№1

$$xy'' = x\cdot\sin\frac{2y'}{x} + y' \quad ; \quad y(1) = \pi/8 \ ; \ y'(1) = \pi/4$$

Замена: $\begin{cases} p(x) = y'(x) \\ p'(x) = y''(x) \end{cases}$ ОВЗ $x \neq 0$

$$xp' = x\cdot\sin\frac{2p}{x} + p \ \Big| : x \neq 0$$

$$p' = \sin\frac{2p}{x} + \frac{p}{x} \ ; \ t = \frac{p}{x}, \ p = t\cdot x, \ p' = t'x + t$$

$$t'x + \cancel{t} = \sin(2t) + \cancel{t}$$

$$\int\frac{dt}{\sin(2t)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} t| = \ln|x| + C_1$$

$$\sqrt{\operatorname{tg}(t)} = C_2\cdot x \ \to \ t = \operatorname{arctg}(C_2 x^2) \ ; \ p = t\cdot x$$

$$p = x\cdot\operatorname{arctg}(C_2 x^2) \to y' = x\cdot\operatorname{arctg}(C_2 x^2); \ y'(1) = \frac{\pi}{4} \to C_2 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x\cdot\operatorname{arctg}(x^2)$$

$$\int dy = \int x\operatorname{arctg}(x^2)\,dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int\operatorname{arctg}x^2\,d(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2\cdot\operatorname{arctg}x^2 - \int x^2\,d(\operatorname{arctg}(x^2))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x^2 - \int\frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x^2 - \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + C_3$$

т.к. $y(1) = \pi/8 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{4}\ln(2)$

$$\underline{y = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg}x^2 - \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + \frac{1}{4}\ln(2)}$$

№2

$y''(y^2+1) = y(y')^2 \to F(y, y', y'') = 0$

Замена $\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p(y)\cdot p'(y) \end{cases} \Rightarrow p\cdot p'(y^2+1) = y p^2 \quad | : (y^2+1) : p$

$$\frac{p'}{p} = \frac{y}{y+1}$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy\cdot y}{y^2+1}$$

$y^2+1>0$

$p=0$

$\downarrow$

$y'=0;\ y''=0$

$0=0$ - истина

$y'=0 \to y=\tilde{c}$

$\tilde{c}=const$

потер. решен.

$\ln(p) = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C_1$

$p = C_2\cdot\sqrt{y^2+1}\ ;\ p = y'$

$y' = C_2\cdot\sqrt{y^2+1}$

$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = C_2\int dx \to \ln|y+\sqrt{y^2+1}| = C_2x + C_3$

$y=\tilde{c},\ \forall\tilde{c}=const$

Ответ

№3

Записать общее решение однородного уравнения. Указать вид частного решения неоднородного уравнения (без вычисления коэф.)

$$y''' - 2y'' + y' = e^x \cdot \cos 2x + e^{-x} + x \cdot \sin x + e^x - x \cdot e^{-x} \quad \text{ЛНДУ}$$

$$y''' - 2y'' + y' = 0 \; - \text{ЛОДУ} \quad \to \quad k^3 - 2k^2 + k = 0 \quad \to \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = k_3 = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{ФСР}: \{ e^{0x};\ e^x;\ x e^x \}$$

$$y_{оо} = C_1 + C_2 e^x + C_3 x \cdot e^x$$

$$f = \underbrace{e^x \cdot \cos(2x)}_{f_1} + \underbrace{e^{-x}}_{f_2} + \underbrace{x \cdot \sin(x)}_{f_3} + \underbrace{e^x}_{f_4} - \underbrace{x \cdot e^{-x}}_{f_5}$$

$f_1 = e^x \cdot \cos(2x)$: $\alpha = 1$ $\beta = 2$; $Q_n(x) = 1 \to n = 0$

$1 \pm 2i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \quad r = 0$

$$y_{чн1} = (A_1 \cdot \cos(2x) + A_2 \cdot \sin(2x)) \cdot e^{x}$$

$f_2 = e^{-x}$: $\alpha = -1$; $Q_n(x) = 1 \to n = 0$

$-1 \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3$; $r = 0$

$$y_{чн2} = A_3 \cdot e^{-x}$$

$f_3 = x \cdot \sin(x)$: $\alpha = 0$ $\beta = 1$; $Q_n(x) = x \to n = 1$

$0 \pm 1i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3$; $r = 0$

$$y_{чн3} = (A_4 x + B_4) \cdot \cos(x) + (A_5 x + B_5) \cdot \sin(x)$$

$f_4 = e^x$: $\alpha = 1$; $Q_n(x) = 1 \to n = 0$

$1 = k_2 = k_3 \to r = 2$

$$y_{чн4} = A_6 \cdot e^x \cdot x^2$$

$f_5 = -x \cdot e^{-x}$: $\alpha = -1$; $Q_n(x) = -x \to n = 1$

$-1 \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \to r = 0$

$$y_{чн5} = (A_7 x + B_7) \cdot e^{-x}$$

$$y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2} + y_{чн3} + y_{чн4} + y_{чн5} = (A_1 \cdot \cos(2x) + A_2 \cdot \sin(2x)) \cdot e^{x} +$$
$$+ A_3 \cdot e^{-x} + (A_4 x + B_4) \cdot \cos x + (A_5 x + B_5) \cdot \sin(x) + A_6 \cdot e^{x} \cdot x^2 +$$
$$+ (A_7 x + B_7) \cdot e^{-x}$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x} + (A_1 \cdot \cos(2x) + A_2 \cdot \sin(2x)) \cdot e^{x} +$$
$$+ A_3 \cdot e^{-x} + (A_4 x + B_4) \cdot \cos x + (A_5 x + B_5) \cdot \sin(x) + A_6 \cdot e^{x} \cdot x^2 + (A_7 x + B_7) \cdot e^{-x}$$

