y_1 = e^x \sin 2x \\ y_2 = e^x \cos 2x \quad \text{фср}$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 e^x \sin 2x + c_2 e^x \cos 2x \quad \text{общее решение}$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$(\lambda - (1+2i))(\lambda - (1-2i)) = 0$$

$$((\lambda - 1) - 2i)((\lambda - 1) + 2i) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \text{хар. ур-ние}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \quad \text{диф. ур-ние}$$

15. Составить ЛМДУ, общее решение которого имеет вид $y = ce^x + \sin x$

Решение: $y' = ce^x + \cos x$

$$ce^x = y' - \cos x$$

$$c = e^{-x} y' - e^{-x} \cos x$$

$$y = ce^x + \sin x \quad \text{решение}$$

$$y = e^x y' \cdot e^{-x} - e^{-x} \cos x \cdot e^x + \sin x$$

$$y = y' - \cos x + \sin x$$

$$y' - y - \cos x + \sin x = 0$$

$$y' - y = \cos x - \sin x \quad \text{ЛМДУ}$$

16. Составить ЛМДУ, общее решение которого имеет вид $y = c \cos x + 1$

Решение: $y' = -c \sin x$

$$c = -\frac{1}{\sin x} y'$$

$$y = C \cdot \cos x + 1$$

$$y = -\frac{\cos x}{\sin x} y' + 1$$

$$\sin x \cdot y = -\cos x \cdot y' + \sin x$$

$$\cos x \cdot y' + \sin x \cdot y = \sin x \quad \text{ММДУ}$$

2) Задача Коши для ОДУ высшего порядка.

2.1. Найти частное решение диф. ур-ния $xy'' + y' + x = 0$, удовлетворяющее нач. условию $y = 0, y' = 0$ при $x = 2$.

Решение:

$$\begin{cases} xy'' + y' + x = 0, \\ y(2) = 0, \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

Задача Коши

отсутствует y

$$xy'' + y' + x = 0$$

н/о н/з замену $\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases}$

$$\left(xy' + \frac{x^2}{2}\right)' = 0$$

$$xy' + \frac{x^2}{2} = C_1, \quad \forall C_1$$

$$y'(2) = 0$$

$$2 \cdot 0 + \frac{4}{2} = C_1 = 2$$

$$xy' + \frac{x^2}{2} = 2$$

$$xy' = 2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y' = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$$

$$dy = 2 \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} x dx$$

$$\int dy = 2 \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$y = 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \forall C_2$$

$$y(2) = 0.$$

$$2 \ln 2 - \frac{1}{4} \cdot 4 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 1 - 2 \ln 2.$$

$$y = 2 \ln|x| - \frac{1}{4} x^2 + 1 - 2 \ln 2 \quad \text{Ответ}$$

2.2) Найти частное решение диф. ур-ния $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y = 1, y' = 1$ при $x = 1$.

Решение:

$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 + 1 = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Задача Коши.

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

$$(yy' + x)' = 0$$

$$yy' + x = C_1, \quad \forall C_1$$

или р/з Замена

$$\begin{cases} y' = p/y \\ y'' = p \cdot p' \end{cases}$$

$$y(1) = 1$$

$$y'(1) = 1$$

$$1 \cdot 1 + 1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$yy' + x = 2$$

$$yy' = 2 - x$$

$$y dy = (2 - x) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = 2 \int dx - \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \forall C_2$$

$$y(1) = 1$$

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} + C_2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -1$$

$$\frac{y^2}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

$$y^2 = 4x - x^2 - 2 \quad \text{Ответ}$$

③ Решение линейного неоднородного диф. ур-ния с постоянными коэф-ми

3.1. Найти общее решение ЛНДУ

$$y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

Решение: $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$

ВДЗ. $\cos x \neq 0$

$$y'' + y = 0$$

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 = -1$$

$$k = \pm i$$

$$\text{ФОРМОУ} := \{ \cos x, \sin x \}$$

$$y_{\text{об}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad \forall C_1, C_2 = \text{const}$$

$$y_{\text{пр}} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \quad C_1(x), C_2(x) - \text{Ф-УНН ОТ } x$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot \sin x \\ \cdot \cos x \end{array} \quad \text{"+"}$$

$$C_2' = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_2 = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + \tilde{C}_2, \quad \forall \tilde{C}_2$$

$$C_1' \cos x = -C_2 \sin x$$

$$C_1' = -C_2 \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$C_1 = - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx =$$

$$= -\tan x + x + \tilde{C}_1$$

$$y_{\text{пр}} = (-\tan x + x + \tilde{C}_1) \cos x + (-\ln|\cos x| + \tilde{C}_2) \sin x$$

Орбем.

