№1.

$y = \ln x$, $x_0 = e$

Найдём уравнение касательной к графику.

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ - общее ур-е касательной

$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{e}$; $f(x_0) = 1$

$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 \Rightarrow y = \frac{x}{e}$ - ур-е касательной к ф-ции $y = \ln(x)$

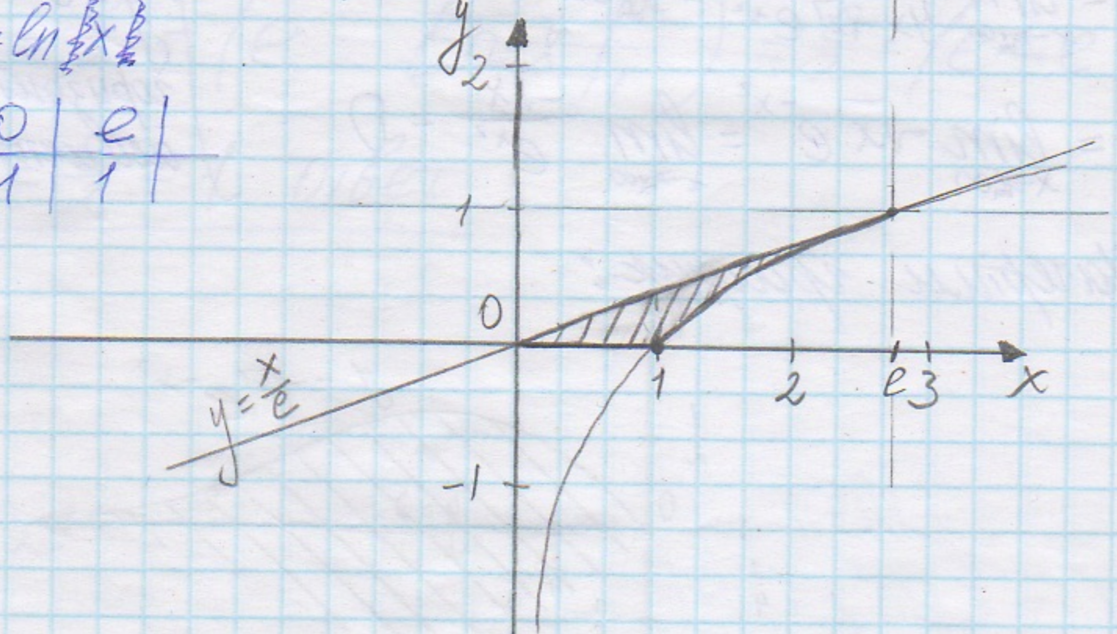
Найдём пересечение $y = \frac{x}{e}$ с ox:

$\frac{x}{e} = 0 \Rightarrow x = 0$

Построим график:

$y = \ln x$

x	0	e
y	1	1



$$\int_0^e \frac{x}{e}dx - \int_1^e \ln x\,dx = \frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{e^2}{2}-0\right) - \left(\frac{1}{e}-1\right) = \frac{e}{2}-\frac{1}{e}+1$$

ответ

№2.

