

Р31

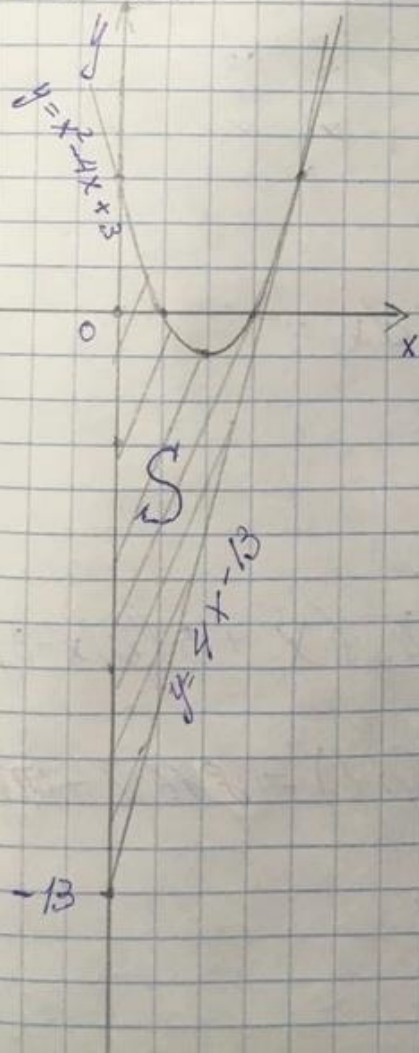
№1 Найти площадь фигуры, огр.

$y = x^2 - 4x + 3$, касат. в $x_0 = 4$ и осью OY
Найдем ур-е касательной

$$y(x_0) = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$y'(x_0) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$$

$$y_{\text{кас}} = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = 4(x - 4) + 3 = \\ = 4x - 13$$



$$S = \int_0^4 (x^2 - 4x + 3) - (4x - 13) dx =$$

$$= \int_0^4 (x^2 - 8x + 16) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right) \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{64}{3} - 64 + 64 =$$

$$= \frac{64}{3}$$

Ответ: $\frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$

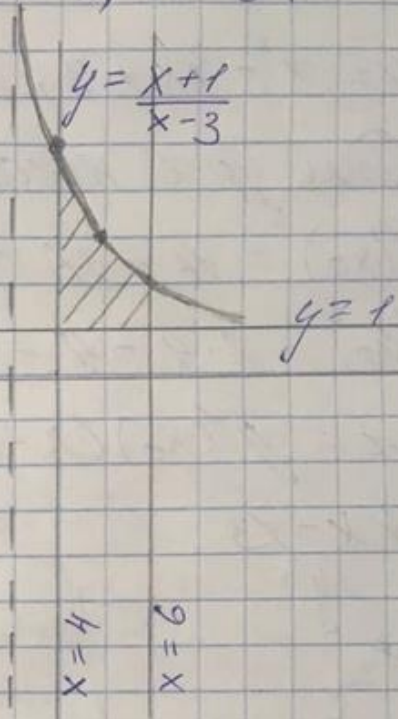
✓2 Вращается вокруг OY

$$y = \frac{x+1}{x-3}, \quad x=4, \quad y=1, \quad x=6.$$

$V_{OY} = ?$

x	4	5	6
---	---	---	---

y	5	3	1/3
---	---	---	-----



$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x y dx =$$

$$= 2\pi \int_4^6 x \left(\frac{x+1}{x-3} - 1 \right) dx =$$

$$= 2\pi \int_4^6 x \cdot \frac{4}{x-3} dx =$$

$$= 8\pi \int_4^6 \left(1 + \frac{3}{x-3} \right) dx = 8\pi \left(x + 3 \ln|x-3| \right) \Big|_4^6$$

$$= 8\pi (6-4 + 3\ln 3 - 3\ln 1) = 16\pi + 24\pi \ln 3$$

Ответ: $16\pi + 24\pi \ln 3$

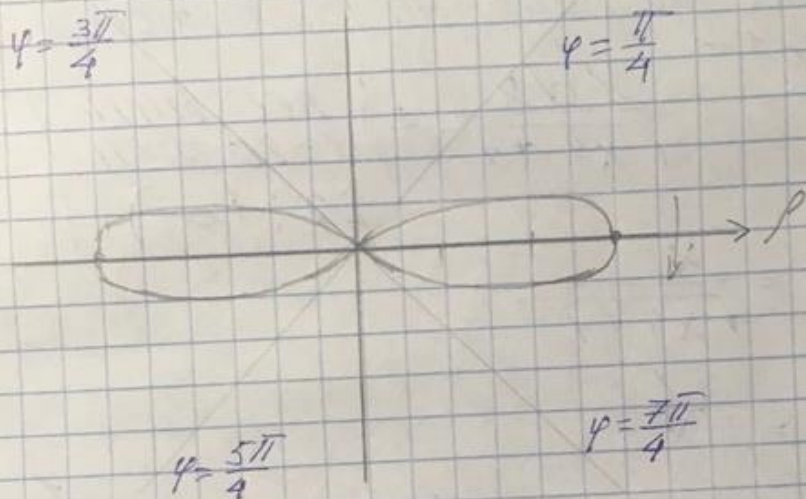
№3 $\rho^2 = 9 \cos 2\varphi$ Выч площадь поверхности.

$$\rho = 3 \sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$\rho' = -3 \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$



$$\cos 2\varphi \geq 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$S_n = S_1 \cdot 2$, где S_1 - площадь поверхности 1 лепестка

$$S_1 = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho' \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} 3\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi \sqrt{9\cos 2\varphi + \frac{9\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 18\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi =$$

$$= 18\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = -18\pi \cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= -18\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = 9\pi (2 - \sqrt{2})$$

$$S_n = 2 \cdot 9\pi (2 - \sqrt{2}) = 18\pi (2 - \sqrt{2})$$

Ответ: $18\pi (2 - \sqrt{2})$.

№ 4. Исследовать на сходимость

$$\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}} = \left| \begin{array}{l} \text{нес. инт.} \\ 1-20 \text{ года} \\ [2; +\infty) \end{array} \right|$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0 - \text{б.м.}\varnothing$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 - \text{б.м.}\varnothing$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} \right) = 1$$

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0 \quad x \in [2, +\infty)$$

по 3-му инструменту $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_2^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Передовать $\int_2^{+\infty} g(x) dx$

$$\int_2^{+\infty} g(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b g(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{x} dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(b) - \ln(2)) = \infty$$

расходится.

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ — интеграл Рихле $\alpha = 1 \Rightarrow$ расходится

Поэтому $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$ тоже расходится

по (3 инструменту) предельному признаку сравнения.

№5 Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(e^x - e^{-x})} = \left[\begin{array}{l} \text{Нес. интеграл 2-го рода} \\ \text{особ. в т. } x=0 \end{array} \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}(e^x - e^{-x})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{e^x}(e^{2x} - 1)} \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot 2x} \quad \text{при } x \rightarrow 0$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = g(x)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \text{интеграл Дрихле } \alpha = 1$$
$$\alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \text{сходится.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}(e^x - e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^x - e^{-x})} \text{ - сходится}$$

по (3 инструменту) предельному
признаку сравнения