

Версия 11 Петров Иван
441-21

Теория

1 Сформулировать определение
линейной зависимости и линейной
независимости систем функций на
промежутке.

Линейна ф-ции $y_1, \dots, y_n$, заданные на
промежутке I , ~~линейно независимы~~

~~линейно независимы, если не существует~~

называется линейно зависимой (независимой),
если существует (не существует) нетривиаль-
ная линейная комбинация

этих функций $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n \equiv 0$, $a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$.

2. Ввести формулу для общего решения
линейного однородного ОДУ 2-го порядка
с постоянными коэффициентами в
случае кратных корней характеристического
уравнения

Рассмотрим линейное ОДУ

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, где a_1 и a_2 - вещественные числа. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда ФОР ОДУ имеет вид $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$,

общее решение запишется как y

$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. Проверим линейную независимость решений

y_1 и y_2

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) & e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ \alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x & \alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x \end{vmatrix} =$$
$$= \beta e^{2\alpha x} (\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x) \neq 0. \text{ Поэтому } y_1 \text{ и } y_2$$

линейно независимы и образуют ФОР.

Примеры:

1/2. Найти ли функции $y = e^x$ и $y_2 = x^2 e^x$

задавать ОДР некоторого линеаризованного диф. ур. л.

$$\begin{vmatrix} e^x & x^2 e^x \\ e^x & 2xe^x + x^2 e^x \end{vmatrix} = 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} - x^2 e^{2x} = 2xe^{2x} \neq 0$$

при $x \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} y & e^x & x^2 e^x \\ y' & e^x & 2xe^x + x^2 e^x \\ y'' & e^x & 2e^x + 2xe^x \end{vmatrix} = y(2e^{2x} + 2xe^{2x} + 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} - 2xe^{2x} - x^2 e^{2x}) - y'(2e^{2x} + 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} - x^2 e^{2x}) + y''(2xe^{2x} + x^2 e^{2x} - x^2 e^{2x}) =$$

$$= 2ye^{2x}(1+x) - y'2xe^{2x} + y''2xe^{2x} = 0 \quad | : 2e^{2x}$$

$$y(1+x) - y'(1+2x) + y'' \cdot x = 0 \quad | : x \neq 0$$

$$y'' + y\left(\frac{1+x}{x}\right) - y'\left(\frac{1+2x}{x}\right) = 0.$$

Ответ: $y'' + y\left(\frac{1+x}{x}\right) - y'\left(\frac{1+2x}{x}\right) = 0$

12. Найти частное решение диф. ур.

$(1 + e^{-x})y'' = y'$, удовлетворяющее начальным

условиям $y = 1, y' = 2$ при $x = 0$

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p'(x) \end{cases} \Rightarrow (1+e^{-x})p' = p = \frac{e^x+1}{e^x}p'$$

$$= \frac{e^x+1}{e^x} \frac{dp}{dx} = p!; \quad p \frac{e^x+1}{dx}$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{e^x dx}{e^x+1}$$

$e^{-x} + 1 \neq 0$
 $p \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$.
 подлогно, но это не
 частное решение.

$$\ln|p| = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + \ln e^C$$

$$p = (e^x+1)e^C$$

Подставим из условия: $y' = p = (e^x+1)e^C$

$$\Rightarrow C=0 \Rightarrow y' = e^x+1$$

$$2) \frac{dy}{dx} = e^x+1 \Rightarrow \int dy = \int (e^x+1)dx; y = e^x+x+C$$

Подставим из условия: $1 = e^0+0+C \Rightarrow C=0$

$$\Rightarrow y = e^x+x$$

Ответ: $y = e^x+x$.

№3 Найти общее решение ОДУ

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$R^2 + 120$$

$$R = \pm i$$

$$y_{00} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$[C_1' |x| \sin x + C_2' |x| \cos x = 0 \quad | \cdot \sin x$$

$$[C_1' |x| \cos x - C_2' |x| \sin x = \frac{1}{\cos x} \quad | \cdot \cos x$$

$$C_1' |x| (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 \Rightarrow C_1' |x| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 |x| = x + \tilde{C}_1$$

$$C_2' |x| = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow C_2 |x| = -\int \tan x dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \ln(\cos x) + \tilde{C}_2$$

$$y_{00} = |x + \tilde{C}_1| \sin x + \ln|\cos x| + \tilde{C}_2 \cos x$$

Imbena: oduzet penelene.

$$y_{00} = \tilde{C}_1 \sin x + \tilde{C}_2 \cos x + x \sin x + \ln|\cos x| \cos x$$

N4 Yna zovb bug oduzet penelene 074

$$y^V + 4y''' = x e^{-2x} - 1 + 3 \sin 2x - e^{2x} \cos 2x$$

Разобьем

$$y^V + 4y''' = \underbrace{x e^{-2x}}_{f_1(x)} + \underbrace{-1}_{f_2(x)} + \underbrace{3 \sin 2x}_{f_3(x)} - \underbrace{e^{2x} \cos 2x}_{f_4(x)}$$

$$y^{(5)} + 4y'''$$

$$k^5 + 4k^3 = k(k^2 + 4) \quad ; \quad k^2 - 4 \Rightarrow \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2i$$

$$k_{1,2,3} = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$$

$$k_{4,5} = \pm 2i$$

$$y_4 = \sin 2x$$

$$y_{00} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \sin 2x + C_5 \cos 2x$$

$$f_1(x) = x e^{-2x} \quad k_1 = 2, B_1 = 0, \gamma_1 = -2$$

$$y_{41} = (A_1 x + B_1) e^{-2x}$$

$$f_2(x) = -1 \quad k_2 = 0, B_2 = 0, \gamma_2 = 0$$

$$y_{42} = A_2 \cdot x^3$$

$$f_3(x) = 3 \sin 2x \quad k_3 = 0, B_3 = \pm 2i, \gamma_3 = \pm 2i$$

$$y_{43} = (A_3 \sin 2x + B_3 \cos 2x) \cdot x$$

$$f_4(x) = -e^{2x} \cos 2x, \quad k_4 = 2, B_4 = \pm 2i, \gamma_4 = 2 \pm 2i$$

$$y_{44} = A_4 e^{2x} \cos 2x + B_4 e^{2x} \sin 2x$$

$$\text{Answer: } y_{011} = y_{00} + y_{41} + y_{42} + y_{43} + y_{44} = \\ = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \sin 2x + C_5 \cos 2x + \\ + (A_1 x + B_1) e^{-2x} + A_2 \cdot x^3 + (A_3 \sin 2x + B_3 \cos 2x) \cdot x + \\ + A_4 e^{2x} \cos 2x + B_4 e^{2x} \sin 2x$$