3.2 Найти общее решение ОДУ

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$$

Решение: $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$ ЛОДУ

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \text{ ЛОДУ}$$

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \text{ хар. ур.}$$

$$(k+2)^2 = 0$$

$$k_1 = k_2 = -2$$

$$\text{ФСР ЛОДУ: } = \{ e^{-2x}, x e^{-2x} \}$$

$$y_{\text{од}} = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad \forall c_1, c_2 - \text{const.}$$

$$y_{\text{общ}} = c_1(x) e^{-2x} + c_2(x) \cdot x e^{-2x}, \quad c_1(x), c_2(x) - \text{ф-ции от } x$$

$$\begin{cases} c_1' e^{-2x} + c_2' x e^{-2x} = 0, \\ -2c_1' e^{-2x} + c_2' e^{-2x} - 2c_2' x e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ \text{"} \end{array}$$

$$c_2' e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$c_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2 = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \tilde{c}_2 = c_2$$

$$c_1' = -c_2' x = -\frac{1}{x} \cdot x = -1$$

$$c_1 = -\int dx = -x + \tilde{c}_1 = c_1$$

$$y_{\text{ом}} = (-x + \tilde{c}_1) \cdot e^{-2x} + (\ln|x| + \tilde{c}_2) x e^{-2x}$$

4) Составить общее решение ЛДУ с постоянными коэф-ми и правой частью спец. вида

4.1. Указать вид общего решения ДУ (без вычисления коэф-тов.)

$$y^{(IV)} + y'' = x e^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x$$

Решение

$$y^{(IV)} + y'' = x e^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x \quad \text{ЛДУ}$$

$$y^{(IV)} + y'' = 0$$

$$k^4 + k^2 = 0$$

$$k^2(k^2 + 1) = 0$$

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i$$

$$\begin{aligned} \text{ФОР ЛДУ: } &= \{ e^{0 \cdot x}, x \cdot e^{0 \cdot x}, \cos x, \sin x \} = \\ &= \{ 1, x, \cos x, \sin x \} \end{aligned}$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

общее решение
однородного
уравнения

$$f = \underbrace{x e^{-x}}_{f_1} + \underbrace{2 - x}_{f_2} + \underbrace{x \sin x}_{f_3} - \underbrace{e^x \sin x}_{f_4}$$

$$f_1 = x e^{-x} \Rightarrow \Delta = -1, \quad P_n(x) = x \Rightarrow n = 1$$

$$\Delta \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \Rightarrow r = 0$$

$$y_{\text{ch}_1} = (A_1 x + B_1) e^{-x} \cdot x^0 = (A_1 x + B_1) e^{-x}$$

$$f_2 = 2 - x = (2 - x) e^{0 \cdot x} \Rightarrow \alpha = 0, Q_n(x) = 2 - x \Rightarrow n = 1$$

$$\alpha = 0 = k_1 = k_2 \Rightarrow r = 2$$

$$y_{\text{ch}_2} = (A_2 x + B_2) e^{0 \cdot x} \cdot x^2 = (A_2 x + B_2) x^2$$

$$f_3 = x \sin x = x \cdot e^{0 \cdot x} \sin x \Rightarrow \alpha = 0 \pm i$$

$$\pm i = k_3 = k_4 \Rightarrow r = 1, Q_n(x) = x \Rightarrow n = 1$$

$$y_{\text{ch}_3} = \left((A_3 x + B_3) e^{0 \cdot x} \cos x + (A_4 x + B_4) e^{0 \cdot x} \sin x \right) x = \\ = (A_3 x + B_3) x \cdot \cos x + (A_4 x + B_4) x \sin x$$

