Задача 1.

$f_1)\ \rho^2 = 4\cos 2\varphi \qquad \rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$

$f_2)\ \rho^2 = \cos 2\varphi \qquad \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$

О.Д.З.

$\rho \geq 0 \qquad\qquad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$

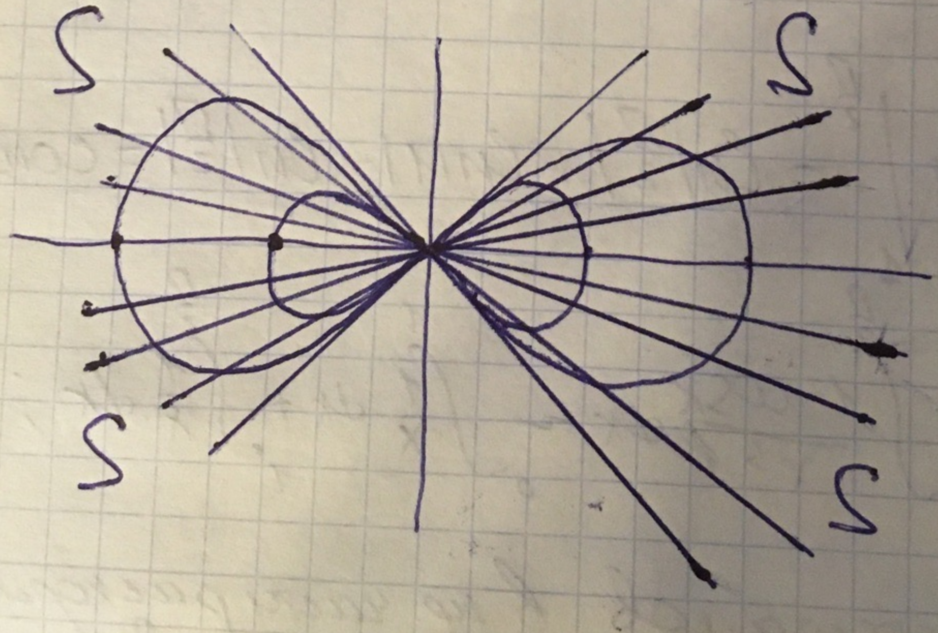
$\cos 2\varphi \geq 0$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z$

$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$

φ	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	0
f_1	1,86	1,68	1,4	0	2
f_2	0,93	0,84	0,7	0	1

$S_{общ} = 4S$

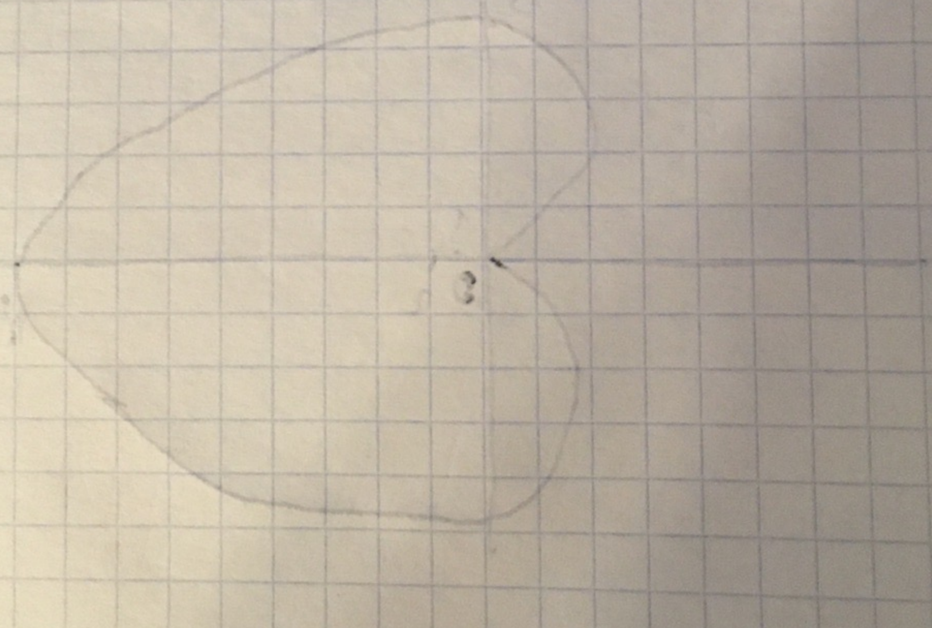


$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos 2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi$$

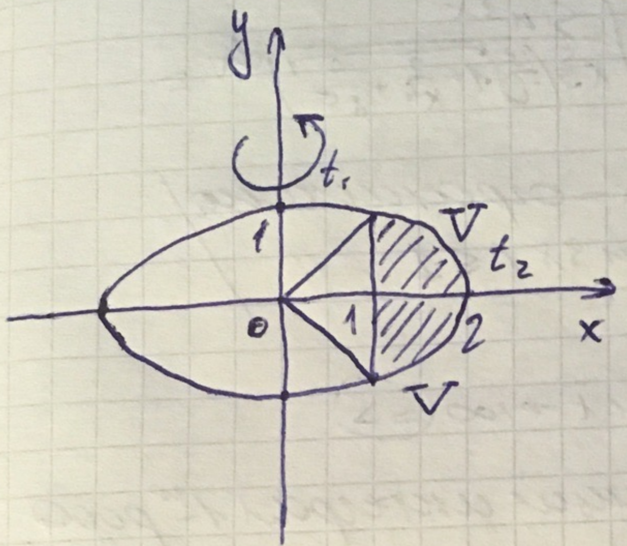
$$S_{общ.} = 4(S_1 - S_2) = 4\cdot\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d2\varphi = \cancel{3\sin\varphi}\ 3\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 - 0 = 3$$

Ответ: 3



Задача №2.



