РК2 ИЧДУ

Корсаков Макар
ИУ1-21

вариант 7

Теория

№1

Фундаментальной системой решений ЛОДУ ~~n-го порядка~~ называется базис решений этого уравнения. Если $y_1(x) \ldots y_n(x)$ – ФСР ЛОДУ, то общее решение можно записать в виде $y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, где C – произвольные константы

№2

1) Теорема 1 (о линейности пространства частных решений):

Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка:
$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) y = 0$ с непрерывными функциями $p_1(x), p_2(x) \ldots p_n(x)$ на $[a; b]$ образует линейное пространство.

Док-во:

Пусть y_1, y_2 – 2 частных решения, следовательно при подстановке в ДУ имеют тождества:

$L[y_1] = 0$ и $L[y_2] = 0$ ($L[y]$ – диф. оператор)

1) Рассмотрим $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0$

2) $L[C, y] = C \cdot L[y] = C \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ оба свойства линейного диффер. оператора выполняются, значит частные решения образуют лин. пространство

ч.т.д.

2) Теорема 2 (свойство 2)
Если $y_1, y_2 \dots y_n$ - частные решения ЛОДУ
вида $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cancel{p_2(x) y^{(n-2)}}\ p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_n(x) y = 0$,
то их линейная комбинация $C_1 \cdot y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$
также является решением ЛОДУ.
Док-во:
Пусть $y_1 \dots y_n$ - частные решения. Тогда рассмотрим
$L[C_1 y_1 + \dots + C_n y_n] = C_1 L[y_1] + \dots + C_n L[y_n] = 0 + 0 + \dots 0 = 0$
мн, к значит, лин. комбинация - решение ЛОДУ.
ч.т.д.

Задачи
№1.

$\lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i,\ \lambda_3 = 1$

$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0;\ (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)(\lambda - 1) = 0$,
$\cancel{(\lambda^2 - 2i}\ (\lambda^2 - 4i^2)(\lambda - 1) = 0;\ (\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$
$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$ - характер. уравнение
$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ - ЛОДУ III порядка
$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$
$\lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow y_1 = \cos 2x;\ y_2 = \sin 2x$
$\lambda_3 = 1 \Rightarrow y_3 = e^{\lambda_3 x} = e^x$

Ответ: $y_{oo} = C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cdot e^x$

№2

$y \cdot y'' + (y')^2 = 2y^2 \cdot (y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

Нет явного x, значит допускается понижение порядка

$y' = p$; $p = p(y) = p(y(x))$

$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'$

$y \cdot p \cdot p' + p^2 = 2y^2 \cdot p^2 \mid : p \neq 0$

Проверка: $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = const$, $y \cdot 0 + 0 = 2 \cdot y \cdot 0$;

$0 = 0 \Rightarrow$ решение

$y \cdot p' + p(1 - 2y^2) = 0 \mid : y \neq 0$ (уже учтено)

$\frac{dp}{dy} = \frac{2y^2 - 1}{y} \cdot p \mid : p$

$\int \frac{dp}{p} = \int (2y - \frac{1}{y}) dy$, $\ln p = y^2 - \ln y + \underbrace{C_0}_{\ln C_1}$

$\left. \begin{array}{l} p = e^{y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot C_1 \\ p = y' \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = e^1 \cdot \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{e}$

$y' = e^{y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{e}$, $\frac{dy}{dx} = e^{y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{e}$, $e \int \frac{y\,dy}{e^{y^2}} = \int dx$;

$-\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{e^{y^2}} + C_2 = x$, $-\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{e^{y^2}} = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$

Значит, $\cancel{-\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{e^{y^2}}}$ $-\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{e^{y^2}} + \frac{1}{2} = x$ - частный интеграл исходного ДУ.

Ответ: $-\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{e^{y^2}} + \frac{1}{2} = x$.

№3

$y'' + y = ctg\,x$

1) Характер. уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$

$y_{oo} = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$

2) $y_{op} = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x$ (1)

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x) \end{cases}$$

$C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$$+\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0 \quad | \cdot \sin x \\ -C_1'(x) \cdot \sin x + C_2'(x) \cdot \cos x = ctg\,x \quad | \cdot \cos x \end{cases}$$

$C_2'(x) \cdot \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = ctg\,x \cdot \cos x$

$C_2'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$, $C_2'(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}$, $C_2(x) = \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) dx$

$C_2(x) = \ln|tg\frac{x}{2}| + \cos x + \widetilde{C_2}$

$C_1'(x) = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$, $C_1'(x) = -\cos x$

$C_1(x) = -\int \cos x\, dx$; $C_1(x) = -\sin x + \widetilde{C_1}$

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (1)

$y_{op} = (-\sin x + \widetilde{C_1}) \cdot \cos x + (\ln|tg\frac{x}{2}| + \cos x + \widetilde{C_2}) \cdot \sin x$

Ответ: $y_{op} = \underbrace{\widetilde{C_1} \cdot \cos x + \widetilde{C_2} \cdot \sin x}_{y_{oo}} + \underbrace{\ln|tg\frac{x}{2}| \cdot \sin x}_{y_{ч.р.}}$

№4

$y^{V} - 8y''' + 16y' = x \cdot \sin 2x + \cos 2x + 4x + e^{-2x}$

1) характер. ур:

$\lambda^5 - 8\lambda^3 + 16\lambda = 0$; $\lambda(\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16) = 0$, $\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2 = 0$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow y_1 = e^0 = 1$

$\lambda_{2,3} = 2 \Rightarrow y_2 = e^{2x}$, $y_3 = x e^{2x}$, $\lambda_{4,5} = -2 \Rightarrow y_4 = e^{-2x}$, $y_5 = x \cdot e^{-2x}$

$y_{oo} = C_1 + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot x e^{2x} + C_4 e^{-2x} + C_5 \cdot x e^{-2x}$

2) Неоднородные

$f(x) = \underbrace{x \cdot \sin 2x + \cos 2x}_{f_1(x)} + \underbrace{4x}_{f_2(x)} + \underbrace{e^{-2x}}_{f_3(x)}$

$f_1(x) = x \cdot \sin 2x + \cos 2x$; $\alpha = 0$, $\beta = 2 \Rightarrow L = \pm 2i$ - не совпадает с λ

$\underline{y_{r1} = (A_1 x + B_1)\sin 2x + (P_1 x + E_1) \cdot \cos 2x}$

$f_2(x) = 4x$, $\alpha = 0$; $\beta = 0 \Rightarrow L = 0$ - совпадает с $\lambda_1 = 0$ кратности 1

$\underline{y_{r2} = x[A_2 x + B_2]}$

$f_3(x) = e^{-2x}$, $\alpha = -2$; $\beta = 0 \Rightarrow L = -2$ - совпадает с $\lambda_{4,5}$ кратности 2

$\underline{y_{r3} = [A_3 \cdot e^{-2x}] \cdot x^2}$

$y_{op} = y_{oo} + y_{r1} + y_{r2} + y_{r3}$

Ответ: $y_{op} = y_{oo} + y_{r1} + y_{r2} + y_{r3}$

Kroyter