РК №2 по ИиДУ

Кузнецов М. (ИУ1-21)
Вариант 9

1. Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется ур-е вида: $F(x, y, y', \dots y^{n}) = 0$

где F - известная функция
x - независ. пер-я из интервала (a, b)
$y(x)$ - неизвестная ф-я
$y', y'', y''', \dots y^{n}$ - производные ф-ии $y(x)$, до n-ого порядка

Соответственно ф-я $y(x)$ называется решением дифф. ур-я на промежутке (a, b), если она n раз дифференцируема на $(a; b)$ и при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Диф. ур-е разрешённое относительно старшей производной имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$$

2. Т о ∃ ФСР ЛОДУ n-го порядка:

„Всякое ЛОДУ n-го порядка с непрерывными на $[a; b]$ коэффициентами $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ имеет ФСР."

Д-во:

Дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$$

$$L[y] = 0$$

Зададим n^2 начальных условий

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} & y_2(x_0) = y_{20} \;\dots\; y_n(x_0) = y_{n0} \\ y_1'(x_0) = y_{10}' & y_2'(x_0) = y_{20}' \;\dots\; y_n'(x_0) = y_{n0}' \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)} & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)} \dots\; y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)} \end{cases}$$

так чтобы

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \dots & y_{n0}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ для } \forall x \in [a, b]$$

Пусть $y_1 \dots y_n$ - частные решения ЛОДУ, и они удовл. начальным условиям, тогда докажем, что эти решения образуют ФСР т.е. Л.Н.З. $\Rightarrow W[x] \neq 0, \forall x \in [a; b]$. Для этого вычислим значение Вронсиана в т. $x = x_0$, получим:

$$W[x_0] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \dots & y_{n0}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$W[x_0] \neq 0, \forall x_0 \in [a; b] \Rightarrow y_1, y_2, \dots y_n$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ образуют ФСР ч.т.д.

ЗАДАЧИ

1. ЛНДУ, ОБЩ. РЕШ: $y = C\sin x + \cos x$

$y' = C\cdot\cos(x) - \sin(x) \to C = \frac{y' + \sin(x)}{\cos(x)}$

$y = C\sin(x) + \cos(x) \to y = \frac{y' + \sin(x)}{\cos(x)}\cdot\sin(x) + \cos(x) \quad |\cdot\cos(x)$

$$\cos(x)\cdot y = \sin(x)\,y' + \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

$$\underline{\cos(x)\cdot y - \sin(x)\,y' = 1}$$

2. $y y'' = (y')^2 - \frac{y'}{y}$; НУ $y = 1;\ y' = 1;\ x = 0$

(1) ЗАМЕНА $\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p\cdot p' \end{cases} \Rightarrow y\cdot p\cdot p' = p^2 - \frac{p}{y}$ — ОДУ

(2) ЗАМЕНА: $t = \frac{p}{y};\ p = t\cdot y;\ p' = t'\cdot y + t \Rightarrow y\cdot t\cdot y\,(t'\cdot y + t) = t^2 y^2 - \frac{ty}{y}$

$t'\cdot t y^3 + \cancel{t^2 y^2} = \cancel{t^2 y^2} - t \to t'\cdot \cancel{t}\cdot y^3 = -\cancel{t}^{1} \quad |: y^3 : t$

$$\int dt = -\int \frac{dy}{y^3} \Rightarrow t = \frac{1}{2y^2} + C_1 \overset{(2)}{\to} \frac{p}{y} = \frac{1}{2y^2} + C_1 \to p = y\left(\frac{1}{2y^2} + C_1\right) \Rightarrow$$

$\overset{(1)}{\to} y' = y\left(\frac{1}{2y^2} + C_1\right) \to 1 = 1\left[\frac{1}{2\cdot 1^2} + C_1\right] \to C_1 = \frac{1}{2}$

$y' = \frac{1}{2y} + \frac{y}{2} \to \frac{dy}{\frac{1+y^2}{2y}} = dx \to \int \frac{2y\,dy}{1+y^2} = \int dx$

$$\cancel{2}\cdot\frac{\ln(1+y^2)}{\cancel{2}} = x + C_2 \to \ln(2) = C_2$$

$\ln(1+y^2) = x + \ln(2)$

$y = \sqrt{e^{x+\ln(2)} - 1}$

3. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin(3x)}$ — ЛНДУ $\Rightarrow y'' + 9y = 0$ — СООТВ. ЛОДУ $\to k^2 + 9 = 0$

$k^2 = -9$

$k = \pm 3i$

ФСР $\{\cos(3x);\ \sin(3x)\}$

$y_{oo} = C_1\cdot\cos(3x) + C_2\cdot\sin(3x)$, $\forall\ C_1, C_2$ - const

$y_{oн} = C_1(x)\cdot\cos(3x) + C_2(x)\cdot\sin(3x)$, $C_1(x), C_2(x)$ - ф-ии от x

$$\begin{cases} C_1'\cos(3x) + C_2'\cdot\sin(3x) = 0 \\ -C_1'\cdot 3\sin(3x) + 3C_2'\cdot\cos(3x) = \frac{1}{\sin(3x)} \end{cases} \to C_1' = \frac{-C_2'\cdot\sin(3x)}{\cos(3x)}$$

