Барышева Алина
ИУ1-21
Вариант №3.

КР №2.

№1.

$$(x+y)dx+(y-x)dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{2}}$$ - однородное ур-е

$$u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u'x+u \Rightarrow \frac{1+u}{1-u}$$

$$u'x=\frac{1+u}{1-u}-u$$

$$u'x=\frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{x(1-u)}$$

$$\int\frac{(1-u)}{1+u^2}du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{u(du)}{1+u^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg}(u)-\frac{1}{2}\ln|1+u^2|=\ln|x|+C,\ \forall C$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|=\ln|x|+C_1$$

$x=0$ не явл. пот. реш.

$y=x$ $\quad 2x\,dx+(x-x)dx=0$ не явл. пот. реш.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|=\ln|x|+C,\ \forall C$

№ 2.

$x e^x y' = x^3 + 2ye^x$ $\quad x \neq 0$

$y' - 2\frac{1}{x} y = x^2 e^{-x}$ – ЛНДУ

Метод Лагранжа:

① $y' - 2\frac{1}{x}y = 0$ ЛОДУ

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ $\quad y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x^2| + C, \forall C$

$|y| = |x^2| \cdot C_1, \forall C_1 > 0$

$y = \pm x^2 \cdot C_1$

$y = x^2 C_2, \forall C_2 \neq 0$

$y = x^2 C_3, \forall C_3$

$y_{oo} = x^2 C_3, \forall C_3$ общ. решение ЛОДУ

② $y_{oн} = x^2 C_3(x)$ – общ. реш. ЛНДУ

$y_{oн} \to$ ЛНДУ:

$(x^2 C_3)' - 2\frac{1}{x}(x^2 C_3) = x^2 e^{-x}$

$\cancel{2xC_3} + x^2 C_3' \cancel{- 2xC_3} = x^2 e^{-x}$

$C_3' = e^{-x} \Rightarrow C_3 = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + \tilde{C}, \forall \tilde{C}$

Ответ: $y_{oн} = (-e^{-x} + \tilde{C}) x^2, \forall \tilde{C}$

№ 3.

$(y\ln x - 2)y\,dx = x\,dy$, $y(1)=4$ Задача Коши

$y^2\ln x - 2y = xy'$

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$ – ур-е Бернулли

$m = 2$

$z = y^{1-m} = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$

$dy = d\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}dz$

$$\frac{-z^{-2}dz}{dx} + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z} = \frac{\ln x}{xz^2}$$

$$\frac{-dz}{z^2dx} = \frac{\ln x - 2z}{xz^2}$$

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{\ln x - 2z}{x}$$

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{\ln x}{x} - \frac{2z}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{\ln x}{x}$$ – ЛНДУ

Метод Лагранжа:

1) $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = 0$ ЛОДУ $z \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}$$

$\ln|z| = \ln|x^2| + C$, $\forall C$

$|z| = |x^2|\cdot C_1$, $\forall C_1 > 0$

$Z = \pm x^{-2} C_1, \cancel{\forall C_1}$

$Z = x^{-2} C_2, \forall C_2 \neq 0$

$Z = x^{+2} C_3, \forall C_3$

$Z_{оо} = x^{+2} C_3, \forall C_3$

② $Z_{он} = x^{+2} C_3(x)$ – общ. реш. ЛНДУ

$Z_{он} \to$ ЛНДУ

$(x^{+2} C_3)' - \frac{2}{x}(x^{+2} C_3) = \frac{\ln x}{x}$

$\cancel{2xC_3} + x^{-2} C_3' - \cancel{2xC_3} = \frac{\ln x}{x}$

$x^{-2} C_3' = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow C_3' = \frac{\ln x}{x^3}$

$C_3 = \int \frac{\ln x\, dx}{x^3} = \ln x \cdot \left(\frac{-1}{2x^2}\right) - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}, \forall \tilde{C}$

$Z_{он} = \left(-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}\right) x^2 = -\frac{1}{2}\left(\ln x + \frac{1}{2} - \tilde{C}\right) = y_{он}^{-1}$

$\cancel{y_{он}^{-1} = -2\left(\frac{1}{\ln x}\right.}$ $y = 0$ явл. пот. решением

Нач. усл.: $y(1) = 4$ (при $x = 1$ $y = 4$)

$\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\left(\ln 1 + \frac{1}{2} - \tilde{C}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \tilde{C} \Rightarrow \tilde{C} = \frac{1}{2}$ реш. задачи Коши

$y_{чн}^{-1} = -\frac{1}{2}\left(\ln x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln x}{2} + \frac{1}{2}$

№4.

$\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$, $y(0)=0$ Задача Коши

$\sqrt{4+y^2}\,dx = y(x^2+1)dy$ ур-е с разд. пер-ными

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{4+y^2}} = \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$\int dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ при $t = \sqrt{4+y^2}$

$\sqrt{4+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$. решение (общее)

Нач. усл.: $y(0)=0$ (при $x=0$ $y=0$)

$\sqrt{4} = C \Rightarrow C=2$ решение задачи Коши

$\sqrt{4+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + 2$ ответ.