ДЗ2.

Вариант 11

№1 Для данных дифференциальных уравнений найти общие решения или частные решения для начальных усл.

№1.

$$y'' y^4 + y\sqrt{2-y^2} = 0 \; ; \; y(0)=1 \; ; \; y'(0)=1$$

Произведем замену: $y'(x) = z(y)$, $y'' = zz'$;

перепишем исходное ур-е

$$z^2 \cdot z' + y\sqrt{2-y^2} = 0$$

$$z^2 dz = -y\cdot\sqrt{2-y^2}\,dy \Rightarrow \int z^2 dz = -\int \frac{\sqrt{2-y^2}\cdot y\, d(2-y^2)}{-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z^3}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C_1 \Rightarrow z^3 = (2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} z = \sqrt[3]{(2-y^2)^{\frac{3}{2}} + C_2} \\ z = y'(x) \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \; 1 = \sqrt[3]{1+C_2} \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y' = \sqrt{2-y^2}$$

$$y' = \sqrt{2-y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2-y^2}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - y^2}} = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin\frac{y}{\sqrt{2}} = x + C_3$$

Найдем частное решение

$$\left.\begin{aligned}&\arcsin\frac{y}{\sqrt{2}}-x=C_3\\&y(0)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=C_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_3=\frac{\pi}{4}$$

$$y=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

№2.

Общее решение:

$$y''+y'ctg\,x+1=0$$

Произведем замену: $y'(x)=z(x)$, $y''=z'$:

$$z'+z\,ctg\,x+1=0$$

Сделаем еще одну замену: $z=uv$, тогда $z'=$
$=u'v+uv'$

$$u'v+uv'+uv\cdot ctg\,x=-1$$

$$u'v+u(v'+v\cdot ctg\,x)=-1.$$

$$\begin{cases}v'+v\cdot ctg\,x=0\\u'v=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dv}{dx}=-v\cdot ctg\,x\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=\\\text{подставим во II ур-е системы}\end{cases}$$

$$=-\int\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{d(\sin x)}{\cos x}\Rightarrow \ln|v|=-\ln|\sin x|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{1}{\sin x}$$

$\frac{u'}{\sin x} = -1.$

$u' = -\sin x \Rightarrow \int du = -\int \sin x\, dx \Rightarrow u = \cos x + C_1$

Тогда $z = uv = (\cos x + C_1) \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{C_1}{\sin x}$

$z = y' \Rightarrow y = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{C_1}{\sin x} \right) dx = \int \frac{\cos x \cdot d(\sin x)}{\sin x \cdot \cos x} +$

$+ C_1 \cdot \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\sin x| + C_1 \cdot \ln|tg \frac{x}{2}| + C_2,$

где $C = const$

Ответ: $y = \ln|\sin x| + C_1 \cdot \ln|tg \frac{x}{2}| + C_2$

N3 2

Записать общее решение однородного уравнения. Указать вид частного решения неоднородного уравнения

$y''' - 6y'' + 10y' = \cos x e^{3x} - x^3 + x e^x - 3x \sin x e^{3x}$

$+ 4 + x^2 \cdot \cos 3x \cdot e^{-4x}$

1) Однородное уравнение

$y''' - 6y'' + 10y' = 0$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \frac{6 \pm 2i}{2} \Rightarrow \lambda_{2,3} = 3 \pm i$

$y_0 = C_1 + e^{3x} \cdot C_2 \cos x + e^{3x} \cdot C_3 \sin x,\ C \in R$

2) Частное решение

$y''' - 6y'' + 10y' = e^{3x} \cdot \cos x - 3x \cdot e^{3x} \cdot \sin x + e^{x} \cdot x + x^2 \cdot \cos 3x \cdot e^{-4x} - x^3 + 4.$

а) $L[y] = e^{3x} \cdot \cos 1 \cdot x - 3x \cdot e^{3x} \cdot \sin x$

$\alpha = 3,\ \beta = 1$ $\quad 3 \pm i$ - корень хар. ур-я, $r = 1$

$P_l(x) = 1 \quad l = 0$

$Q_m(x) = -3x \quad m = 1$ $\quad k = \max\{l, m\} = 1.$

$y_{ч_1} = x \cdot e^{3x} \cdot ((A_{11} x + A_{10}) \cos x + (B_{11} x + B_{10}) \sin x)$

б) $L[y] = x \cdot e^{x}$

$\alpha = 1,\ \beta = 0$ $\quad \alpha \pm \beta i = 1$ - не явл корнем характ. ур-я $\Rightarrow r = 0$

