$\frac{1}{\ } = g(x)$

Теоретическая часть. Вар 14

① Пусть фун-я $f(x)$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a; b]$. Тогда на промежутке $[a; +\infty)$ определена ф-я:

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Если существует (конечный) предел

$\lim\limits_{b \to +\infty} F(x)$, то этот предел называется несобственным интегралом (1-го рода) от ф-и $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначается:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

② Теорема об интегр. по частям в определенном интеграле.

Т. Пусть функции $u(x)$ и $V(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a\ b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x) \cdot V'(x)\,dx = u(x) \cdot V(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,V(x)\,dx$$

Доказательство: Рассмотрим ф-ю

$$F(x) = u(x) \cdot V(x) - \int_a^x u'(t) \cdot V(t)\,dt$$

имеет

$$F'(x) = u'(x) \cdot V(x) + u(x) \cdot V'(x) - u'(x) \cdot V(x) = u(x) \cdot V'(x)$$

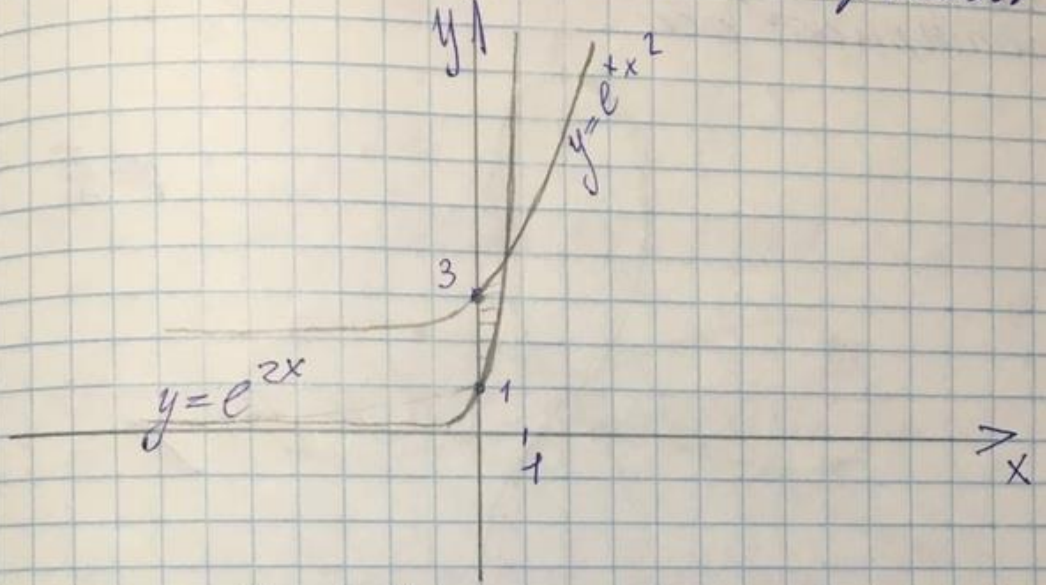
Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $u(x) \cdot V(x)$. По формуле Ньютона – Лейбница получаем

$$\int_a^b u(x) \cdot V'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = \left(u(x) \cdot V(x) - \int_a^x u'(t) \cdot V(t)\,dt\right)\Big|_a^b =$$

$$= u(x) \cdot V(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

№1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=e^{2x}$, e^x+2 и прямой $x=0$



$e^{2x}=e^x+2$ $\quad e^x=t$

$t^2-t-2=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow e^x=-1$ не подх.

$t=2 \quad e^x=2$

Следов., $x=\ln 2$

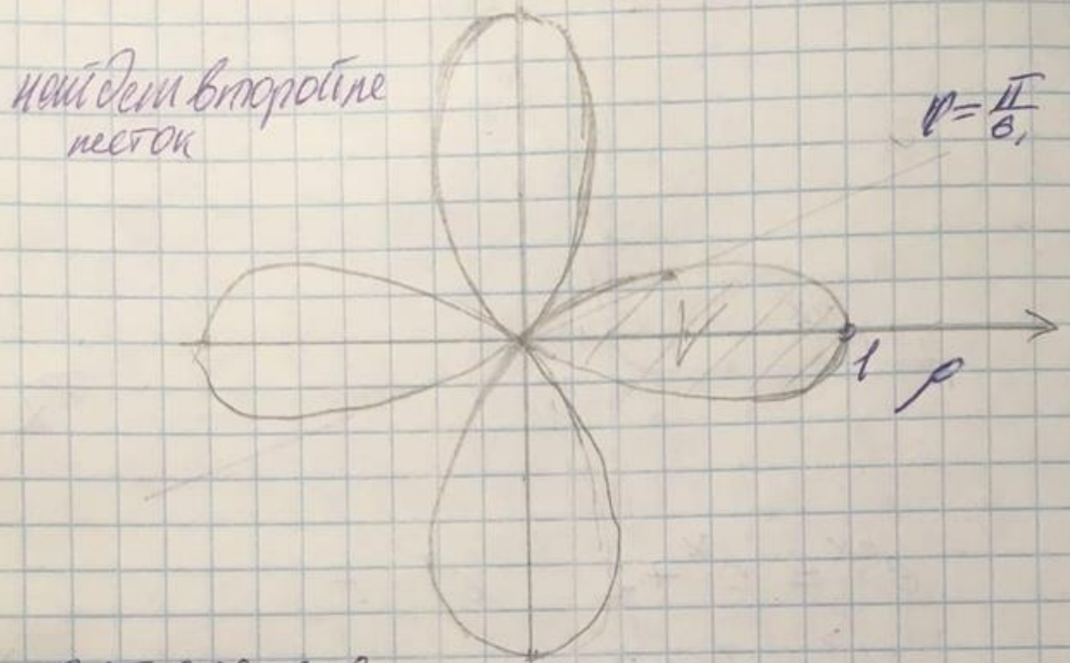
$$\int_0^{\ln(2)}(e^x+2-e^{2x})\,dx=\left(e^x+2x-\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^{\ln(2)}=$$

