

ДЗ №2 по ЦиДУ. Локшин М.В. ЦУ1-21.

Вариант - 10.

(N1) $(y+1)y'' - (y')^2 = (y+1)^2 y'$; $y(0)=0$; $y'(0)=-1$

$$y'' - (y')^2 \cdot \frac{1}{y+1} = (y+1)y' / : (y+1) \neq 0$$

Здесь явно $\Rightarrow \begin{cases} p(y) = p = y' \\ p'(y) \cdot y' = p'p = y'' \end{cases}$

$$p'p - p^2 \cdot \left(\frac{1}{y+1}\right) = (y+1)p$$

$$p' - p \cdot \left(\frac{1}{y+1}\right) = y+1 \quad \text{— ЦДУ} / : p \neq 0$$

$$p = u \cdot v$$

$$u'v + uv' - \frac{u \cdot v}{y+1} = y+1$$

$$v(u' + u(-\frac{1}{y+1})) + (uv' - (y+1)) = 0$$

1) $u' + u(-\frac{1}{y+1}) = 0$

$$\frac{du}{dy} = u \left(\frac{1}{y+1}\right) \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y+1}$$

$$\ln|u| = \ln|y+1| + C$$

$$u = (y+1) \cdot e^C \quad (e^C = C')$$

$$u = (y+1) \cdot C' \quad \text{— примем } C' \text{ за } 1$$

$$(y+1) \cdot v' = (y+1)$$

$$v' = 1$$

$$v = y + C_1 \Rightarrow p = u \cdot v = (y+1)(y+C_1)$$

$$p = y^2 + y + C_1 y + C_1 \quad y(0) = 0$$

$$y' = y^2 + y + C_1 y + C_1 \quad y'(0) = -1$$

$$-1 = 0 + 0 + 0 + C_1$$

$$C_1 = -1 \Rightarrow y' = y^2 + y - y - 1 = y^2 - 1$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x + C_2 \quad y(0) = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{0-1}{0+1} \right| = 0 + C_2 \quad y'(0) = -1$$

$$C_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x$$

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2x$$

$$\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{2x}$$

$$\text{т.к. } \frac{y-1}{y+1} < 0 \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = -e^{2x}$$

$$y(1+e^{2x}) = 1-e^{2x}$$

$$y = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Частное решение исходного ДУ.

$$(12). x^2 y'' = 2(x^2 + (y')^2) \arctg \frac{y'}{x} + x y'$$

$$\text{Пусть } y' = z(x) = z$$

$$\begin{cases} y'' = z'(x) = z' \end{cases}$$

$$x^2 z' = 2(x^2 + z^2) \arctg \frac{z}{x} + x z$$

$$z' = \frac{2(x^2 + z^2)}{x^2} \arctg \frac{z}{x} + \frac{z}{x} - \text{Однородное ДУ}$$

$$u = \frac{z}{x} \Rightarrow \begin{cases} z = ux \\ z' = u'x + u \end{cases}$$

$$u'x + u = 2 \cdot \frac{(x^2 + ux^2)}{x^2} \arctg \frac{u}{x} + \frac{ux}{x}$$

$$u'x = 2(1+u^2) \arctg u.$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{(1+u^2) \arctg u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \ln |\arctg u| = \ln |x| + C_1$$

$$\frac{1}{2} \ln |\arctg u| = \ln |x| + \ln |e^{C_1}|$$

$$\arctg u = x^2 e^{2C_1} \quad e^{2C_1} = C_1$$

$$u = \operatorname{tg}(x^2 C_1)$$

$$z = x \operatorname{tg}(x^2 C_1)$$

$$y' = x \operatorname{tg}(x^2 C_1)$$

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{\sin(x^2 C_1) dx^2}{\cos(x^2 C_1)}$$

$$y = \int x \operatorname{tg}(x^2 C_1) dx$$

$$y = -\frac{1}{2C_1} \int \frac{d \cos(x^2 C_1)}{\cos(x^2 C_1)}$$

$$y = \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}(x^2 C_1) dx^2$$

$$y = -\frac{1}{2C_1} \ln |\cos(x^2 C_1)| + C_2$$

Одгуге переменице.

$$\textcircled{13} y''' - 3y'' + y' + 5y = e^{2x} \sin x + x^2 e^{-x} - e^x x \cos x + 6e^x \sin x$$

$$\text{100y: } y''' - 3y'' + y' + 5y = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = -1; \sqrt{D} = \sqrt{16 - 20} = \sqrt{-4} = 2i$$

$$\lambda_2 = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$

$$\lambda_3 = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5 & \lambda + 1 \\ \hline \lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda + 5 \\ -4\lambda^2 + \lambda & \\ -4\lambda^2 - 4\lambda & \\ \hline 5\lambda + 5 & \\ \hline 5\lambda + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$y_0 = C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$$