$3\sin(3x)\cdot\frac{C_2'\cdot\sin(3x)}{\cos(3x)} + 3C_2'\cdot\cos(3x) = \frac{1}{\sin(3x)}$

$\frac{3C_2'\cdot\sin^2(3x) + 3C_2'\cdot\cos^2(3x)}{\cos(3x)} = \frac{1}{\sin(3x)}$; $3C_2'(\sin^2(3x) + \cos^2(3x))\cdot\sin(3x) = \cos(3x)$

$C_2' = \frac{\cos(3x)}{3\underbrace{\cancel{(\sin^2(3x) + \cos^2(3x))}}_{1}\cdot\sin(3x)} = \frac{1}{3}\,ctg(3x)$

$C_1' = \frac{-1}{3\underbrace{\cancel{(\sin^2(3x) + \cos^2(3x))}}_{1}\cdot\cos(3x)} = -\frac{1}{3\cos(3x)}$

$$C_2 = \int C_2'(x)dx = \frac{1}{3}\int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ln|\sin(3x)| + \tilde{C}_2, \quad \forall \tilde{C}_2 = const$$

$$C_1 = \int C_1'(x)dx = -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\cos(3x)} = -\frac{1}{9}\int\frac{\cos(3x)d(3x)}{1-\sin^2(3x)} = -\frac{1}{9}\int -\frac{d(\sin(3x))}{\sin^2(3x)-1} = \frac{1}{2\cdot 9}\cdot\ln\left|\frac{\sin(3x)-1}{\sin(3x)+1}\right| + \tilde{C}_1, \forall \tilde{C}_2 = const$$

$$y_{OH} = \left[\frac{1}{18}\cdot\ln\left|\frac{\sin(3x)-1}{\sin(3x)+1}\right| + \tilde{C}_1\right]\cdot\cos(3x) + \left[\frac{1}{9}\cdot\ln|\sin(3x)| + \tilde{C}_2\right]\cdot\sin(3x)$$

4. $y^{V} - y''' = x - 1 + xe^{-x} + x\cdot\sin x - 2\cos x$ – ЛНДУ

$y^{V} - y''' = 0$ – ЛОДУ $\to k^5 - k^3 = 0 \to k^3(k-1)(k+1) = 0;\ k_1 = k_2 = k_3 = 0;\ k_4 = 1;\ k_5 = -1$

ФСР: $\{e^{0x}; xe^{0x}; x^2e^{0x}; e^{x}; e^{-x}\}$

$y_{oo} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{x} + C_5e^{-x}$

$f = \underbrace{x-1}_{f_1} + \underbrace{xe^{-x}}_{f_2} + \underbrace{x\cdot\sin(x)}_{f_3} \underbrace{-2\cos(x)}_{f_4}$

$f_1 = x - 1;\ \alpha = 0 \quad Q_n(x) = x - 1 \to n = 1$

$\alpha = 0 = k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow r = 3 \quad \Rightarrow y_{чн1} = (A_1x + B_1)\cdot x^3$

$f_2 = xe^{-x};\ \alpha = -1;\ Q_n(x) = x \to n = 1$

$\alpha = -1 = k_5 \Rightarrow r = 1 \quad \Rightarrow y_{чн2} = (A_2x + B_2)\cdot e^{-x}\cdot x$

$f_3 = x\cdot\sin(x):\ \alpha = 0\pm i;\ Q_n(x) = x \to n = 1$

$0\pm i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5$ $r = 0$ $\Rightarrow y_{чн3} = (A_3x + B_3)\cos x + (A_4x + B_4)\cdot\sin x$

$\beta = 1$

$f_4 = -2\cos(x):\ \alpha = 0;\ Q_n(x) = -2 \to n = 0$

$\beta = 1 \quad 0\pm i \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5$ $r = 0$ $\Rightarrow y_{чн4} = A_5\cdot\cos x + A_6\cdot\sin x$

$y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2} + y_{чн3} + y_{чн4} = (A_1x + B_1)x^3 + (A_2x + B_2)\cdot e^{-x}\cdot x + (A_3x + B_3)\cos x + (A_4x + B_4)\cdot\sin x +$

$+ A_5\cdot\cos x + A_6\cdot\sin x$

$y_{OH} = y_{oo} + y_{чн} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{x} + C_5e^{-x} + (A_1x + B_1)x^3 + (A_2x + B_2)\cdot e^{-x}\cdot x + (A_3x + B_3)\cdot\cos x +$

$+ (A_4x + B_4)\cdot\sin x + A_5\cdot\cos x + A_6\cdot\sin x$