$$f_4 = -e^x \sin x \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow$$

$$1 \pm i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \Rightarrow r = 0, Q_n(x) = -1 \Rightarrow n = 0$$

$$y_{\text{ch}_4} = (A_5 e^x \sin x + A_6 e^x \cos x) \cdot x^0 =$$

$$= A_5 e^x \sin x + A_6 e^x \cos x$$

$$y_{\text{ch}} = y_{\text{ch}_1} + y_{\text{ch}_2} + y_{\text{ch}_3} + y_{\text{ch}_4} = (A_1 x + B_1) e^{-x} + \\ + (A_2 x + B_2) x^2 + x \left((A_3 x + B_3) \cos x + (A_4 x + B_4) \sin x \right) + \\ + A_5 e^x \sin x + A_6 e^x \cos x$$

$$y_{\text{om}} = y_{\text{oo}} + y_{\text{ch}} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x +$$

$$+ (A_1 x + B_1) e^{-x} + (A_2 x + B_2) x^2 + x (A_3 x + B_3) \cos x + (A_4 x + B_4) \sin x + A_5 e^x \sin x + A_6 e^x \cos x$$

↑ ответ.

4.2. Указать вид общего решения диф. ур-ния (без вычисления констант)

$$y^{(V)} - 5y^{(IV)} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x$$

Решение:

$$y^{(V)} - 5y^{(IV)} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x \quad \text{ЛНД}$$

$$y^{(V)} - 5y^{(IV)} + 4y''' = 0 \quad \text{ЛПД}$$

$$\lambda^5 - 5\lambda^4 + 4\lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_4 = 4$$

$$\lambda_5 = 1$$

$$\text{Фер ЛПД: } = \{ e^{0x}, x \cdot e^{0x}, x^2 \cdot e^{0x}, e^{4x}, e^{1x} \} =$$

$$= \{ 1, x, x^2, e^{4x}, e^x \}$$

$$y_{00} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{4x} + C_5 e^x$$

$$f(x) = \underbrace{2}_{f_1} + \underbrace{xe^{-2x}}_{f_2} + \underbrace{xe^x}_{f_3} - \underbrace{e^{-2x} \cos 3x}_{f_4}$$

$$f_1 = 2 = 2 \cdot e^{0 \cdot x} \Rightarrow \alpha = 0, Q_n(x) = 2 \Rightarrow n = 0$$

$$\alpha = 0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow r = 3$$

$$y_{u1} = A_1 e^{0 \cdot x} \cdot x^3 = A_1 \cdot x^3$$

$$f_2 = x e^{-2x} \Rightarrow \alpha = -2, Q_n(x) = x \Rightarrow n = 1$$

$$\alpha = -2 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \Rightarrow r = 0$$

$$y_{u2} = (A_2 x + B_2) e^{-2x} \cdot x^0 = (A_2 x + B_2) e^{-2x}$$

$$f_3 = x e^x \Rightarrow \alpha = 1, Q_n(x) = x \Rightarrow n = 1$$

$$\alpha = 1 = \lambda_5 \Rightarrow r = 1$$

$$y_{u3} = (A_3 x + B_3) e^x \cdot x$$

$$f_4 = -e^{-2x} \cos 3x \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 3$$

$$-2 \pm 3i \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_5 \Rightarrow r = 0$$

$$Q_n(x) = -1 \Rightarrow n = 0$$

$$y_{u4} = (A_4 e^{-2x} \cos 3x + A_5 e^{-2x} \sin 3x) \cdot x^0 =$$

$$= A_4 e^{-2x} \cos 3x + A_5 e^{-2x} \sin 3x$$

$$y_{uH} = y_{u1} + y_{u2} + y_{u3} + y_{u4} = A_1 x^3 + (A_2 x + B_2) e^{-2x} + (A_3 x + B_3) e^x \cdot x + A_4 e^{-2x} \cos 3x + A_5 e^{-2x} \sin 3x$$

$$y_{OH} = y_{OO} + y_{uH} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{4x} + c_5 e^x + A_1 x^3 + (A_2 x + B_2) \cdot e^{-2x} + (A_3 x + B_3) e^x \cdot x + A_4 e^{-2x} \cos 3x + A_5 e^{-2x} \sin 3x \leftarrow \text{Anschein}$$