- Рассмотрим правую часть:

$$1) f_1(x) = e^{2x} \sin x \quad 3) f_3(x) = 6$$

$$2) f_2(x) = x^2 e^{-x} \quad 4) f_4(x) = -e^x x \cos x + 2e^x \sin x$$

$$1) e^{2x} \sin x: \alpha = 2; \beta = 1; n = 0$$

$$y_1 = x \cdot e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$$

$$2) x^2 \cdot e^{-x}: \alpha = -1; n = 2$$

$$y_2 = x(Cx^2 + Dx + E)e^{-x}$$

$$3) 6: \alpha = 0; n = 0$$

$$y_3 = F$$

$$4) -e^x x \cos x + 2e^x \sin x: \alpha = 1; \beta = 1; n = 1$$

$$y_4 = e^x ((Gx + H) \cos x + (Ix + J) \sin x)$$

$$\text{- Общее решение: } y_{\text{одн}} = y_0 + y_2 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x) + \\ + x e^{2x} (A \cos x + B \sin x) + x (Cx^2 + Dx + E) e^{-x} + \\ + F + e^x ((Gx + H) \cos x + (Ix + J) \sin x).$$

№4 $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x} + 9x - 3$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -7$.

ОДН: $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

$$y_0 = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

— Рассмотрим правую часть:

$$f_1(x) = 4e^{-3x}$$

$$\lambda = -3; \quad n = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = Ax^2 \cdot e^{-3x}$$

$$y_1' = A(2xe^{-3x} - 3x^2e^{-3x})$$

$$y_1'' = A(2e^{-3x} - 6xe^{-3x} - 6xe^{-3x} + 9x^2e^{-3x})$$

$$A(2e^{-3x} - 6xe^{-3x} - 6xe^{-3x} + 9x^2e^{-3x}) + 6A(2xe^{-3x} - 3x^2e^{-3x}) +$$

$$+ 9Ax^2e^{-3x} = 4e^{-3x}$$

$$2Ae^{-3x} - 12Ax e^{-3x} + 9Ax^2e^{-3x} + 12Ax e^{-3x} - 18Ax^2e^{-3x} +$$

$$+ 9Ax^2e^{-3x} = 4e^{-3x}$$

$$2Ae^{-3x} = 4e^{-3x}$$

$$A=x \Rightarrow y_1 = 2x^2 e^{-3x}$$

$$P_2(x) = 9x - 3$$

$$x=0$$

$$y_2 = Bx + C$$

$$y_2' = B$$

$$y_2'' = 0$$

$$0 + 6B + 9B + 9C = 9x - 3$$

$$9Bx = 9x$$

$$B = 1$$

$$6 + 9C = -3$$

$$C = -1 \Rightarrow y_2 = x - 1$$

- Общ. решение ЛНДУ: $y_0 + y_n$; $y_n = y_1 + y_2$

$$\Rightarrow y_{\text{общ}} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 2x^2 e^{-3x} + x - 1$$

- Частное решение; найдем C_1 и C_2

$$y: 1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 + 0 - 1$$

$$C_1 = 2$$

$$y' = -3C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 e^{-3x} - 3C_2 x e^{-3x} + 4x e^{-3x} + 6x^2 e^{-3x} + 1$$

$$-7 = -3C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + 0 + 0 - 0 + 1$$

$$-7 = -3 \cdot 2 + C_2 + 1$$

$$C_2 = -2$$

$$\Rightarrow y = 2e^{-3x} - 2xe^{-3x} + 2x^2 e^{-3x} + x - 1$$

(15) $y'' - y' \tan x - y \sec^2 x = 2 \cos x$; $y_1 = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$P_1(x) = -\tan x = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f(x) = 2 \sin x$$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int P_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

$$y_2 = \frac{1}{\cos x} \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \frac{1}{\cos x} \cdot \int e^{-\ln|\cos x|} \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \int \cos x dx = \operatorname{tg} x \quad (C=0)$$

По теореме о структуре однородного решения ЛОДУ:

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Пусть } C_1 = C_1(x) \\ C_2 = C_2(x) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$y_{00} = C_1 \cdot \frac{1}{\cos x} + C_2 \operatorname{tg} x$$

$$\Rightarrow y_{011} = C_1(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + C_2(x) \cdot \operatorname{tg} x - \text{неприводимое решение ЛОДУ.}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + C_2'(x) \cdot \operatorname{tg} x = 0 \\ C_1'(x) \frac{\sin x}{\cos^2 x} + C_2'(x) \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \cos x \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos x} & \operatorname{tg} x \\ \frac{\sin x}{\cos^2 x} & \frac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^3 x} = \ominus$$

$$\ominus \frac{1}{\cos x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{tg} x \\ 2 \cos x & \frac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -2 \sin x \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos x} & 0 \\ \frac{\sin x}{\cos^2 x} & \frac{2 \cos x}{2 \cos x} \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2 \sin x \cdot \cos x \\ C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2 \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -2 \int \cos x \sin x dx \\ C_2(x) = 2 \int \cos x dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(x) = -\sin^2 x + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2(x) = 2\sin x + C_2 \end{cases}$$

представим в прежнее
решение

$$\rightarrow y_{011} = (-\sin^2 x + C_1) \frac{1}{\cos x} + (2\sin x + C_2) \operatorname{tg} x$$

или

$$y_{011} = \underbrace{(C_1 \cdot \frac{1}{\cos x} + C_2 \cdot \operatorname{tg} x)}_{y_{a.o.}} + \underbrace{(-\frac{\sin^2 x}{\cos x} + 2\sin x \cdot \operatorname{tg} x)}_{y_{n.n.}}$$

Ответ: