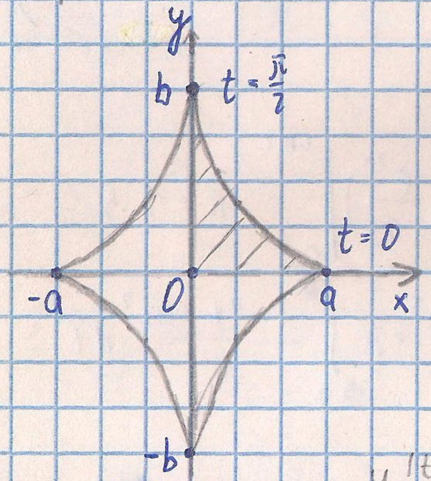
№1 Найти площадь фигуры, ограниченную кривой

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos^3 t \\ y = b\cdot\sin^3 t \end{cases}$$

астроида

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{4}$
x	a	0	$-a$	0	a	$-\frac{a\sqrt{2}}{4}$
y	0	b	0	$-b$	0	$\frac{b\sqrt{2}}{4}$



$$x'(t) = 3a\cdot\cos^2(t)\cdot(-\sin t)$$

Т.к. фигура симетрична по осям O_x и O_y, то достаточно посчитать площадь одной её четверти, после чего домножить её на четыре

$$S = 4\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \overbrace{b\cdot \cancel{\cos}\,\sin^3 t}^{=y(t)}\cdot\overbrace{3a\cdot\cos^2 t\cdot(-\sin t)}^{x'(t)}\,dt = 12ab\times$$

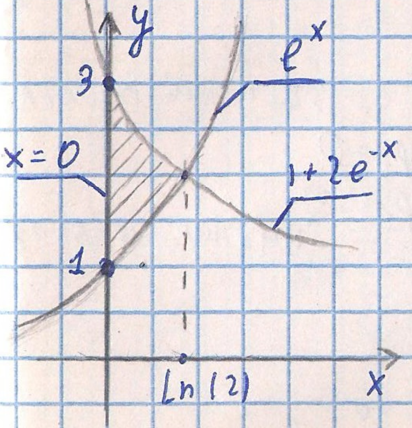
$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt = 12ab\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)\,dt = \frac{3}{2}ab\left(\overbrace{t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=\frac{\pi}{2}}-\right.$$

$$\left.-\overbrace{\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=0}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(2t)}{2}\,dt\right) = \frac{3}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\overbrace{\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=\frac{\pi}{4}}-\right.$$

$$\left.-\overbrace{\frac{1}{8}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=0}+\overbrace{\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{=0}\right) = \frac{3}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi ab}{8}$$

№2 Фигура, ограниченная линиями: $x = 0$, $y = e^x$, $y = 1 + 2e^{-x}$ вращается вокруг оси Ox. Вычислить объём тела вращения



$$e^x = 1 + 2e^{-x}$$

$$e^x - 1 - \frac{2}{e^x} = 0 \quad \Big| \; t = e^x > 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

неудовл

$$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \rightarrow e^x = 2 \rightarrow x = \ln(2) \end{array}\right.$$

т. пересечения

$$V = V_{бол} - V_{мен}$$

$$V_{мен} = \pi \int_0^{\ln(2)} (e^x)^2 dx = \pi \int_0^{\ln(2)} e^x \, de^x = \pi \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \pi \cdot 1.5$$

$$V_{бол} = \pi \int_0^{\ln(2)} (1 + 2e^{-x})^2 dx = \left| \begin{array}{l} e^{-\ln 2} = 0.5 \; ; \; e^0 = 1 \\ t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x} dx \end{array} \right| = \pi \int_{0.5}^{1} \frac{1 + 4t + 4t^2}{t} dt =$$

$$= \pi \cdot (\ln|t| + 4t + 2t^2)\Big|_{0,5}^{1} = \pi (4 \cancel{+2} - \ln 0,5 \cancel{-2} - 0,5) = (3,5 - \ln 0,5) \cdot \pi$$

$$V = \pi (3.5 - \ln 0,5 - 1,5) = \pi (2 - \ln 0.5)$$

№3 Найти длину спирали $\rho = e^{a\varphi}$, находящейся внутри круга $\rho = 1$

$$l = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi$$

$$\varphi = \frac{1}{a} \cdot \ln(r)$$

$r = 1 \Rightarrow \varphi_1 = 0$, верхний предел

$r \to 0 \Rightarrow \varphi_2 = -\infty$, нижний предел

$$\rho^2 = e^{2a\varphi}$$

$$(\rho')^2 = a^2 \cdot e^{2a\varphi}$$

$$l = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{e^{2a\varphi} + a^2 \cdot e^{2a\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{1+a^2} \cdot \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{0} e^{a\varphi}\, d(a\varphi) =$$

$$= \sqrt{1+a^2}\, \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \to -\infty} (e^{a\varphi})\Big|_x^0 = \sqrt{1+a^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot (1-0) =$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

№4 Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^5+5x+2}}\,dx \boxed{=}$

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^5+5x+2}}$$

$\boxed{=}$ несоб. инт. 1ого рода; $x \in [1; +\infty)$; $\cos 2x$ - знакоперем. ф-я

$$|f(x)| = \left|\frac{\cos 2x}{\sqrt{x^5+5x+2}}\right| = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{x^5+5x+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^5+5x+2}} = g(x)$$

Исследую $g(x)$ на сходимость на $[1; +\infty)$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^5+5x+2}} \underset{\text{при } x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{5/2}} = g_2(x)$$

$$\int_1^{+\infty} g_2(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$$ – Интеграл Дирихле, при $\alpha = 5/2 > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} g_2(x)\,dx \text{ - сходится}$$

Т.к. $g_2(x)$ - сходится $\Rightarrow$ по 3-му инструменту $g(x)$ - сход. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по 4-ому инструменту $f(x)$ - сходится

№5 Исследовать на сходимость: $\int_1^3 \frac{x^5+3x+1}{\sqrt[5]{(x^3-1)^2}}dx = \left| \begin{matrix} \text{нес. инт 2ого} \\ \text{рода; } x\in[1;3] \end{matrix} \right|$

$$f(x) = \frac{x^5+3x+1}{(x^3-1)^{2/5}}$$

$$g(x) = (x-1)^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{(x-1)^{5/2}} ; \int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{5/2}}$$ / расходится т.к. $\alpha = \frac{5}{2} > 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^5+3x+1}{(x^3-1)^{2/5}}}{(x-1)^{2/5}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^5+3x+1}{\cancel{(x-1)^{2/5}}\cdot(x^2+x+1)^{2/5}}}{\cancel{(x-1)^{2/5}}} = \frac{5}{3^{2/5}} = const \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. $g(x)$ - расходится, то и $f(x)$ - расходится по предельному признаку (3-й инструмент)