$V_{тела} = 2V.$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
x	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\quad x \geq 1 \quad$ $\begin{matrix} 2\cos t \geq 1 \\ \cos t \geq \frac{1}{2} \end{matrix}$ $\quad \begin{cases} t \geq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ t \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\quad V_{тела} = 2 \cdot 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} (2\cos t)(\sin t)(-2\sin t)\, dt =$

$= -16\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} (\cos t)(\sin^2 t)\, dt = -16\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sin^2 t\, d\cancel{t}\sin t =$

$= -\frac{16}{3}\pi \sin^3 t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{0} = 0 + \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{27}}{8}\pi = 2\sqrt{3}\,\pi.$

Задача 3.

$\rho = 9(1+\cos\varphi)$

$\rho \geq 0$

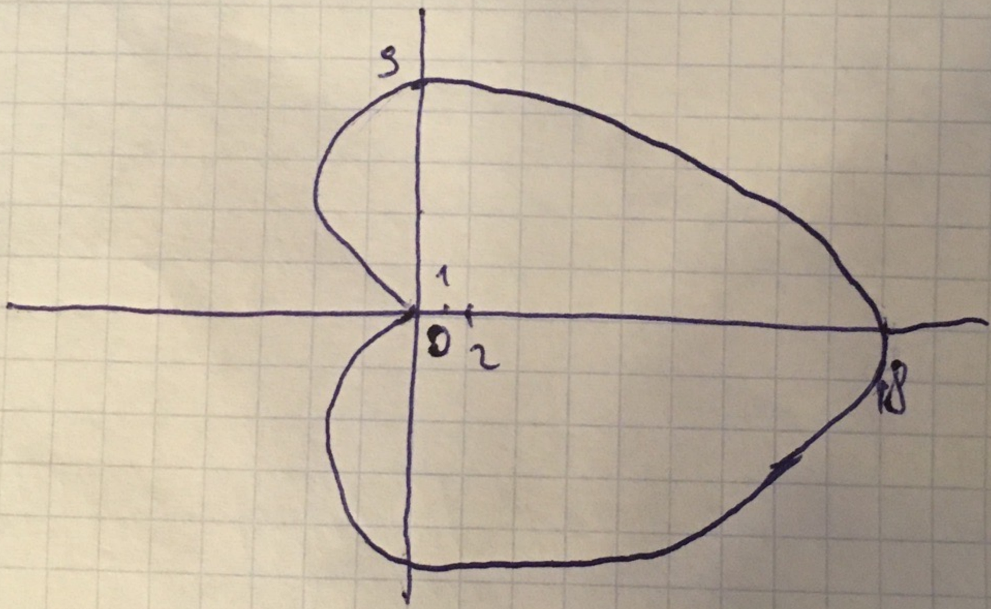
$9 + 9\cos\varphi \geq 0$

$\cos\varphi \geq -1$

$\varphi \in [0+2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{\varphi})^2}\, d\varphi$$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	18	16,8	15,3	13,5	9	4,5	2,63	1,2	0



$\rho' = -9\sin\varphi$

$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{(9+9\cos\varphi)^2 + 81\sin^2\varphi} =$

$= \sqrt{81 + 162\cos\varphi + 81\cos^2\varphi + 81\sin^2\varphi} = \sqrt{162 + 162\cos\varphi}$

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{162 + 162\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$\cancel{= 2\sqrt{162 + 162\cos\varphi}}$$

$$= 2\sqrt{162}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$2\sqrt{162}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1+\cos\varphi}\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sqrt{1-\cos\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{162}\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}} = -2\sqrt{162}\int_0^{\pi} \frac{d\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}} =$$

$$= 2\sqrt{162}\cdot 2\sqrt{1-\cos\varphi}\,\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 4\sqrt{162}\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{324} = 4\cdot 18 = 72.$$

Задача №4.

$$A(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{x^5+2x+4}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^5}}\right)}dx=$$

$=\Big/$ Функция $\sin 3x$ – ограничена т.к $|\sin 3x|\leq 1$ $\Big/$

$\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^5}}\to 1$ при $x\to+\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Несобственный интеграл 1-го рода.

Сравним $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^5}}\right)}dx$ можно

сравнить с несобственным интегралом 1-го рода $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$

При $\alpha=\frac{5}{3}>1$ этот интеграл сходится.

Следовательно $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^5}}\right)}$ сходится.

Задача №5

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ — точка разрыва} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx \text{ — несобств.} \\ \text{интеграл } 2^{\text{го}} \text{ рода} \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx = \left\{ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \text{ при } x \to 0 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{x^3}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx.$$

Сравним $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\,dx$ с $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

При $\alpha = 1$ интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\,dx$ расходится.

$$\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left|\frac{\pi}{2}\right| + \ln|1| = \ln\left|\frac{\pi}{2}\right| = \text{const}$$

Поэтому $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx \sim \int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx$;

т.к. один из интегралов в пр. части расходится, то расх-ся и несобств. интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx$