

Вариант-10

Теория.

① Задача решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, назыв. задачей Коши.

② Пусть имеется ~~дифф.~~ дифф. уравнение $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$, где функции $a_1(x) \dots a_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке I . Тогда совокупность всех решений этого уравнения есть линейное пространство размерности n .

Практика.

① $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1 + 2i, \lambda_4 = 1 - 2i$

ФОР: $y_1 = C_1, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^x \cos 2x, y_4 = e^x \sin 2x$

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1 - 2i)(\lambda - 1 + 2i) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2 + 2i\lambda - \lambda + 1 - 2i - 2i\lambda + 2i + 4) = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 10\lambda = 0$$

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 9\lambda^2 - 10\lambda = 0 \Rightarrow \text{линт. однородное ДУ}$$

$$y^{IV} - y''' + 9y'' - 10y' = 0$$

Общее решение:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^x \sin 2x + C_4 e^x \cos 2x$$

② $2xy'y'' = (y')^2 - 1$

$$y=0, y'=\sqrt{2}, x=1$$

$$y' = p(x), y'' = p'(x) \Rightarrow 2xp p' = p^2 - 1$$

$$\frac{p dp}{p^2 - 1} = \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln |p^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln |x| + \ln C_1$$

$$\ln |p^2 - 1| = \ln |x \cdot C_1| \Rightarrow p^2 - C_1 x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y')^2 = C_1 x + 1$$

$$x=1, y'=\sqrt{2} \cdot 2 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$(y')^2 = x+1, y' = \sqrt{x+1}, dy = \sqrt{x+1} dx$$

$$y = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

$$y=0, x=1: 0 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

③ $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i$$

$$y_{o.o.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \Rightarrow C_1' = -\frac{C_2' \sin x}{\cos x} \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{2}{\sin^3 x} \end{cases}$$

$$\frac{C_2' \sin^2 x + C_2' \cos^2 x}{\cos x} = \frac{2}{\sin^3 x}$$

$$\begin{aligned} C_2 C_2' &= \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \Rightarrow C_2 = 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sin^2 x} + k_2 = \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} + k_2 \end{aligned}$$

$$C_1' = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{2}{\sin^2 x}$$

$$C_1 = -2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = 2 \cot x + k_1$$

$$y = (2 \cot x + k_1) \cos x + \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + k_2 \right) \sin x$$

$$(4) \quad y'' + 4y''' = x - x^3 + x e^x + \sin 2x$$

$$y'' + 4y''' = 0$$

$$k^5 + 4k^3 = 0$$

$$k^3(k^2 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} k_{1,2,3} = 0 \\ k_{4,5} = 0 \pm 2i \end{cases}$$

$$\text{PCP: } \{C_1, C_2 x, C_3 x^2, C_4 \sin 2x, C_5 \cos 2x\}$$

$$y_{o.o.} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \sin 2x + C_5 \cos 2x$$

$$f_1 = (x - x^3) e^{0x} \quad A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow r = 3$$

$$y_{r.h.1} = (A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1) x^3 \cdot e^{0x}$$

$$f_2 = x e^x$$

$$A_2 x + B_2$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow r = 0$$

$$y_{r.h.2} = (A_2 x + B_2) e^x \cdot x^0$$

$$f_3 = (\sin 2x + 0 \cdot \cos 2x) e^{0x}$$

$$\lambda \pm \beta = 0 \pm 2i \Rightarrow \boxed{r = 1}$$

$$y_{r.h.3} = (A_3 \sin 2x + B_3 \cos 2x) e^{0x} \cdot x$$

$$y_{om} = y_{o0} + y_{r.h.1} + y_{r.h.2} + y_{r.h.3}$$