

Ложкин Максим. ИУТ-21.

РК 1 "Интегралы и
дифференциальное уравнение".

Вариант-10.

Теорема

1. Если f -ия $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то $\forall x: a \leq x \leq b$ Интеграл:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом.

2. Если f -ия $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ непр. на $[a; +\infty)$ и $\exists$ конечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$ (или $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$), то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Док-во: По условию $\exists$ кон. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) > 0:$
пр.

~~Для~~ $\forall x \in M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon \mid g(x) > 0$

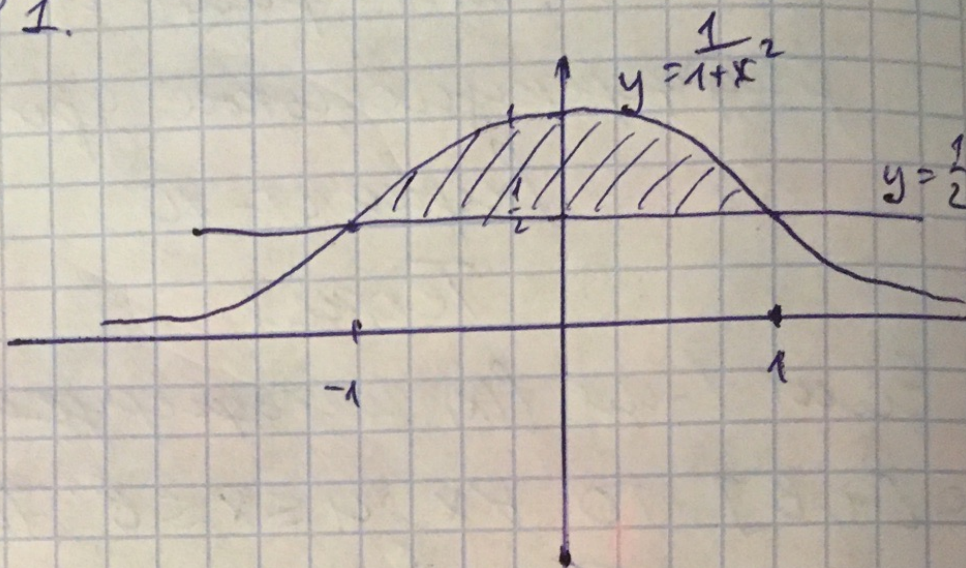
$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$$

Практика.

Задача №1.

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$



$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = \arctan x - \frac{x}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi-2}{2}$$

Отв: $\frac{\pi-2}{2}$

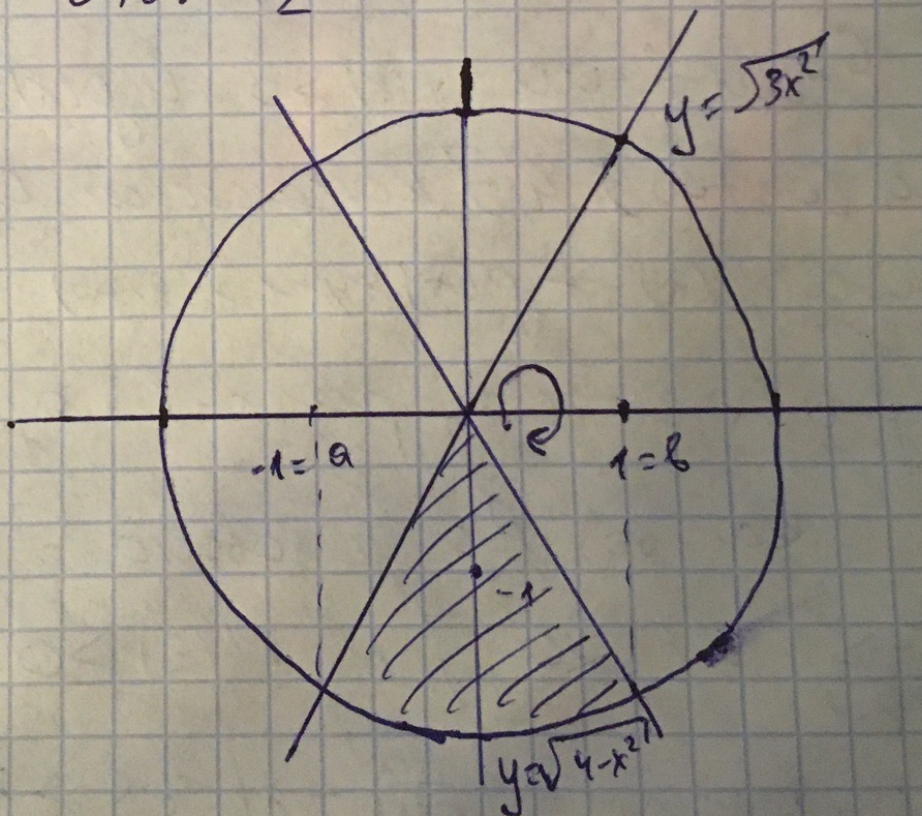
Задача №2

$$3x^2 = y^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y = \sqrt{3x^2}$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$