$y=-\sqrt{x}\,e^{-x^2}$

$D(y)=[0;+\infty)$, пересеч. с ox и oy : $(0;0)$

$\lim\limits_{x\to0} -\sqrt{x}\,e^{-x^2}=0$ — вертикальных асимптот нет

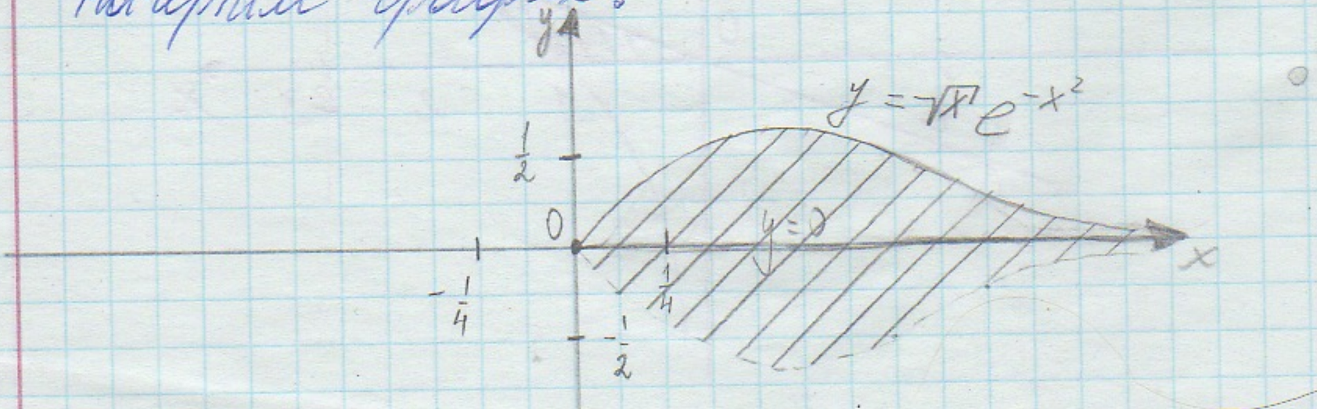
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\sqrt{x}\,e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot e^{+x^2}\cdot 2x} =$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4x\sqrt{x}\,e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\pm\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty} -\sqrt{x}\,e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\sqrt{x}}{e^{x^2}}=0$$

$y=0$ горизонт. асимптота

Начертим график:



$$\pi\int_0^{+\infty}\left(-\sqrt{x}\,e^{-x^2}\right)^2dx = \pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left(-\sqrt{x}\,e^{-x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x^2}d(-2x^2) = -\frac{\pi}{4}\lim_{b\to\infty} e^{-2x^2}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{b\to\infty}(0-1) = \underline{\frac{\pi}{4} \text{ — ответ}}$$

№ 1 (продолжение)

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x\,dx + \int_1^e\left(\frac{x}{e}-\ln x\right)dx = \frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{e}\int_1^e x\,dx - \int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}-0\right) + \frac{1}{e}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right) - \int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - \left(\ln x\cdot x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}x\,dx\right) =$$

$$= \frac{e}{2} - \left(e - \overset{x|_1^e}{\cancel{\ln x\Big|_1^e}}\right) = \frac{e}{2} - (e - e + 1) =$$

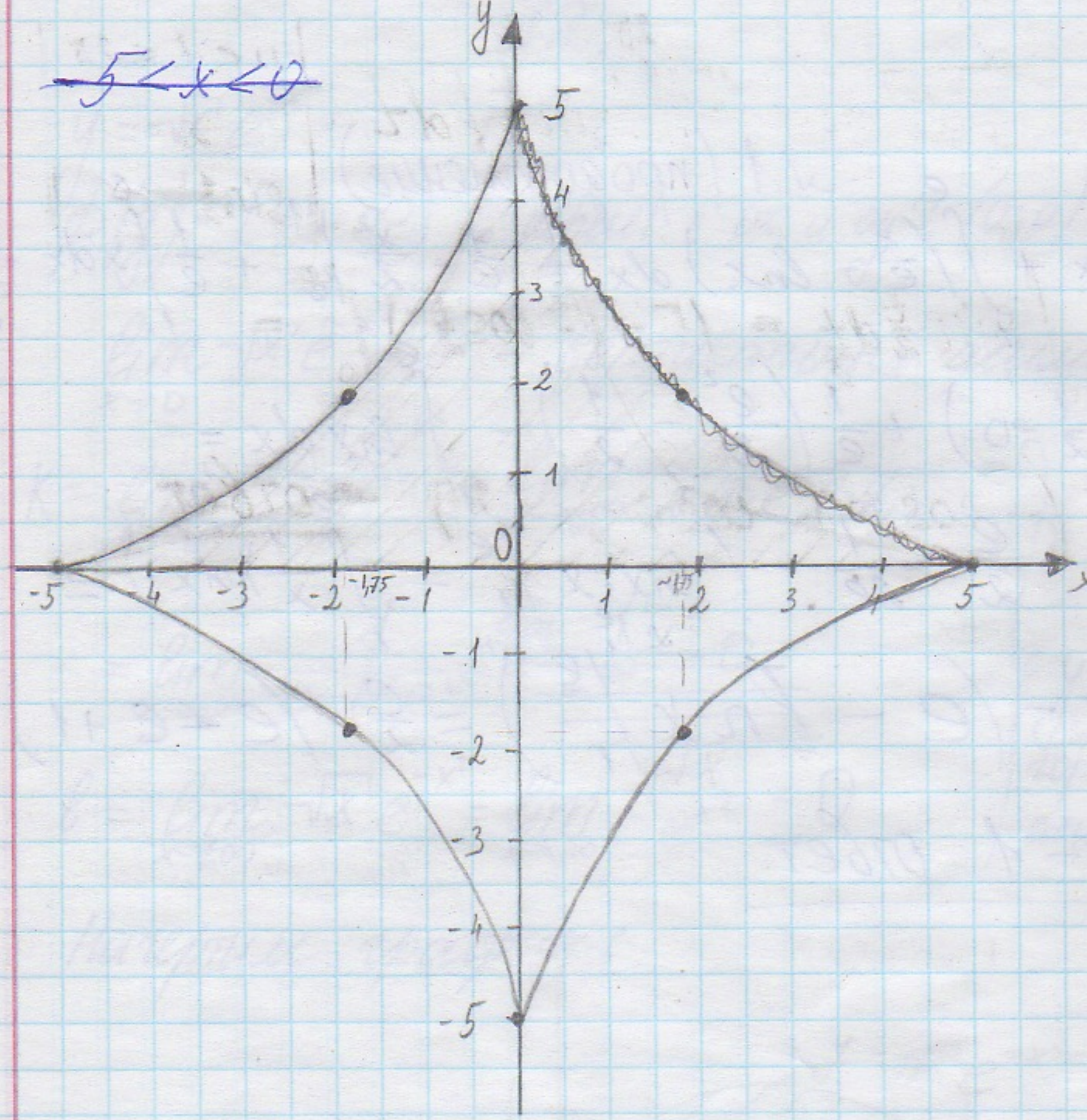
$$= \underline{\frac{e}{2} - 1 \text{ ответ}}$$

