

Вариант 13.

Решников Д. УЧ 1-21.

Теория

1. ~~Первое~~ Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ в $(a; b)$, если $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ в $(a; b)$.

2. Теорема о среднем.

Пусть $y = f(x) \in C[a; b] \Rightarrow \exists c \in [a; b], f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$, или $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

Док-во: т.к. функция непрерывна на $[a; b]$, то по Т. Вейерштрасса $\exists m, M$ - наиб. и наим. значения на $[a; b]$.

По Т. об оценке определенного интеграла
 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

По Т. ~~Болляно-Канни~~ Канни-Болляно-Канни т.к. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$; $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$

$$\exists c \in [a; b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

что и требовалось доказать.

Ррарука.

$$1. y = \frac{1}{1+x^2}$$

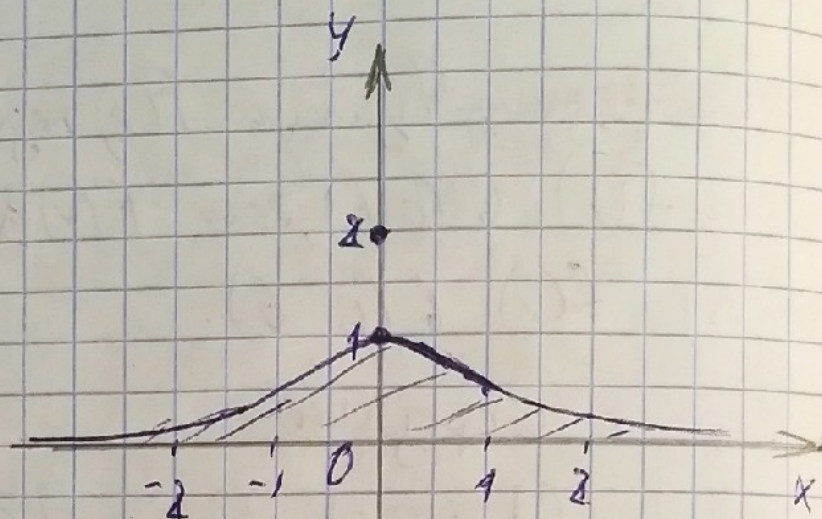
O_x ;

$$S = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= 2 \cdot \arctan(x) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$$

Обер: $S = \pi$

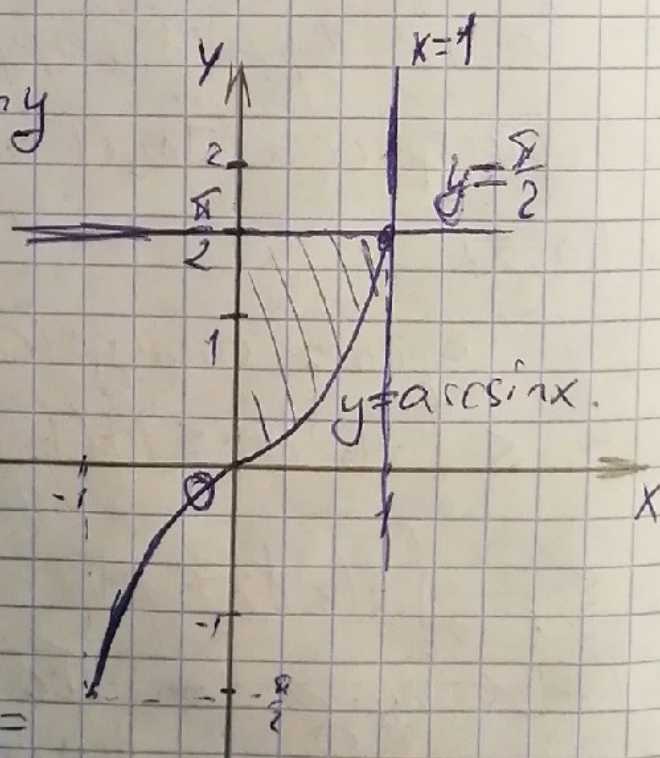


$$2. y = \arcsin x; x = \sin y$$

$$y = \frac{\pi}{2}$$

O_y ;

$$V_{Oy} = \pi \int_0^1 \arcsin^2 x dx$$



$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \int_0^1 \sin^2 y dy \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2y) dy = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(y - \frac{\sin 2y}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(2)}{2} \right) = \frac{\pi}{4} (2 - \sin(2)) = 2 \end{aligned}$$

Обер: $V = \pi - \frac{\pi}{2} \sin(2)$

$$3. y^2 = 4x; y = \pm 2\sqrt{x}$$

$$x = 3 \quad \underline{y = 2\sqrt{x}}$$

$$P = 2\pi \int_0^3 \left(2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \right) dx =$$

$$= 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x+1} dx =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} \Big|_0^3 =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2 \cdot 14}{3} = \frac{56}{3} \pi = 18\frac{2}{3} \pi$$

Ответ: $P = \frac{56}{3} \pi$.

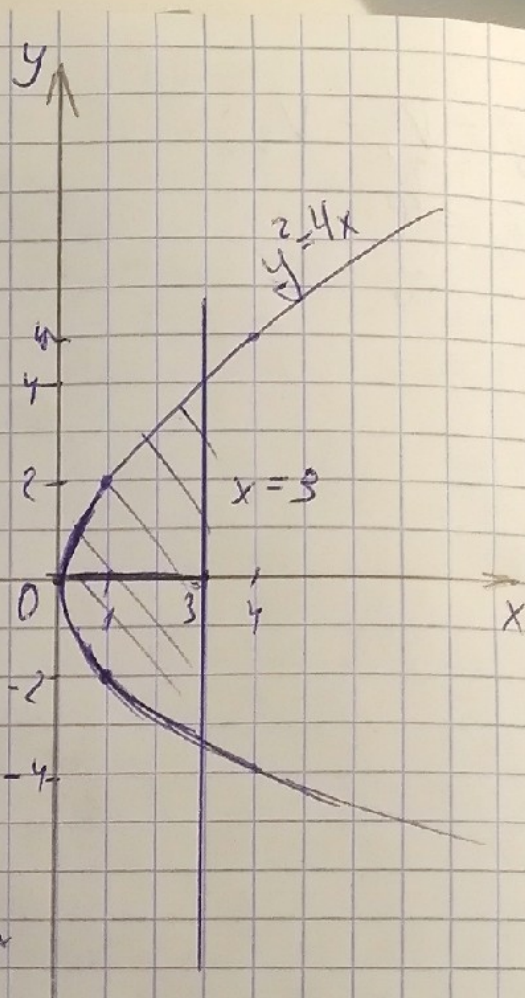
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg 5x}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$ - необходим. упр. 1-20 пара.

$$f(x) = \frac{\arctg 5x}{\sqrt[4]{x^3+1}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = g(x)$$

при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} dx; x = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ расходящаяся.

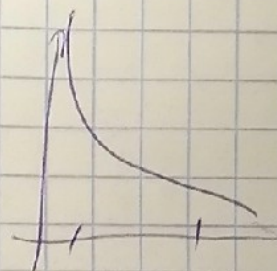


5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (e^{x^2} - 1)} = \text{need calc. unit.}$$

9-10 page

$x=0$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(e^{x^2} - 1)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\infty}{\cancel{\sqrt{x}} \cdot x^2} = \frac{\infty}{x^2} = \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(e^{x^2} - 1)} \underset{x \rightarrow +}{\sim} \frac{1}{e - 1}$$

graph $f(x)$ exists.