$P_l(x) = x\ ,\ k = l = 1$

$y_{ч_2} = e^{x} \cdot (A_{21} x + A_{20})$

в) $L[y] = x^2 \cdot e^{-4x} \cdot \cos 3x.$

$\alpha = -4,\ \beta = 3$ $\quad -4 \pm 3i$ - не явл. корнем характ. ур-я

$\left.\begin{array}{l} P_l(x) = x^2;\ l = 2 \\ Q_m(x) = 0,\ m = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k = \max\{l; m\} = 2.$

$y_{ч_3} = e^{-4x} \cdot ((A_{32} x^2 + A_{31} x + A_{30}) \cdot \cos 3x + (B_{32} x^2 + B_{31} x + B_{30}) \sin 3x)$

г) $L[y] = -x^3+4$

$\alpha=0, \beta=0 \Rightarrow 0+0=0$ - явл. корнем характер. ур-я, $r=1$

$P_l(x) = -x^3+4$, $l=3=k$.

$y_{ч4} = x\cdot(A_{43}x^3 + A_{42}x^2 + A_{41}x + A_{40})$

Тогда $y = y_0 + y_{ч1} + y_{ч2} + y_{ч3} + y_{ч4}$.

$y = C_1 + e^{3x}(C_2\cos x + C_3\sin x) + x\cdot e^{3x}((A_{11}x+A_{10})\cos x$
$+(B_{11}x+B_{10})\sin x) + e^{x}\cdot(A_{21}x+A_{20}) + e^{-4x}\cdot$
$\cdot((A_{32}x^2+A_{31}x+A_{30})\cdot\cos 3x + (B_{32}x^2+B_{31}x+B_{30})\sin 3x) +$
$+x(A_{43}x^3+A_{42}x^3+A_{41}x+A_{40})$, $C\in R$

№4 ~~[illegible]~~

$2y''-7y'-4y = -36e^{-\frac{x}{2}} - 4x - 3;\ y(0)=0;\ y'(0)=0$

1) Характ. ур-е

$2y''-7y'-4y=0$

$2\lambda^2-7\lambda-4=0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{7\pm9}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4=\lambda_1 \\ -\frac{1}{2}=\lambda_2 \end{array}\right.$

$y_0 = C_1\cdot e^{4x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$

2) Частное решение

$L[y] = -36e^{-\frac{x}{2}}$

$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 0 \quad -\frac{1}{2} + 0i = -\frac{1}{2}$ - корень характ. ур-я $\Rightarrow q = 1$

$P_l(x) = -36, \ l = 0 = k$

$y_{ч_1} = x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot A_{10}$

$y'_{ч_1} = A_{10} \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \cdot A_{10} \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

$y''_{ч_1} = -\frac{1}{2} A_{10} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4} A_{10} x e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} A_{10} e^{-\frac{x}{2}} =$

$= -A_{10} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4} A_{10} x e^{-\frac{x}{2}}$, подставляем в ур-е

$2y''_{ч_1} - 7y'_{ч_1} - 4y_{ч_1} = -36e^{-\frac{x}{2}}$

$-2A_{10} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} A_{10} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x - 7A_{10} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \frac{7}{2} A_{10} x e^{-\frac{x}{2}} -$

$-4A_{10} x \cdot e^{-\frac{x}{2}} = -36e^{-\frac{x}{2}} \,/ : e^{-\frac{x}{2}}$

$-2A_{10} + \frac{1}{2} A_{10} x - 7A_{10} + \frac{7}{2} A_{10} x - 4A_{10} x = -36$

$-9A_{10} = -36 \Rightarrow A_{10} = 4$, тогда

$y_{ч_1} = 4x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

б) $L[y] = -4x - 3$

$\alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow$ не явл. корнем характ. ур-я

$P_l(x) = -4x - 3, \ l = 1 = k$

$\left.\begin{aligned} y_{ч_2} &= A_{21}x + A_{20} \\ y'_{ч_2} &= A_{21} \\ y''_{ч_2} &= 0 \end{aligned}\right\}$ подставим в $2y'' - 7y' - 4y = -4x - 3$

$2 \cdot 0 - 7A_{21} - 4xA_{21} - 4A_{20} = -4x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} A_{21} = 1 \\ A_{20} = -1 \text{, тогда } y_{ч_2} = x-1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} + 4xe^{-\frac{x}{2}} + x - 1 \\ y' = 4C_1 \cdot e^{4x} - \frac{1}{2} C_2 \cdot e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} + 4e^{-\frac{x}{2}} - 2xe^{-\frac{x}{2}} + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 0 + 0 - 1 = 0 \\ 4C_1 - \frac{1}{2} C_2 + 4 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 4 - 4C_2 - \frac{1}{2} C_2 + 5 = 0 \,|\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ -9C_2 = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Частное решение:

$$y = -e^{4x} + 2e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} + 4xe^{\left(-\frac{x}{2}\right)} + x - 1.$$

