

Гуркова А.Д. Вариант 14

КР2, Диф. ур-я 1-го порядка

① Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

$$xyy' = y^2 + 2x^2$$

однородное ДУ

$$z = \frac{y}{x}$$

$$x \cdot y \neq 0$$

$$y' = \frac{y^2 + 2x^2}{x \cdot y}$$

$$y = zx$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{z^2x^2 + 2x^2}{x \cdot z \cdot x}$$

$$\Rightarrow z'x + z = \frac{z^2 + 2}{z}$$

$$z'x + z = z + \frac{2}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{z}{2} dz$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} z^2 + C$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \frac{y^2}{x^2} + C - \text{общее решение}$$

② $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx; (1 + e^{2x}) \neq 0 \forall$

$$y^2 dy = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})} dx$$

- Диф. ур-е с
разд. переменными

$$\int y^2 dy = \int \frac{e^x}{(1 + e^{2x})} dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C - \text{общее решение}$$

Классифицировать каждое из уравнений и решить задачу Коши:

③ $y' + xy = x^3 y^3$ $y(0) = 2$ — ур-е Бернулли

$$y(x) = u(x) v(x)$$

$$y'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$

$$u'(x) v(x) + u(x) v'(x) + x u(x) v(x) = x^3 u^3(x) v^3(x)$$

$$u'(x) v(x) + u(x) (v'(x) + x v(x)) = x^3 u^3(x) v^3(x)$$

$$v'(x) + x v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int x dx$$

$$\ln|v| = -\frac{x^2}{2}$$

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$u'(x) v(x) = x^3 u^3(x) v^3(x) \Rightarrow u'(x) = x^3 u^3(x) v^2(x)$$

$$\frac{du}{dx} = x^3 u^3 v^2 \Rightarrow \int \frac{du}{u^3} = \int (e^{-\frac{x^2}{2}})^2 \cdot x^3 dx$$

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x \cdot x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int v^2 \cdot e^{-x^2} dx^2 = |x^2 = t| =$$

$$= \frac{1}{2} \int t \cdot e^{-t} dt = -\frac{1}{2} \int t de^{-t} = -\frac{1}{2} t \cdot e^{-t} +$$

$$+\frac{1}{2} \int e^{-t} dt = -\frac{1}{2} t \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} (-e^{-t}) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2} (1+x^2) e^{-x^2} + C$$

$$u(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{(1+x^2) e^{-x^2} + C}}$$

$$y(x) = \pm \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(1+x^2) e^{-x^2} + C}}$$

$$2 = \sqrt{1+C}$$

$$C = -\frac{3}{4}$$

$$2 = -\frac{1}{\sqrt{1+C}}$$

∅

Ответ: $y(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(1+x^2) e^{-x^2} - \frac{3}{4}}}$

$$(4) \quad \left(\sin y - \frac{x}{y}\right) y' = 1 \quad y(1) = \pi$$

$$\sin y - \frac{x}{y} = \frac{dx}{dy}$$

$$x'_y + \frac{x}{y} = \sin y \quad \text{— AHDY omh. } x(y)$$

$$1. \quad x'_y + \frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln |x| = -\ln |y| + \ln |c|$$

$$x = c \cdot \frac{1}{y}$$

$$2. \quad c = c(y)$$

$$\left(c(y) \frac{1}{y}\right)' + c(y) \frac{1}{y^2} = \sin y$$

$$c'(y) \cdot \frac{1}{y} - c(y) \cdot \frac{1}{y^2} + c(y) \frac{1}{y^2} = \sin y$$

$$c'(y) \cdot \frac{1}{y} = \sin y$$

$$\frac{d(c(y))}{dy} = y \cdot \sin y$$

$$\int d(c(y)) = \int y \cdot \sin y \, dy$$

$$c(y) = \int y(1 - \cos y) - 1 \cos y \, dy$$

$$c(y) = -y \cdot \cos y + \sin y + c_1$$

$$x(y) = \frac{\sin y - y \cos y + c_1}{y}$$

$$1 = \frac{\sin(\pi) - \pi \cos(\pi) + c_1}{\pi}$$

$$\pi = 0 + \pi + c_1$$

$$c_1 = 0$$

$$\text{Answer: } x(y) = \frac{\sin y - y \cos y}{y}$$