

Рк №2.
Задача.
(№1.)

Задача Арина
УЧ-21
Вариант №3
Му БУ

$$y = Ce^{-x} + e^x$$

$$C = \frac{y - e^x}{e^{-x}}$$

$$0 = \frac{(y' - e^x)e^{-x} + (y - e^x)e^{-x}}{e^{-2x}}$$

$$(y' - e^x) + (y - e^x) = 0$$

$$y' + y - 2e^x = 0$$

$$y' = 2e^x - y \quad \text{— ответ}$$

(№2.)

$$yy'' - y'(1 + y') = 0 \quad y=1, y'=1 \text{ при } x=0$$

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = pp' \end{cases}$$

$$ypp - p(1+p) = 0$$

подставим y и y' в (1):

$$yp' - 1 - p = 0$$

$$1 = C_1 - 1 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$yp' = 1 + p$$

подставим x и y в (2):

$$\frac{dp}{1+p} = \frac{dy}{y}$$

$$0 = \frac{1}{2} \ln 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\ln(1+p) = \ln(C_1 y)$$

$$1+p = C_1 y \Rightarrow 1+y' = C_1 y = y' = C_1 y - 1 \quad (1), \forall C_1$$

$$\frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln |2y - 1| + C_2, \forall C_2 \quad (2)$$

$$x = \frac{1}{2} \ln |2y - 1| \quad \text{— ответ}$$

(N3)

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$k^2 + 1 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{-характ. yp-e} \\ k_{1,2} = \pm i \end{array} \right\} \Rightarrow y_{00} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$k_{1,2} = \pm i$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos^3 x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2\cos^2 x} + C_3$$

$$C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\cos^3 x} \Rightarrow C_2 = \operatorname{tg} x + C_4$$

$$y_{00} = \cos x \left(C_3 - \frac{1}{2\cos^2 x} \right) + \sin x (\operatorname{tg} x + C_4)$$

(N4)

$$y^{IV} + y''' = 1 - x + x e^{-x} + x \cos x - 2 \sin x$$

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = 0 \quad \text{характ. yp-e}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \quad k_4 = -1$$

$$y_{00} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x}$$

$$p(x) = 1 - x, \quad d = 0, \beta = 0, \quad d \pm i\beta = 0, \quad r = 3, \quad t = 1$$

$$y_1(x) = x^3 / (A_1 x + A_2)$$

$$p_2(x) = x e^{-x}, \quad d = -1, \beta = 0, \quad d \pm i\beta = -1, \quad r = 1, \quad t = 0$$

$$y_2(x) = x e^{-x} / (A_3 x + A_4)$$

$$p_3(x) = x \cos x \text{ and } \sin x, \quad d = 0, \beta = \pm 1, \quad d \pm i\beta = \pm i, \quad r = 0, \quad t = 1$$

$$y_3(x) = \cos x / (A_5 x + A_6) + \sin x / (A_7 x + A_8)$$

$$y_{\text{gen}} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + x^3 / (A_1 x + A_2) + x e^{-x} / (A_3 x + A_4) + \cos x / (A_5 x + A_6) + \sin x / (A_7 x + A_8) \quad \underline{\text{other}}$$

Теорема.

№1.

Для ОДУ вида $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$, где x — независимая переменная, y — неизвестная функция, $y', \dots, y^n$ — производные соотв. порядков, решением называется функция $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$, заданная на некоторой области D $(n+1)$ -мерного пространства переменных $x, C_1, \dots, C_n$. Условие: при любых фиксированных C , для которых существует хотя бы один интервал такой, что точка $(x, C_1, \dots, C_n)$ лежит в области D , данная функция является решением данного уравнения на любом таком интервале.

№2.

Пусть $y_1, \dots, y_n$ — ФСР однородного уравнения $L[y] = 0$. Тогда частное решение неоднород. уравнения $L[y] = b(x)$ можно записать в виде $y(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$, где функции $C_1(x) \dots C_n(x)$ определяются системой:

$$C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0$$

$$C_1 y_1^{(n-2)} + \dots + C_n y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} = b(x)$$

, т.к. определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то}$$

из этой системы ~~следует~~ $C_1' \dots C_n'$ опр.
однозначно, а сами функции $C_1 \dots C_n$ — с
точностью до произвольных постоянных. Если
в (1) подставить именно эти ф-ции, то
получаем частное решение днр. ур-ния.
Докажем последнее утверждение для $n=2$.

Уравнение в этом случае имеет вид $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$, где a_1, a_2, b — непрерывные на
некотором промежутке ф-ции. Частное
решение данного ур-я ищем в виде

$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1, y_2 — ФРР однород.

ур-я. $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, а $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$ —
подпеш. опр. функции. Предположим, что они
удовл. системе:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = b(x) \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} y'(x) = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2' = \\ = C_1 y_1' + C_2 y_2' \\ y''(x) = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + \\ + C_2 y_2'' = b(x) + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \\ + a_1(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = b(x) + C_1 (y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) +$$

$$+ a_2(x)y_1) + C_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) = b(x), \text{ t.e.}$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \text{ req.}$$