ДЗ №2 Суркова А.D. Вариант 14.

1. $y''(1+\cos^2 y)+y'(y'+1)\sin 2y=0 \quad y(0)=0 \quad y'(0)=1.$

Отсутствует x: $F(y,y',y'')=0$ ДУ 2-го порядка

Задача Коши.

Замена $\begin{cases} y'=p(y) \\ y''=p\cdot p' \end{cases}$ => подставим в ДУ 2-го п. и получаем ДУ 1-го п.

$$p\cdot p'(1+\cos^2 y)+p(p+1)\sin 2y=0$$

$$p'(1+\cos^2 y)+(p+1)\cdot\sin 2y=0$$

$$\frac{dp}{dy}(1+\cos^2 y)=-(p+1)\sin 2y$$

$$\int\frac{dp}{p+1}=-\int\frac{\sin 2y}{1+\cos^2 y}dy$$

$$\int\frac{dp}{p+1}=\int\frac{d(p+1)}{p+1}=\ln|p+1|+C$$

$$\int\frac{\sin 2y}{1+\cos^2 y}dy=\int\frac{2\sin y\cdot\cos y}{1+\cos^2 y}dy=-\int\frac{d(\cos^2(y))}{1+\cos^2 y}=$$

$$=-\int\frac{d(\cos^2(y)+1)}{1+\cos^2(y)}=-\ln|\cos^2 y+1|+C$$

$$\ln|p+1|=\ln|\cos^2 y+1|+\ln|C_1|$$

$$p+1=(\cos^2 y+1)\cdot C_1$$

$p=C_1(\cos^2 y+1)-1$ — общее решение ДУ 1-го порядка

2) Перейдем к исходным переменным ($p=y'$)

$$y'=C_1(\cos^2 y+1)-1$$

Определим C_1: $y(0)=0 \quad y'(0)=1$

$$1=C_1(\cos^2(0)+1)-1$$

$$1=C_1+C_1-1$$

$$2=2C_1$$

$$\boxed{C_1=1}$$

$$y'=(\cos^2 y+1)-1=\cos^2 y$$

Проинтегрируем:

$$\frac{dy}{dx}=\cos^2 y \qquad \int\frac{dy}{\cos^2 y}=\int dx$$

$\operatorname{tg} y = x + C_2$

Определим C_2

$y(0)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} 0 = 0 + C_2$

$\boxed{C_2 = 0}$

$\operatorname{tg} y = x$

$y = \operatorname{arctg} x$ – частное решение исходного ДУ.

Ответ: $y = \operatorname{arctg} x$

② $(1+x)^2(2xy'' + y') + 2\sqrt{x} = 0$

$F(x, y', y'') = 0$ явно отсутствует y

Замена: $\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases}$

Подставим в исходное ДУ

$(1+x)^2(2xp' + p) + 2\sqrt{x} = 0 \; : (1+x)^2 \neq 0 \quad x \neq -1$ выполняется

$2xp' + p = -\dfrac{2\sqrt{x}}{(1+x)^2}$ т.к. $\sqrt{x}$, то $x \geq 0$

Метод Лагранжа

1) Решим ЛОДУ с раздел. пер.

$2xp' + p = 0 \qquad 2x\dfrac{dp}{dx} = -p \qquad \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dx}{2x}$

$\int \dfrac{dp}{p} = -\int \dfrac{dx}{2x}$

$\ln|p| = -\dfrac{1}{2}\ln|x| + \ln|C_1|$

$p = \dfrac{C_1}{\sqrt{x}}$ – общее решение ЛОДУ

2) $C_1 = C_1(x) \qquad p = \dfrac{C_1(x)}{\sqrt{x}}$

$p' = \dfrac{C_1'(x)\cdot\sqrt{x} - \dfrac{C_1(x)}{2\sqrt{x}}}{x}$

$2x\left(\dfrac{C_1'(x)\sqrt{x} - \dfrac{C_1(x)}{2\sqrt{x}}}{x}\right) + \dfrac{C_1(x)}{\sqrt{x}} = -\dfrac{2\sqrt{x}}{(1+x)^2}$

$$2\sqrt{x}\,C_1'(x) - \frac{C_1(x)}{\sqrt{x}} + \frac{C_1(x)}{\sqrt{x}} = -\frac{2\sqrt{x}}{(1+x)^2}$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\int d(C_1(x)) = \int \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{1+x} + C_2$$

$$p = \frac{\frac{1}{1+x} + C_2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} + \frac{C_2}{\sqrt{x}}$$

