ИиДУ РК2 Суркова А.Д.

Вариант 14.

Теоретическая часть.

1. Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка.

Задача Коши для ОДУ n-го порядка – задача нахождения решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, называется задачей Коши и самому ур-ю.

(Из теорем Коши о существовании и единственности для нормальной системы следует, что при выполнении ее условий решение задачи Коши существует и единственно.)

2. Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ.

Пусть имеются 2 линейных неоднородных уравнения $L[y] = b_1(x)$ и $L[y] = b_2(x)$, где $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$, и пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения этих уравнений. Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения $L[y] = b_1(x) + b_2(x)$.

Доказательство: ◄ Имеем $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] =$
$= b_1(x) + b_2(x)$, т.е

$y_1 + y_2$ – решение уравнения

$L[y] = b_1(x) + b_2(x)$.

Теорема доказана. ►

① Могут ли функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{x}$ задавать фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения? Если могут, то составить это уравнение.

Решение: $W[x] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix} =$

$$= e^{-x} \cdot e^{x} + e^{-x} \cdot e^{x} = e^{0} + e^{0} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow e^{-x}, e^{x}$ ФСР (могут задавать ФСР)

$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 \cdot e^{x}$ - общее решение

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 1$

$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$ - хар. ур-ние

$y'' - y = 0$ - диф. ур-ние

② Найти частное решение дифференц. уравнения $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1, y' = 0$ при $x = 0$.

Решение: $\begin{cases} 2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ Задача Коши.

Замена 1 $\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p \cdot p' \end{cases} \Rightarrow 2yp \cdot p' + y^2 - p^2 = 0$

Замена 2 $\begin{cases} z = p^2 \\ z' = 2pp' \end{cases} \Rightarrow yz' + y^2 - z = 0 \,\Big|\, : y \neq 0$

$z' + y - \dfrac{z}{y} = 0$ - ЛНДУ

1) $z' - \frac{z}{y} = 0$ – ЛОДУ

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|z| = \ln|y| + C$$

$z_{oo} = C_1 \cdot y$ – общее решение ЛОДУ

2) $z_{он} = C_1(y) \cdot y$

$$(C_1(y)y)' - \frac{C_1(y) \cdot y}{y} = -y$$

$$C_1'(y)y + \cancel{C_1(y)} - \cancel{C_1(y)} = -y$$

$$C_1'(y)y = -y$$

$$C_1'(y) = -1$$

$$C_1(y) = \int C_1'(y) = \int -1\,dy = -y + C_2$$

$z_{он} = -y^2 + C_2 y$ $\Downarrow (z = p^2)$

$$p^2 = C_2 y - y^2$$

$$p = \sqrt{C_2 y - y^2}$$

$\Downarrow (p = y')$

$y' = \sqrt{C_2 y - y^2}$ Найдем C_2 $y'(0) = \sqrt{C_2 y(0) - y(0)}$

$$0 = \sqrt{C_2 \cdot 1 - 1}$$

$$C_2 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_2 y - y^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_2 y - y^2}} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{C_2^2}{4} - \frac{1}{4}(C_2 - 2y)^2}} = \int dx$$

$$-\frac{2}{2} \int \frac{d(C_2 - 2y)}{\sqrt{C_2^2 - (C_2 - 2y)^2}} = \int dx$$

$$-\arcsin\left(\frac{C_2 - 2y}{C_2}\right) = x + C_3$$

$$\frac{C_2 - 2y}{C_2} = \sin(-x + C_3)$$

$$y = \frac{C_2 - C_2 \sin(-x + C_3)}{2}$$

Найдем C_3 $y'(x) = +\frac{1}{2} \cdot 1(+1) \cdot \cos(-x + C_3) = \frac{\cos(-x + C_3)}{2}$

$$0 = \frac{\cos(0+C_3)}{2} \Rightarrow \cos(C_3)=0 \Rightarrow C_3=\frac{\pi}{2}$$

Частное решение

$$y = \frac{1-\sin(-x+\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1-\cos(x)}{2} = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

③ Найти общее решение ОДУ $y''+4y'+4y=e^{-2x}\operatorname{tg}x\cdot\sec x$

$y''+4y'+4y=e^{-2x}\operatorname{tg}x\cdot\sec x$ – ЛНДУ

$y''+4y'+4y=0$ – ЛОДУ

$k^2+4k+4=0$

$(k+2)^2=0$

$k_1=k_2=-2$

ФСР ЛОДУ $=\{e^{-2x}; xe^{-2x}\}$

$y_{oo}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$, $\forall\, C_1, C_2$ – const

$y_{oн}=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)\,x\,e^{-2x}$, $C_1(x), C_2(x)$ – функции от x