Ответ: $y = -e^{4x} + 2e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} + 4xe^{\left(-\frac{x}{2}\right)} + x + 1$

№5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего линейного однородного уравнения.

$$y'' \sin^2 2x - 6y' \sin 2x + 4y(3 - 2\sin^2 x) = tg^3 x \cdot \sin^2 2x; \; y_1 = tg\, x.$$

$y = tgx \cdot z,\ y' = \frac{z}{\cos^2 x} + tgx \cdot z';\ y'' = \frac{z'\cos^2 x - \sin 2x \cdot z}{\cos^4 x} +$

$+ \frac{z'}{\cos^2 x} + tgx \cdot z'' = \frac{2z'}{\cos^2 x} - \frac{z \cdot \sin 2x}{\cos^4 x} + tgx \cdot z''$

$\left(\frac{2z'}{\cos^2 x} - \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} z + tgx \cdot z''\right) \cdot \sin^2 2x - 6\left(\frac{z}{\cos^2 x} + tgx \cdot z'\right) \cdot$

$\cdot \sin 2x + 4tgx(3 - 2\sin^2 x)z = tg^3 x \cdot \sin^2 2x.$

$\left(\frac{2z'}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x \cos x}{\cos^4 x} z + \frac{\sin x}{\cos x} z''\right) 4\sin^2 x \cos^2 x -$

$-6\left(\frac{z}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} z'\right) \cdot 2\sin x \cos x + tg(12 - 8\sin^2 x)z =$

$= tg^3 x \cdot \sin^2 2x$

$8\sin^2 x \cdot z' - \frac{8\sin^3 x}{\cos x} \cdot z + 4\sin^3 x \cos x \cdot z'' -$

$-\frac{12\sin x}{\cos x} z - 12\sin^2 x z' - tgx(8\sin^2 x - 12)z =$

$= tg^3 x \cdot \sin^2 2x$

$4\sin^3 x \cdot \cos x \cdot z'' - 4\sin^2 x \cdot z' = tg^3 x \cdot \sin^2 2x$

$p = z',\ p' = z''.$

$4\sin^3 x \cdot \cos x \cdot p' - 4\sin^2 x \cdot p = tg^3 x \cdot \sin^2 2x.$

Решение соотв. однородного ур-я

$4\sin^3 x \cdot \cos x \cdot p' - 4\sin^2 x \cdot p = 0 \mid : 4\sin^2 x$ ~~[illegible]~~

$\sin\cdot\cos x\ \frac{dp}{dx}=p \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{1}{tgx\cos^2x}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|p|=\int\frac{\cos^2x\ d(tgx)}{tgx\cdot\cos^2x}=\ln|tgx|+\ln|C|$

$p_0=tgx\cdot C$

$p_0'=C'(x)\cdot tg(x)+\frac{C(x)}{\cos^2x}$

$4\sin^3x\cdot\cos x\left(C'tgx+\frac{C}{\cos^2x}\right)-4\sin^2x\cdot C\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=$

$=tg^3x\cdot\sin^2 2x$

$4\sin^4x\cdot C'+4\frac{\sin^3x\cdot C}{\cos x}-\frac{4\sin^3x\cdot C}{\cos x}=4\sin^2x\cos^2x / 4\sin^4x$

$C'=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad C=-\ln|\cos x|+C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p=tgx(-\ln|\cos x|+C_1)=-tgx\cdot\ln|\cos x|+$

$+tgx\cdot C_1$

$z=-\int tgx\cdot\ln|\cos x|\cdot\frac{d(\ln|\cos x|)}{1}\cdot\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)+C_1\cdot$

$\cdot\int tgx\,dx=\frac{\ln^2|\cos x|}{2}+C_2+C_1\cdot(-\ln|\cos x|)=\frac{\ln^2|\cos x|}{2}=$

$-\ln|\cos x|\cdot C_1+C_2, \Rightarrow y=tgx\cdot z=tgx\cdot$

$\cdot\left(\frac{\ln^2|\cos x|}{2}-\ln|\cos x|\cdot C_1+C_2\right)$

Ответ: общее решение

$y=tgx\cdot\frac{\ln^2|\cos x|}{2}-tgx\ln|\cos x|C_1+C_2 tgx,$

где $C_1, C_2=const$