Обратная замена.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} + \frac{C_2}{\sqrt{x}}$$

$$\int dy = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + C_2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ dx = dt \cdot 2\sqrt{x} \\ x = t^2 \end{array} \right\} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg}|t| + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$$

$y = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + C_3$ – общее решение

Ответ: $y = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cdot C_2 + C_3$

(3) Записать общее решение однородного уравнения. Указать вид частного решения неоднородного ур-я (без вычисления коэффициентов)

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = xe^x + x^2 + \cos 2x + e^x + e^x \sin x - 4$$

$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ – ЛОДУ

Хар. ур-е: $k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0$

$$(k-1)^2(k-2) = 0$$

$$k_1 = k_2 = 1 \quad k_3 = 2$$

$$\text{ФСР } \{e^x;\ x\cdot e^x;\ e^{2x}\}$$

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x}$$

$$f = \underline{xe^x} + x^2 + \cos 2x + \underline{e^x} + e^x \sin x - 4$$

$f_1 = (x+1)e^x \quad f_2 = \cos 2x \quad f_3 = e^x \sin x \quad f_4 = x^2 - 4$

$f_1 = e^x(x+1) \Rightarrow \alpha = 1 \quad Q_n(x) = x+1 \Rightarrow n = 1$

$\alpha = 1 = k_1 = k_2 \Rightarrow r = 2$

$y_{чн1} = (A_1 x + B_1) e^x \cdot x^2$

$f_2 = \cos 2x \cdot e^{0 \cdot x} \quad \alpha = 0 \quad Q_n(x) = 0 \Rightarrow n = 0$

$0 \pm 2i \Rightarrow r = 0$

$y_{чн_2} = A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x$

$f_3 = e^x \cdot \sin x \quad \alpha = 1 \quad Q_n(x) = 0 \Rightarrow n = 0$

$1 \pm i \Rightarrow r = 0$

$y_{чн3} = e^x (A_3 \cos x + B_3 \sin x)$

$f_4 = x^2 - 4 \quad \alpha = 0 \quad Q_n(x) = x^2 - 4 \quad n = 2$

$\alpha = 0 \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3 \Rightarrow r = 0$

$y_{чн4} = A_4 x^2 + B_4 x + C_4$

$y_{чн} = (A_1 x + B_1) e^x \cdot x^2 + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + (A_3 \cos x + B_3 \sin x) e^x +$
$+ A_4 x^2 + B_4 x + C_4$

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x + C_3 \cdot e^{2x} + (A_1 + B_1) e^x \cdot x^2 +$
$+ A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + (A_3 \cos x + B_3 \sin x) e^x + A_4 x^2 + B_4 x + C_4$

④ $\underset{\text{ЛНДУ}}{y'' - 8y' + 15y} = -2e^{3x} - 15x - 7 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

Решение: $y'' - 8y' + 15y = 0$ - ЛОДУ

$k^2 - 8k + 15 = 0$

$(k-3)(k-5) = 0$

$k_1 = 3 \quad k_2 = 5$

ФСР ЛОДУ: $= \{e^{3x}; e^{5x}\}$

$y_{оо} = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 e^{5x}$

$f = \underbrace{-2e^{3x}}_{f_1} \underbrace{-15x - 7}_{f_2}$

$f_1 = -2e^{3x} \quad \alpha = 3 \quad Q_n(x) = -2 \Rightarrow n = 0$

$y_{чн_1} = A\ e^{3x} \cdot x \quad \alpha = 3 = k_1 \Rightarrow r = 1$

$f_2 = -15x - 7 \quad \alpha = 0 \quad Q_n(x) = -15x - 7 \Rightarrow n = 1$

$\alpha = 0 \neq k_1 \neq k_2 \Rightarrow r = 0$

$y_{чн_2} = Bx + C$

$y_{чн} = Ae^{3x} \cdot x + Bx + C$

$y'_{чн} = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} + B$

$y''_{чн} = 3Ae^{3x} + 3A \cdot e^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9A \cdot xe^{3x}$

