Прищепенко РК2 В12.

Теория:

№1. Определителем Вронского системы вектор-функций

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \dots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ \dots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \dots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

называется определитель

$$W = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

№2. Рассм. линейное ОДУ: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, где $a_1$ и $a_2 \in R$.

Хар-е ур-е: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

Пусть характ-е ур-е имеет один веществ. корень кратности 2, $\lambda_0$. Тогда ФСР этого ур-я образуют ф-ции: $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ и $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$; а общее решение ур-я: $y = (C_1 + C_2)e^{\lambda_0 x}$. Т.к. $\lambda_0$ - корень кратности 2 характеристического ур-я, то

$\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2 = 0$; $2\lambda_0 + a_1 = 0$

Далее $y_2' = (1 + \lambda_0 x)e^{\lambda_0 x}$, $y_2'' = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x)e^{\lambda_0 x}$

Отсюда $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = e^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + \lambda_0^2 x + a_1 + a_1\lambda_0 x + a_2 x) =$

$= e^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + a_1 + x(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2)) = 0$, т.е.

$y_2$ - решение диф. ур-я

Определитель Вронского не равен нулю, и $y_1$ и $y_2$ образуют ФРС ДУ.

Практика:

№1. Составить линейное неоднородное ~~ур~~ диф. ур-е, общее решение которого имеет вид $y = Cx + e^x$.

Решение:

$$C = \frac{y - e^x}{x} \; ; \quad y' = c + e^x$$

$$y' = \frac{y - e^x}{x} + e^x$$

Ответ: $y' = \dfrac{y - e^x}{x} + e^x$

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения $yy'' + (y')^2 = 3(y')^3$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение:

пусть $\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p \cdot p' \end{cases} \Rightarrow \; y \cdot pp' + p^2 - 3p^3 = 0$

$$yp' + p - 3p^2 = 0 \qquad yp' = 3p^2 - p$$

$$y\frac{dp}{dy} = 3p^2 - p \qquad \frac{dp}{3p^2 - p} = \frac{dy}{y}$$

пусть $u = \left(3 - \frac{1}{p}\right)$; $du = \dfrac{dp}{p^2}$; $dp = du \cdot p^2$

$$\frac{dp}{\left(3 - \frac{1}{p}\right)p^2} = \frac{p^2 du}{u \cdot p^2} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln\left|3 - \frac{1}{p}\right| = \ln|y| + c, \; \forall c$$

$$\ln\left|3 - \frac{1}{p}\right| = \ln|y| + c_1, \; \forall c_1 > 0$$

$$3 - \frac{1}{p} = yc_2, \; \forall c_2 \neq 0$$

$p = y' = 1$, $y = 1$ $\quad C_2 = 2 \quad 3 - 2y = \dfrac{1}{y'}$

$$y' = \frac{1}{3 - 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3-2y} \qquad (3-2y)dy = dx$$

$$3dy - 2ydy = dx$$

$$3y - 2y^2 \cancel{dy} = x + C_3$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3\cdot 1 - 2\cdot 1^2 = 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 1$$

Ответ: $-2y^2 + 3y = x + 1$.

№3. Найти общее решение ОДУ $y'' + y = tg\,x \cdot sec\,x$

Решение:

$$y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Характеристическое ур-е: $k^2 + 1 = 0$

$$k = \pm i$$

$$ФСР = \{e^0 \cos x ; e^0 \sin x\} \qquad y_{oo} = C_1 e^0 \cos x + C_2 e^0 \sin x$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot \sin x \\ \cdot \cos x \end{array} \right. \text{"+"}$$

$$C_2' \sin^2 x + C_2' \cos^2 x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_2' = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_2 = -\ln|\cos x| + \tilde{C}_2$$

$$k_{12} = \alpha + \beta i \Rightarrow ФСР: \{e^\alpha \cos\beta, e^\alpha \sin\beta\}$$

$$-C_1' \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0$$

$$C_1' = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad C_1 = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = tg\,x - x + \tilde{C}_1$$

Ответ:

$$y_{OH} = (tg - x + \tilde{C}_1)\cos x + (-\ln|\cos x| + \tilde{C}_2)\sin x.$$

№4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэф.)

$$y^{V}+4y'''=x-x^3+xe^x+\sin 2x$$

Решение:

Хар-е ур-е: $k^5+4k^3=0 \quad k^3(k^2+4)=0$

$$\left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=2i \\ k=-2i \end{array}\right.$$

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x$

~~$f_1(x)=2x2 \Rightarrow \alpha=0$~~

$$f=\underbrace{x}_{f_1}-\underbrace{x^3}_{f_2}+\underbrace{xe^x}_{f_3}+\underbrace{\sin 2x}_{f_4}$$

$f_1=x \Rightarrow \alpha=0=k_1=k_2=k_3 \Rightarrow r=3,$ ~~[illegible]~~

$n=1$

$y_{чн1}=(A_1x+B_1)e^0\cdot x^3$

$f_2(x)=-x^3=-x^3e^0 \Rightarrow \alpha=0,\ n=3,\ \alpha=k_1=k_2=k_3 \Rightarrow r=3$

$y_{чн2}=(A_2x^3+B_2x^2+C_2x+D_2)e^0x^3$

$f_3(x)=xe^x \Rightarrow \alpha=1,\ n=1,\ r=0$

$y_{чн3}=(A_3x+B_3)e^1\cdot x^0$

$f_4(x)=\sin 2x=e^0\sin 2x \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=2 \Rightarrow r=1$

$y_{чн4}=A_4(\cos 2x+B_4\sin 2x)\,x^1\cdot e^0$

Ответ:

$$y_{он}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x+(A_1x+B_1)x^3+$$
$$+(A_2x^3+B_2x^2+C_2x+D_2)x^3+(A_3x+B_3)e+$$
$$+(A_4\cos 2x+B_4\sin 2x)x$$