№3.

$$\begin{cases} x = 5\cos^3\frac{t}{4} \\ y = 5\sin^3\frac{t}{4} \end{cases}$$

t	0	2π	-2π	4π	π	$-\pi$
x	5	0	0	-5	$\frac{5\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{8}$	$\frac{5\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{8}$
y	0	5	-5	0	$\frac{5\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{8}$	$-\frac{5\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{8}$

~~$-5 < x < 0$~~



$$\begin{cases} x'_t = -\frac{15}{4}\cos^2\frac{t}{4}\cdot\sin\frac{t}{4} \\ y'_t = \frac{15}{4}\sin^2\frac{t}{4}\cdot\cos\frac{t}{4} \end{cases}$$

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = \frac{15}{4} \sin\frac{t}{4} \cos\frac{t}{4} \left(\sin\frac{t}{4} - \cos\frac{t}{4}\right) =$$

$$= \left(-\frac{15}{4}\right)^2 \cos^4\frac{t}{4} \sin^2\frac{t}{4} + \left(\frac{15}{4}\right)^2 \sin^4\frac{t}{4} \cos^2\frac{t}{4} =$$

$$= \frac{225}{16} \cos^2\frac{t}{4} \sin^2\frac{t}{4} \left(\cos^2\frac{t}{4} + \sin^2\frac{t}{4}\right) = \frac{225}{64} \sin^2\frac{t}{2}$$

$$4\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{225}{64}\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = \frac{15}{8} \cdot 4 \int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = \left| \begin{matrix} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le \frac{t}{2} \le \pi \\ \sin\frac{t}{2} \ge 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 15 \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\frac{t}{2} = 15\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 15(-\cos\pi + \cos 0) =$$

$= 30$ ответ

№4.

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 1-го рода} \\ x \in [0; +\infty) \end{array} \right|$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x} \leq \frac{x}{e^x} = g(x)$$

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{e^x} dx = \lim_{b\to\infty} - \int_0^b x d(e^{-x}) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{x}{e^x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-x} dx \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{x}{e^x}\Big|_0^b - e^{-x}\Big|_0^b \right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\left(\frac{\infty}{\infty}^{\text{неопр.}} - 0\right) - \left(\frac{1}{\infty}^{\to 0} - \frac{1}{1}\right)\right) = \left| \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right) = 0 \right| =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(0 - \frac{1}{\infty} + 1\right) = 1 \text{ сходится}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} dx \text{ — сходится по нер-ву.}$$

№5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ \text{особ. } x = 0 \end{array} \right|$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} \text{ Интеграл Дирихле } \alpha = \tfrac{1}{2} < 1 \text{ сходится}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} \text{ сходится по предельному признак}$$