РК1 ИиДУ Вариант 12.

Теория.

1. Пусть $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a;b]$. Тогда на $[a;+\infty)$ опред. ф-ция:

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Если $\exists$ конечный предел: $\lim\limits_{b\to+\infty} F(x)$, то этот предел называется несобственным интегралом (1-го рода) от ф-ции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ и обознач.:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. Теорема (интегрирования по частям в опред. интеграле): пусть ф-ции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x)\,d(v(x)) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,d(u(x))$$

Док-во: рассм. ф-цию:

$$F(x) = u(x)\,v(x) - \int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt;$$

$$F'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) - u'(x)\,v(x) = u(x)\cdot v'(x),$$

след. $F(x)$ – первообразная для $u(x)\cdot v'(x)$. По формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = \left(u(x)\,v(x) - \int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt\right)\Big|_a^b =$$

$$= u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

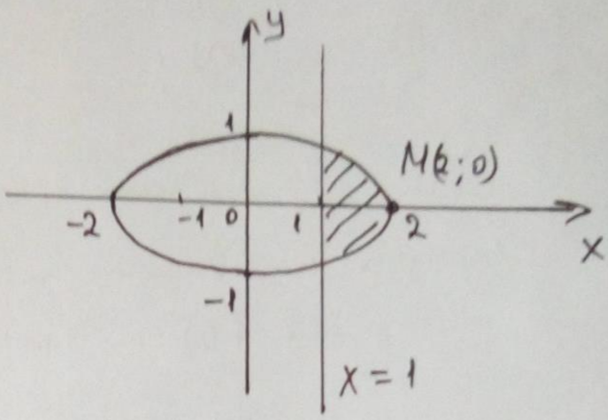
ч.т.д.

Практика.

№1. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\quad x = 1;\ (2;0)$

$$\frac{x^2}{2^2} + y^2 = \frac{4\cos^2 t}{4} + \sin^2 t = 1$$

$$y = \sqrt{-\frac{x^2}{4} + 1}$$



$$S = 2\int_1^2 y(x)\,dx =$$

$$= 2\int_1^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx =$$

$$= x\sqrt{4-x}\,\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{3} - \int_1^2 \frac{(4-x^2) - 4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= -\sqrt{3} - \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx + 4\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= -\sqrt{3} + 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx \ \circledequal$$

$$2\int_1^2 \sqrt{4-x^2} = -\sqrt{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$\circledequal\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{4\pi}{6}$$

Ответ: $\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}.$

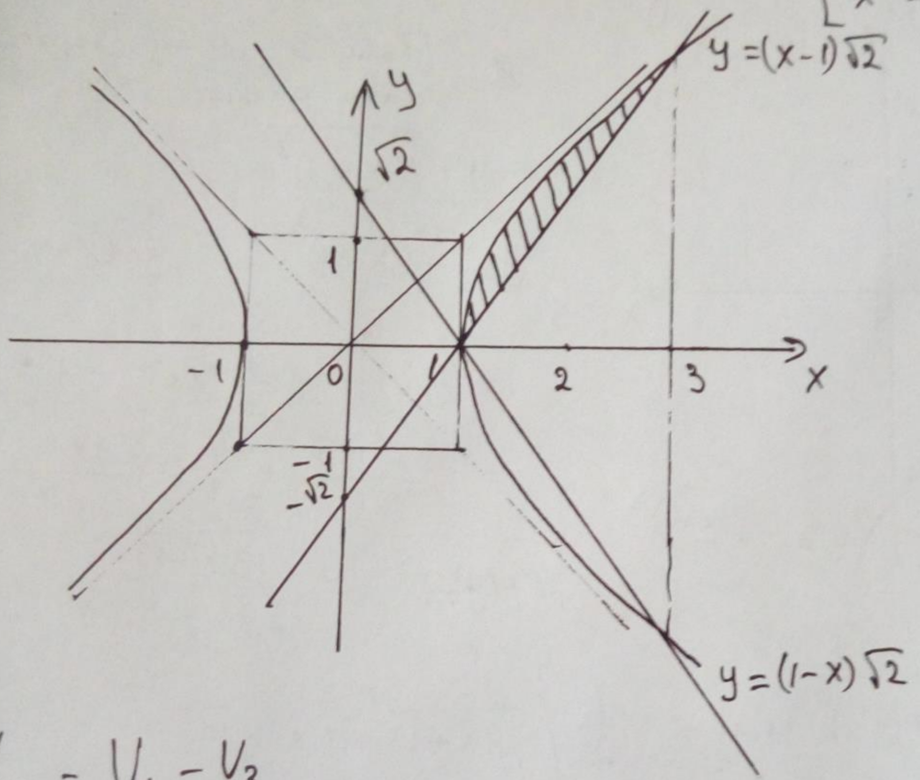
№2. $x^2-1=y^2$; $y^2=2(x-1)^2$; $V_{ox}-?$