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x}+C_2'xe^{-2x}=0 \\ -2C_1'e^{-2x}+C_2'e^{-2x}-2C_2'xe^{-2x}=e^{-2x}\cdot\operatorname{tg}x\cdot\sec x \end{cases}\Bigg|\begin{matrix}\cdot 2\\ +\end{matrix}$$

$$C_2'\cancel{e^{-2x}}=\cancel{e^{-2x}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$C_2'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$C_2(x)=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}+\tilde{C}_2$$

$$C_1'=-C_2'x=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot x$$

$$C_1(x)=\int-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot x\,dx=\int\frac{x\,d(\cos x)}{\cos^2 x}=$$

$$=-\int x\,d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=-\frac{x}{\cos x}+\int\frac{dx}{\cos(x)} \ominus$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$= -\frac{x}{\cos x} + \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \tilde{C}_1$

$y_{он} = \left(-\frac{x}{\cos x} + \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \tilde{C}_1\right)\cdot e^{-2x} + \left(\frac{1}{\cos x} + \tilde{C}_2\right) x e^{-2x} =$

$= \tilde{C}_1 e^{-2x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + e^{-2x}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$y^{VI} - 7y^{V} + 12y^{IV} = 2x^2 - 1 - xe^{3x} + x\sin 3x$

Решение $y^{VI} - 7y^{V} + 12y^{IV} = 2x^2 - 1 - xe^{3x} + x\sin 3x$ – ЛНДО

$y^{VI} - 7y^{V} + 12y^{IV} = 0$ – ЛОДУ

$\lambda^6 - 7\lambda^5 + 12\lambda^4 = 0$

$\lambda^4(\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad \lambda_5 = 4 \quad \lambda_6 = 3$

ФСР ЛОДУ: $= \{e^{0x}, x\cdot e^{0x}, x^2\cdot e^{0x}, x^3 e^{0x}, e^{4x}, e^{3x}\} =$

$= \{1, x, x^2, x^3, e^{4x}, e^{3x}\}$

$y_{оо} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{4x} + C_6 \cdot e^{3x}$

$f(x) = \underbrace{2x^2}_{f_1} \underbrace{-1}_{f_2} \underbrace{-xe^{3x}}_{f_3} + \underbrace{x\cdot\sin 3x}_{f_4}$

$f_1 = 2x^2 = 2\cdot x^2 \cdot e^{0x} \Rightarrow \alpha = 0 \quad Q_n(x) = 2x^2 \Rightarrow n = 2$

$\alpha = 0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \Rightarrow r = 4$ – степень x

$y_{чн1} = \underline{(A_1 x^2 + B_1 x + C_1) x^4}$

$f_2 = -1 = -1\cdot e^{0x} \Rightarrow \alpha = 0 \quad Q_n(x) = -1 \Rightarrow n = 0$

$\alpha = 0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \Rightarrow r = 4$

$y_{чн2} = A_2 \cdot e^{0x} \cdot x^4 = \underline{A_2 \cdot x^4}$

$f_3 = -xe^{3x} \Rightarrow \alpha = 3 \quad Q_n(x) = -x \Rightarrow n = 1$

$\alpha = 3 = \lambda_6 \Rightarrow r = 1$

$y_{чн3} = \underline{(A_3 x + B_3)\cdot e^{3x}\cdot x}$

$$f_4 = x \cdot \sin 3x = x \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \sin 3x \Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = 3$$

$$0 \pm 3i \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_5 \neq \lambda_6 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$Q_n(x) = x \Rightarrow n = 1$$

$$y_{ЧН_4} = ((A_4 x + B_4) e^{0x} \sin 3x + (A_5 x + B_5) e^{0x} \cdot \cos 3x) x^0 =$$

$$= (A_4 x + B_4) \sin 3x + (A_5 x + B_5) \cos 3x$$

$$y_{ЧН} = y_{ЧН1} + y_{ЧН2} + y_{ЧН3} + y_{ЧН4} = (A_1 x^2 + B_1 x + \tilde{C}_1) x^4 + A_2 x^4 +$$

$$+ (A_3 x + B_3) \cdot e^{3x} \cdot x + (A_4 x + B_4) \sin 3x + (A_5 x + B_5) \cdot \cos 3x$$

$$y_{ОН} = y_{ОО} + y_{ЧН} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{4x} + C_6 \cdot e^{3x} + (A_1 x^2 + B_1 x + C_1) x^4 +$$

$$+ A_2 x^4 + (A_3 x + B_3) e^{3x} \cdot x + (A_4 x + B_4) \sin 3x + (A_5 x + B_5) \cdot \cos 3x$$