$$V_{0x} = V_1 - V_2 = \pi \int_{-1}^1 ((\sqrt{4-x^2})^2 - (\sqrt{3x^2})^2) dx$$

$$V_{0x} = \pi \int_{-1}^1 (4 - 3x^2) dx =$$

$$= \pi \cdot \left(4x - \frac{3x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16\pi}{3}$$

Отв: $\frac{16\pi}{3}$

Задача №4.

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 - \sin x}{1+x} dx$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq 2 - \sin x \leq 1$$

$$-3 \leq -\sin x \leq -1$$

$$3 \leq \sin x$$

$$1 \leq |\sin x| \leq 3$$

$$\frac{|2 - \sin x|}{1+x} \leq \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{|\sin x|}{1+x} \leq \frac{3}{1+x}$$

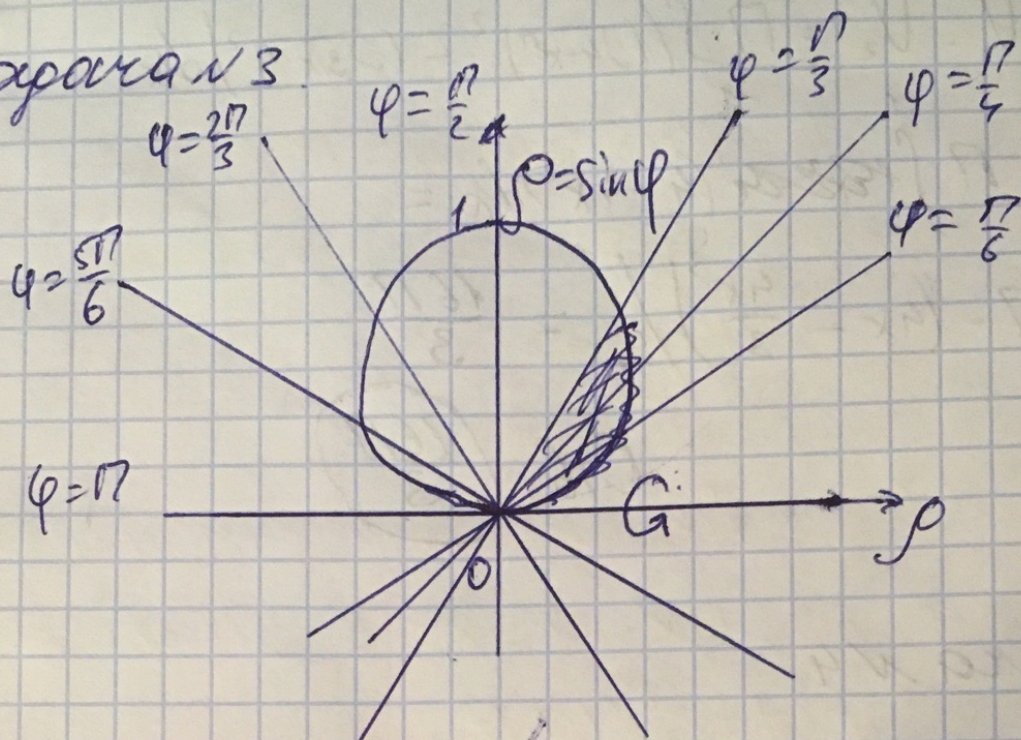
$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{1+x} dx - \text{расходится}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|2 - \sin x|}{1+x} dx - \text{расх-ел по 1-му признаку.}$$

сравнения

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2 - \sin x}{1+x} dx - \text{расх-ел абсолютно}$$

Задача 13



φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

Задача 15.

$\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{4\rho^2 x} dx$ — неоп. интеграл 2-го рода.

$$f_1(x) = \frac{x\sqrt{x}}{4\rho^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = g(x)$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} \text{ — расходится}$$