$$=e^{\ln(2)}+2\ln(2)-\frac{e^{2\ln(2)}}{2}-\left(e^0+2\cdot 0-\frac{e^{2\cdot 0}}{2}\right)$$

$$=2\ln(2)-\frac{1}{2}$$

Ответ: $2\ln(2)-\frac{1}{2}$

№2 Найти объем тела, полученного вращением первого лепестка кривой $\rho = \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.



$\rho = \cos 2\varphi$

φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		
ρ	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		

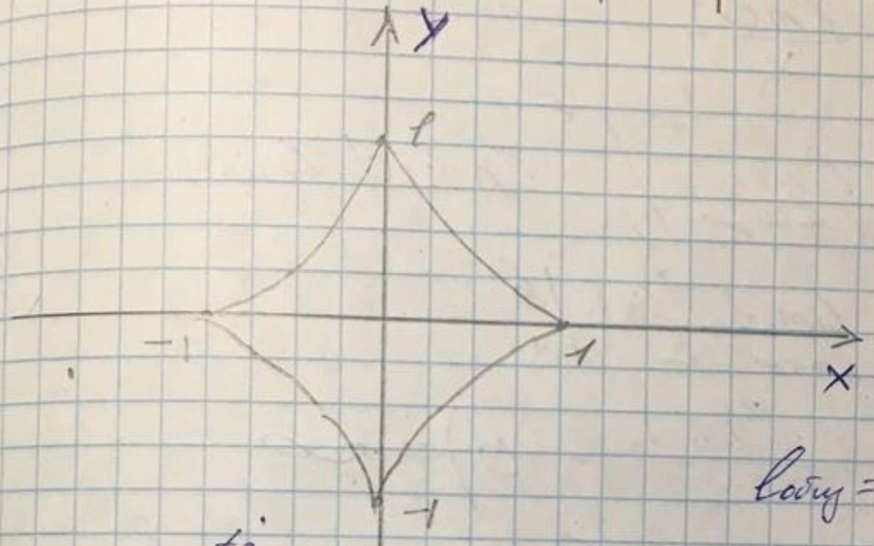
$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^3(2\varphi)\sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \left(-\frac{5\cos(7x) - 7\cos(5x) + 35\cos(3x) - 105\cos(x)}{280} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{8\sqrt{2}}{35} + \frac{8\sqrt{2}}{35} \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \frac{16\sqrt{2}}{35} = \frac{32\pi\sqrt{2}}{105}$$ — Ответ.

13 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π
x	1	0	0	-1
y	0	1	-1	0



$l_{общ} = 4 l_1$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = (-3\cos^2(t)\sin(t))^2 + $$
$$+ (3\sin^2(t)\cdot\cos(t))^2 =$$
$$= 9\cos^4(t)\cdot\sin^2(t) + 9\sin^4(\ )\cos^2(\ ) =$$
$$= 9\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) =$$
$$= 9\cos^2(t)\cdot\sin^2(t)$$

$$l_1 = \int_0^1 \sqrt{9\cos^2(t)\sin^2(t)}\, dt = \int_0^1 3\cos t \sin t\, dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{3}{2}\sin(2t)\, d\ = \frac{3}{4}(-\cos(2t))\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{-3\cos(2) + 3}{4}, \quad l = 4\cdot l_1 = 3 - 3\cos(2) \text{ - Ответ.}$$

№4 Исследовать на сходимость.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \ominus$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\ominus \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \ln(x)\, d(\ln(x)) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{\ln^2(x)}{2} \Big|_1^b =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\ln^2(b)}{2} - 0 \right) = \infty$$

инт. расходится.

№5 $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx$ Исследовать на сходимость.

нес. инт. 2 рода $\cos x$ — не явл. зн. пер.
особ. т. $x=0$. фу-ей.

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^3} \le \frac{1}{x^3} = g(x)$$

$$g(x)=\frac{1}{x^3}$$ и на $[0;\frac{\pi}{2}]$ $0 \le f(x) \le g(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^3}$$ → интеграл Дирихле $\alpha > 1$ расходится.

Следовательно $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^3}$ — расходится по признаку сходимости по неравенству.