РК 2 Репников Д. ИУ1-21

Вариант 13.

Теория.

1. Фундаментальной системой решений линейного однородного ОДУ называется базис решений этого уравнения. Если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – ФСР линейного ОДУ, то общее решение – $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$, где $C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные

2. Рассмотрим линейное ОДУ $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, где a_1 и a_2 – вещественные числа. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Пусть λ_1 и λ_2 – различные корни хар. уравнения. Тогда ФСР дифференциального уравнения образуют функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, а общее решение имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$ таким образом y_1 и y_2 ЛНЗ и образуют ФСР данного ОДУ.

Практика

1. $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 1$; $\lambda_4 = -3$.

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)=0$$

$$(\lambda-0)(\lambda-0)(\lambda-1)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda^4+2\lambda^3-3\lambda^2=0$$

$$\underline{y^{(IV)}+2y'''-3y''=0} \text{ - ДУ}$$

ФСР ЛОДУ $:= \{e^{0\cdot x}, x\cdot e^{0\cdot x}, e^{1\cdot x}, e^{-3x}\} =$

$$= \{1, x, e^x, e^{-3x}\}$$

$\underline{y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-3x}}$: общее решение.

2.

$1+(y')^2 = 2yy''$; $y=1$; $y'=1$ при $x=1$

$$\begin{cases} 1+(y')^2 = 2yy'' \\ y(1)=1 \\ y'(1)=1 \end{cases}$$

$$2yy''-(y')^2-1=0$$

Пусть $y'=p$; $y''=p\cdot p'$

$$1+p^2 = 2y\cdot pp'$$

$$1+p^2 = 2yp\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2p\,dp}{1+p^2}$$

$$\ln|y| = \ln|p^2+1| + \ln|C_1|$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = \ln|p^2+1|$$

$$p^2+1 = \frac{y}{C_1};$$

$$(y')^2 = \frac{y}{C_1} - 1$$

$$y'(1)=1;\ y(1)=1:\ 1 = \frac{1}{C_1} - 1;\ C_1 = \frac{1}{2}$$

$$y' = \pm\sqrt{2y-1}$$

т.к $y'(1)=y(1)=1>0 \Rightarrow y'=\sqrt{2y-1}$.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y-1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = dx.$$

$$\sqrt{2y-1} = x + C_2$$

$$\sqrt{2\cdot1-1} = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\sqrt{2y-1} = x$$

Ответ: $\sqrt{2y-1} = x$.

3. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin^3 3x}$

$y'' + 9y = 0$

$k^2 = -9$

$k = \pm 3i$

ФСР ЛОДУ $= \{\cos 3x; \sin 3x\}$

$y_{oo} = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x$; $\forall C_1, C_2$ - ф. от x

$$\begin{cases} C_1' \cos 3x + C_2' \sin 3x = 0 \\ -C_1' \sin 3x + C_2' \cos 3x = \frac{1}{\sin^3 3x} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot \sin 3x \\ \cdot \cos 3x \end{array} \right. +$$

$$C_2' = \frac{\cos 3x}{\sin^3 3x}$$

$$C_2 = \int \frac{\cos 3x}{\sin^3 3x} dx = -\frac{1}{6\sin^2(3x)} + \tilde{C}_2, \forall \tilde{C}_2$$

$$C_1' \cos 3x = -C_2' \sin 3x$$

$$C_1' = -\frac{\cancel{\cos 3x}}{\sin^3 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{\cancel{\cos 3x}} = -\frac{1}{\sin^2 3x}$$

$$C_1 = -\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{ctg(3x)}{3} + \tilde{C}_1$$

$$y_{он} = \left(\frac{ctg(3x)}{3} + \tilde{C}_1\right)\cos 3x + \left(-\frac{1}{6\sin^2(3x)} + \tilde{C}_2\right)\sin 3x$$

Ответ: $y_{он} = \left(\frac{ctg(3x)}{3} + \tilde{C}_1\right)\cos 3x + \left(-\frac{1}{6\sin^2(3x)} + \tilde{C}_2\right)\sin 3x.$

4. $y^{(V)}+9y'''=1-x^3+x-x^2e^{2x}+(x-1)\cos 3x$

$y^{(V)}+9y'''=0$

$k^4+9k^3=0$

$k^3(k+9)=0$

$\left[\begin{array}{l} k_{1,2,3}=0 \\ k_{4,5}=\pm 3i \end{array}\right.$

ФСР ЛОДУ: $\{1, x, x^2, \cos 3x, \sin 3x\}$

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 3x+C_5\sin 3x$

$f=\underbrace{1-x^3}_{f_1}+\underbrace{x}_{f_2}\underbrace{-x^2e^{2x}}_{f_3}+\underbrace{(x-1)\cos 3x}_{f_4}$

$f_1=1-x^3=(1-x^3)e^{0\cdot x}\Rightarrow \alpha=0;\ Q_n(x)=1-x^3\Rightarrow n=3$

$\alpha=0=k_1=k_2=k_3\Rightarrow r=3$

$f_2=x=x\,e^{0x}\Rightarrow \alpha=0;\ Q_n(x)=x\Rightarrow n=1$

$\alpha=0=k_1=k_2=k_3\Rightarrow r=3$

$f_3=-x^2e^{2\cdot x}\Rightarrow \alpha=2;\ Q_n(x)=-x^2\Rightarrow n=2$

$\alpha=2\neq k_{1,2,3,4,5}\Rightarrow r=0$

$f_4=(x-1)\cos 3x=(x-1)e^{0x}\cos 3x\Rightarrow \alpha=0,\ \beta=3,$

$Q_n(x) = x-1 \Rightarrow n=1$

$0 \pm 3i = k_4 = k_5 \Rightarrow r = 2,$

$\bar{y}_{rн_1} = (A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1)e^{0 \cdot x} \cdot x^3 = x^3(A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1)$

$y_{rн_2} = (A_2x + B_2)e^{0x} \cdot x^3 = x^3(A_2x + B_2)$

$y_{rн_3} = (A_3x^2 + B_3x + C_3)e^{2x} \cdot x^0 = e^{2x}(A_3x^2 + B_3x + C_3)$

$y_{rн_4} = ((A_4x + B_4) \cdot e^{0x}\cos 3x + (A_5x + B_5)e^{0x}\sin 3x) \cdot x^2 =$

$= x^2((A_4x + B_4)\cos 3x + (A_5x + B_5)\sin 3x)$

$y_{rн} = y_{rн_1} + y_{rн_2} + y_{rн_3} + y_{rн_4} = x^3(A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1) +$
$+ x^3(A_2x + B_2) + e^{2x}(A_3x^2 + B_3x + C_3) + x^2((A_4x + B_4) \cdot$
$\cdot \cos 3x + (A_5x + B_5)\sin 3x).$

Ответ: $y_{он} = y_{оо} + y_{rн} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 3x + C_5\sin 3x +$
$+ x^3(A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1) + x^3(A_2x + B_2) + e^{2x} \cdot$
$\cdot (A_3x^2 + B_3x + C_3) + x^2((A_4x + B_4)\cos 3x + (A_5x + B_5) \cdot$
$\cdot \sin 3x).$