Подставим в исходное ДУ

$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 8Ae^{3x} - \cancel{24Axe^{3x}} - 8B + 15Ae^{3x}x + 15Bx + 15C = -2e^{3x} - 15x - 7$

$-2Ae^{3x} - 8B + 15Bx + 15C = -2e^{3x} - 15x - 7$

$-2Ae^{3x} = -2e^{3x} \Rightarrow A = 1$

$15Bx = -15x \Rightarrow B = -1$

$-8B + 15C = -7$

$8 + 15C = -7 \quad \Rightarrow C = -1$

$y_{чн} = Ae^{3x} \cdot x + Bx + C = e^{3x} \cdot x - x - 1$

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x} + e^{3x} x - x - 1$

Начальные условия $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$$\begin{cases} y_{он} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x} + e^{3x} \cdot x - x - 1 \\ y' = 3C_1 e^{3x} + 5C_2 e^{5x} + e^{3x} + 3xe^{3x} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 - 1 \\ 0 = 3C_1 + 5C_2 + 1 - 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{5C_2}{3} \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -3 \\ C_1 = 5 \end{cases}$$

$y_{он} = 5 \cdot e^{3x} - 3e^{5x} + e^{3x} x - x - 1$

⑤ Найти решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего линейного однородного уравнения

$$x^2y'' - x(x-2)y' + (x+2)y = x^3e^3, \; y_1 = x \; - \text{ЛНДУ}$$

Разделим на $x^2 \neq 0$

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = xe^3$$

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0 - \text{ЛОДУ}$$

$$p_1(x) = -\frac{x+2}{x} \qquad f(x) = xe^x$$

Найдем y_2 - частное решение ЛОДУ

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

$$\boxed{\begin{gathered} -\int\left(-1 - \frac{2}{x}\right)dx = x + 2\ln|x| + C \\ e^{x+2\ln|x|} = e^x \cdot x^2 \end{gathered}}$$

$$y_2 = x \int \frac{x^2 \cdot e^x}{x^2} dx = x \cdot e^x + C = \left| \overset{\text{пусть}}{C=0} \right| = x \cdot e^x$$

$y_1 = x$

$y_2 = x \cdot e^x$

ФСР ЛОДУ: $\{x; \; xe^x\}$

$$y_{оо} = C_1 x + C_2 x e^x$$

Метод Лагранжа: $y_{он} = C_1(x)x + C_2(x)x \cdot e^x$

$C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ найдем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x)(x)' + C_2'(x)(x \cdot e^x)' = x \cdot e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} xC_1' + x \cdot e^x C_2' = 0 \\ C_1' + C_2'(e^x + x \cdot e^x) = x \cdot e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -e^x C_2' \\ C_1' + C_2' \cdot e^x + C_2' x \cdot e^x = x \cdot e^x \end{cases}$$

$$\cancel{-e^x C_2'} + \cancel{e^x \cdot C_2'} + e^x \cdot x \cdot C_2' = x \cdot e^x$$

$$\cancel{e^x} \cancel{x} \cdot C_2' = \cancel{x} \cancel{e^x} \Rightarrow C_2' = 1$$

$$\begin{cases} C_2' = 1 \\ C_1' = -e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(x) = \int -e^x dx = -\int e^x dx = -e^x + \widetilde{C_1} \\ C_2(x) = \int 1 dx = x + \widetilde{C_2} \end{cases}$$

$$y_{он} = (-e^x + \widetilde{C_1})x + (x + \widetilde{C_2})xe^x =$$

$$= -xe^x + \widetilde{C_1}x + x^2e^x + \widetilde{C_2}\, xe^x = \underbrace{\widetilde{C_1}x + \widetilde{C_2}xe^x}_{y_{оо}} + \underbrace{x^2e^x - xe^x}_{y_{чн}}$$