ДЗ2 ИиДУ

Корсаков Макар ИУ1-21

вариант 7

№1

$yy'' - 2(y')^2 = y^3 y'$, $y(0)=2$, $y'(0)=8$

$y' = p(y)$; $y'' = p \cdot p'$

$y\, p \cdot p' - 2p^2 = y^3 p$; $p\,(p'y - 2p) = y^3 p$

$p = 0$ не подходит, т.к $y'(0)=8$ - по условию

$p'y - 2p = y^3$

ЛОДУ: $p'y - 2p = 0$, ДУ с раздел. переменными:

$\frac{dp}{dy} = \frac{2p}{y}$; $\frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y}$; $\ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C|$,

$p = Cy^2$

Метод вариации постоянной: ~~$p=C$~~ $p = C(y)y^2$

$p' = C'(y)y^2 + 2yC(y)$, $(C'(y)y^2 + 2yC(y))\cdot y - 2C(y)y^2 = y^3$

$C'(y)y^3 = y^3$; $C'(y) = 1$; $\frac{dC(y)}{dy} = 1$; $dC(y) = dy$;

$C(y) = y + C_2$; $p = y' = (y + C_2)\,y^2$

$y'(0) = (y(0) + C_2)\,y(0)^2 = 4(2 + C_2) = 8$; $2 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 0$

$y' = (y+0)y^2 = y^3$; $\frac{dy}{dx} = y^3$; $\int \frac{dy}{y^3} = \int dx$

$-\frac{1}{2y^2} = x + C_3$, $y(0)=2 \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{2y^2} = x - \frac{1}{8}$

$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2(\frac{1}{8} - x)}} = \pm\frac{2}{\sqrt{1-8x}}$

Ответ: $y = \pm\frac{2}{\sqrt{1-8x}}$

№2

$$y'' + 2\sqrt{1-\left(\frac{y'}{x}\right)^2}\cdot \arccos\frac{y'}{x} = \frac{y'}{x}$$

$y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$

$$p' + 2\sqrt{1-\left(\frac{p}{x}\right)^2}\cdot \arccos\frac{p}{x} = \frac{p}{x}$$

$$p' = \frac{p}{x} - 2\sqrt{1-\left(\frac{p}{x}\right)^2}\cdot \arccos\frac{p}{x}$$

ДУ однородное, относительно $\frac{p}{x}$

$u = \frac{p}{x}$; $p = ux$; $p' = u'x + u$

$u'x + u = u - 2\sqrt{1-u^2}\cdot\arccos(u)$; $\frac{du}{dx}x = -2\sqrt{1-u^2}\cdot\arccos(u)$

$$\frac{du}{-2\sqrt{1-u^2}\cdot\arccos(u)} = \frac{dx}{x}, \ -\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}\cdot\arccos(u)} = 2\int\frac{dx}{x},$$

$\ln|\arccos(u)| = 2\ln|x| + \ln|C_1| = \ln|C_1x^2|$

$\arccos(u) = C_1x^2$; $u = \cos(C_1x^2)$, $0 \le C_1x^2 \le \pi$

$y' = p = ux = x\cdot\cos(C_1x^2)$

$$y = \int x\cdot\cos(C_1x^2)\,dx = \frac{1}{2C_1}\int\cos(C_1x^2)\,dx^2 = \frac{1}{2C_1}\sin(C_1x^2) + C_2$$

Ответ: $y = \frac{1}{2C_1}\sin(C_1x^2) + C_2$

№3

$$y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 1 + xe^{-x}\sin x + x^3 + x^2\cos x + e^{-4x}$$

Характер. уравнение: $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$; $\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0$; $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$

1) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = x^3 + 1$

$\alpha + \beta i = 0$; $r = 2$; $y_{ч.н.1} = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + Dx + 1)$

2) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = x^2 \cos x$

$\alpha + \beta i = i$, $r = 0$; $y_{ч.н.2} = (Ex^2 + Fx + G)\sin x +$

$+ (Hx^2 + Ix + K)\cos x$

3) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = e^{-4x}$

~~$\alpha + \beta i = -1 - i$; $r = 1$; $y_{ч.н.}$~~

$\alpha + \beta i = -4$; $r = 0$; $y_{ч.н.3} = Le^{-4x}$

4) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = xe^{-x}\sin x$

$\alpha + \beta i = -1 - i$; $r = 1$

$y_{ч.н.4} = xe^{-x}((Mx + N)\cos x + (Px + R)\sin x))$

Ответ: $y_{oo} = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$

$y_{ч.н.} = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + Dx + 1) + (Ex^2 + Fx + G)\sin x +$