№4

$y'' - 2y' - 8y = -12e^{-2x} - 8x - 10 \quad ; \quad y(0) = 4 ; \; y'(0) = 3$ НЛДУ

$y'' - 2y' - 8y = 0 \xrightarrow{\text{ЛОДУ}} k^2 - 2k - 8 = 0 \rightarrow k_1 = -2, \; k_2 = 4$

ФСР ЛОДУ $= \{ e^{-2x} ; e^{4x} \}$

$y_{оо} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{4x}$

$f = \underbrace{-12e^{-2x}}_{f_1} - \underbrace{8x - 10}_{f_2}$

$f_1 = -12e^{-2x} \quad \alpha = -2 ; \quad Q_n(x) = -12 \rightarrow n = 0$

$-2 = k_1 \rightarrow r = 1$

$y_{чн1} = A \cdot e^{-2x} \cdot x$

$f_2 = -8x - 10 \quad \alpha = 0 ; \quad Q_n(x) = -8x - 10 \rightarrow n = 1$

$0 \neq k_1 \neq k_2 \rightarrow r = 0$

$y_{чн2} = (Bx + C)$

$y_{чн} = A \cdot e^{-2x} \cdot x + Bx + C$

$y'_{чн} = A \cdot e^{-2x} - 2A \cdot e^{-2x} \cdot x + B$

$y''_{чн} = -2 \cdot A \cdot e^{-2x} - 2A \cdot e^{-2x} + 4Ae^{-2x} \cdot x = 4A(x-1) \cdot e^{-2x}$

$\cancel{4Ax \cdot e^{-2x}} - 4Ae^{-2x} - 2A \cdot e^{-2x} + \cancel{4A \cdot e^{-2x} x} - 2B - \cancel{8A \cdot e^{-2x} \cdot x} - 8Bx - 8C =$

$= -12e^{-2x} - 8x - 10$

$-6Ae^{-2x} - 8Bx - 8C - 2B = -12e^{-2x} - 8x - 10$

$A = 2 ; \quad B = 1 ; \quad C = 1$

$y_{он} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{4x} + 2e^{-2x} x + x + 1$

$y' = -2C_1 \cdot e^{-2x} + 4C_2 e^{4x} - 4e^{-2x} x + 2e^{-2x} \cdot x + 1 \; ; \quad y(0) = 4, \; y'(0) = 3 \rightarrow$

$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2 + 1 \\ 3 = -2C_1 + 4C_2 + 3 \end{cases}$

$\rightarrow C_1 = 2 \quad C_2 = 1$

$y = 2 \cdot e^{-2x} + e^{4x} + 2e^{-2x} \cdot x + x + 1$

№5 Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего ЛОДУ:

$$4x^2y'' + 4(x-1)y' + (3-2x)y = 4x^2\sqrt{x}\cdot e^{-x} \quad ; y_1 = \sqrt{x}$$

$$y'' + \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{p_1(x)}\cdot y' + \frac{3-2x}{4x^2}y = \sqrt{x}\cdot e^{-x}$$

Найдём y_2 - частное решение ЛОДУ:

$$y_2 = y_1\cdot\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx \to y_2 = \sqrt{x}\int\frac{e^{-\int(1-\frac{1}{x})dx}}{x}dx =$$

$$= \sqrt{x}\int\frac{e^{-x+\ln|x|}}{x}dx = \sqrt{x}\int\frac{e^{-x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}}dx = \sqrt{x}\cdot e^{-x} + \overset{=0}{C} = \sqrt{x}\cdot e^{-x}$$

ФСР ЛОДУ: $\{\sqrt{x}\,;\sqrt{x}\cdot e^{-x}\}$

Т.к. $y_{00} = C_1y_1 + C_2y_2 \Rightarrow y_{00} = C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{x}\cdot e^{-x}$

$C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$ - ф-ии от x $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cdot\sqrt{x} + C_2'(x)\sqrt{x}\cdot e^{-x} = 0 \\ C_1'\frac{1}{2\sqrt{x}} + C_2'(x)\cdot\left(\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - e^{-x}\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}\,e^{-x}\end{cases} \to C_1'(x) = -C_2'\cdot e^{-x}$$

C_2

$$-C_2'(x)e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + C_2'(x)e^{-x}/2\sqrt{x} - C_2'(x)e^{-x}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{x}\cdot e^{-x} \quad |:e^{-x}$$

$$C_2'(x)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{x} \Rightarrow C_2'(x) = -1 \to C_2 = \int -1\,dx = -x + \tilde{C}_2$$

$$C_1'(x) = e^{-x} \to C_1 = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + \tilde{C}_1$$

$$y_{OH} = (-e^{-x} + \tilde{C}_1)\sqrt{x} + (-x + \tilde{C}_2)(\sqrt{x}\cdot e^{-x})$$

$$y_{OH} = \underbrace{\tilde{C}_1\sqrt{x} + \tilde{C}_2\sqrt{x}\cdot e^{-x}}_{y_{00}} + \underbrace{(-\sqrt{x}\cdot e^{-x}(1+x))}_{y_{ЧН}}$$