$x^2-y^2=1$ – гипербола

$y^2=2(x-1)^2$ $\left[\begin{array}{l} y=(x-1)\sqrt{2} \\ y=(1-x)\sqrt{2} \end{array}\right.$

Найдём т. пересеч.: $x^2-1=2x^2-4x+2$

$x^2-4x+3=0$ $D=16-12=2^2$ $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$



$V_{ox}=V_1-V_2$

$$V_1=\pi\int_1^3(x^2-1)\,dx=\pi\int_1^3 x^2dx-\pi\int_1^3 dx=$$

$$=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_1^3-\pi x\Big|_1^3=9\pi-\frac{\pi}{3}-3\pi+\pi=7\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{20\pi}{3}$$

$$V_2=\pi\int_1^3 2(x-1)^2dx=2\pi\int_1^3 x^2dx-4\pi\int_1^3 x\,dx+2\pi\int_1^3 dx=$$

$$=2\pi\frac{x^3}{3}\Big|_1^3-4\pi\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+2\pi x\Big|_1^3=$$

$$= \cancel{2\pi}9 - \frac{2\pi}{3} - \cancel{2\pi\cdot 9} + \cancel{2\pi} + 6\pi - \cancel{2\pi} = 6\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

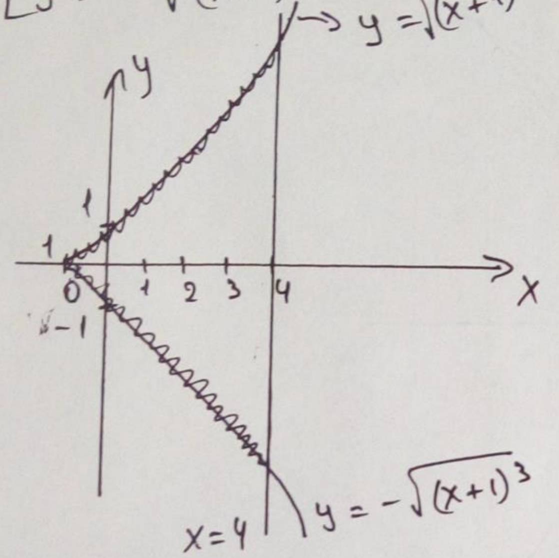
$$V_{0x} = V_1 - V_2 = \frac{20\pi - 16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$.

№3. $y^2 = (x+1)^3$; Найти длину дуги кривой, отсекаемой прямой $x = 4$.

$$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{(x+1)^3} \\ y = -\sqrt{(x+1)^3} \end{array}\right.$$

ОДЗ: $x \geq -1$.



Найдём длину „верхей" части дуги:

$$y = \sqrt{(x+1)^3}$$

$$y'_x = \left((x+1)^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$$

$$1 + (y'_x)^2 = \frac{9}{4}(x+1) + 1 =$$

$$= \frac{9x+9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{9x+13}{4}$$

$$\sqrt{1+(y'_x)^2} = \frac{\sqrt{9x+13}}{2}$$

$$l_{верх} = \int_{-1}^{4} \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{9x+13}\,dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_{-1}^{4} (9x+13)^{1/2}\,d(9x+13) = \frac{2}{18\cdot 3}\cdot(9x+13)^{3/2}\Big|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{9\cdot 4+13}}{27} - \frac{\sqrt[3]{9(-1)+13}}{27} = \frac{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{4}}{27} = \frac{7^3 - 8}{27} = \frac{335}{27}$$

$$l_{общ.} = 2\,l_{верх} = \frac{670}{27}.$$

Ответ: $\frac{670}{27}$.

№4.

$$\int_1^{+\infty} \frac{3\cos^2 2x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = 3\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 1-го рода} \\ x \in [1; +\infty) \\ 0 \le \cos^2 2x \le 1 \end{array} \right|$$

$$\frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{x^{3/2}} = g(x)$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$ интеграл Дирихле $\alpha = 3/2 > 1$, след.

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,d(x)$$ – сходится, тогда

$$3\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$$ – сходится по неравенству

Ответ: сходится.

№5.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sin x)}{x\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ \text{в.т. } x = 0; \\ 0 \le \sin x \le \sin 1 \end{array} \right|$$

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{x\sqrt{x}} \ge \frac{\ln 1}{x\sqrt{x}} = \frac{e}{x^{3/2}} = g(x)$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = e\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$$ $\alpha = 3/2 > 1$, след.

$$\int_0^1 g(x)\,dx$$ – расходится, тогда

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sin x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$ – расходится по неравенству

Ответ: расходится