$+ (Hx^2 + Ix + K)\cos x + Le^{-4x} + xe^{-x}((Mx + N)\cos x + (Rx + R)\sin x))$

N4

$y'' - 4y' + 3y = 5 - 6x - 10e^x$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$

Характер. уравнение : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$

$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, $y_{он} = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{3x}$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{3x} = 0 \\ C_1'(x) e^x + 3C_2'(x) e^{3x} = 5 - 6x - 10e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2'(x) = -C_1'(x)e^{-2x} \\ C_1'(x)e^{x} - 3C_1'(x)e^{x} = 5-6x-10e^{x} \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{5-6x-10e^{x}}{-2e^{x}} = -2{,}5e^{-x} + 3xe^{-x} + 5$$

$$C_1(x) = \int(-2{,}5e^{-x} + 3xe^{-x} + 5)\,dx = 2{,}5e^{-x} + 5x + \int 3xe^{-x}dx =$$

$$= 2{,}5e^{-x} + 5x - \int 3x\,de^{-x} = 2{,}5e^{-x} + 5x - (3xe^{-x} - 3\int e^{-x}dx) =$$

$$= 2{,}5e^{-x} + 5x - 3xe^{-x} - 3e^{-x} + C_1 = -3xe^{-x} - 0{,}5e^{-x} + 5x + C_1$$

$$C_2'(x) = 2{,}5e^{-3x} - 3xe^{-3x} - 5e^{-2x}$$

$$C_2(x) = \int(2{,}5e^{-3x} - 3xe^{-3x} - 5e^{-2x})\,dx = -\frac{2{,}5}{3}e^{-3x} +$$

$$+ \frac{5}{2}e^{-2x} - \int 3xe^{-3x}dx = -\frac{2{,}5}{3}e^{-3x} + \frac{5}{2}e^{-2x} + \int x\,de^{-3x} =$$

$$= -\frac{2{,}5}{3}e^{-3x} + \frac{5}{2}e^{-2x} + (xe^{-3x} - \int e^{-3x}dx) = -\frac{2{,}5}{3}e^{-3x} + \frac{5}{2}e^{-2x} +$$

$$+ xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + C_2 = -0{,}5e^{-3x} + xe^{-3x} + 2{,}5e^{-2x} + C_2$$

$$y_{\text{он}} = (-3xe^{-x} - 0{,}5e^{-x} + 5x + C_1)e^{x} + (-0{,}5e^{-3x} + xe^{-3x} + 2{,}5e^{-2x} +$$

$$+ C_2)e^{3x} = -3x - 0{,}5 + 5xe^{x} + C_1e^{x} - 0{,}5 + x + 2{,}5e^{x} + C_2e^{3x} =$$

$$= -2x - 1 + 5xe^{x} + 2{,}5e^{x} + C_1e^{x} + C_2e^{3x}$$

$$y' = -2 + 5e^{x} + 5xe^{x} + 2{,}5e^{x} + C_1e^{x} + 3C_2e^{3x} = -2 + 7{,}5e^{x} + 5xe^{x} +$$

$$+ C_1e^{x} + 3C_2e^{3x}$$

$$y(0) = -1 + 2{,}5 + C_1 + C_2 = 1{,}5 + C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = -2 + 7{,}5 + C_1 + 3C_2 = 5{,}5 + C_1 + 3C_2 = 3$$

$$\begin{cases} C_1 = -0{,}5 - C_2 \\ 5{,}5 - 0{,}5 - C_2 - 3C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -1 \\ C_1 = 0{,}5 \end{cases}$$

$y = -2x - 1 + 5xe^x + 2{,}5e^x + 0{,}5e^x - e^{3x} = -2x - 1 + 5xe^x + 3e^x - e^{3x}$

Ответ: $y = -2x - 1 + 5xe^x + 3e^x - e^{3x}$.