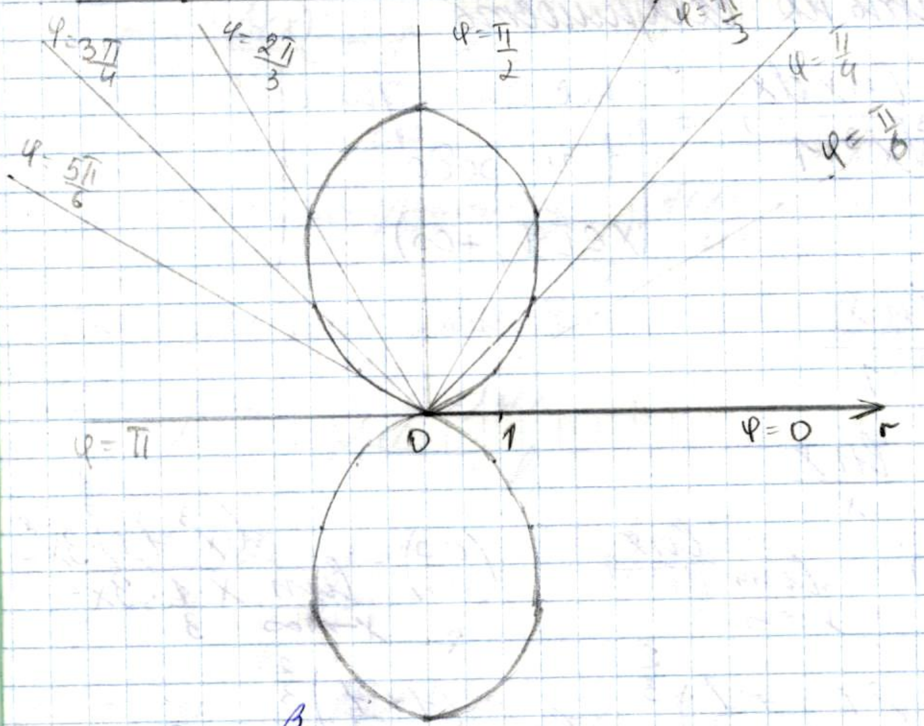
1. Найти площадь одного лепестка кривой $r = 4\sin^2\varphi$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π		
r	0	1	2	3	4	3	1	0		



$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$S_{\text{лепест.}} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^4\varphi\,d\varphi = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 2\varphi - 2\cos 2\varphi)\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4\varphi}{2} - 2\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$4\left(\frac{3}{2}\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}-\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=4\cdot\frac{3\pi}{4}=3\pi$$

Ответ: $S_{\text{лепестка}}=3\pi$

№4

Исследовать на сходимость

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\left|\begin{array}{l}\text{нес. интеграл}\\ \text{1-го рода}\\ x\in[1;+\infty)\end{array}\right|$$

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

$$g(x)=\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}{x\cdot\frac{1}{3}\cdot 3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$f(x)$ и $g(x)$ - б.м.ф. при $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\cdot\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=1\Rightarrow f(x)\sim g(x),\ \text{при } x\to+\infty$$

$f(x)>0,\ g(x)>0,\ x\in[1,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{\infty}{\underset{\#}{1}}\neq 0$$

По 3-му инструменту $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$

сходится или расходится одновременно

Исследуем $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} g(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\ln x}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\ln x\,d\ln x=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 b}{2}-0\right)=\infty\Rightarrow\int_1^{+\infty} g(x)\text{ — расходящаяся}$$

Отсюда $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx$ тоже расходится

по предельному признаку сравнения

№5

Исследовать на сходимость

$$\int_{0,1}^{1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{нес. инт. 2-го рода} \\ x \in [0{,}1;\ 1]. \text{ особ. в т. } x=1 \\ \sin\frac{1}{x} - \text{знакопеременная ф-ия} \end{array}\right|$$

По ~~тет~~ 4-ому инструменту

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x}}\right| = \frac{|\sin\frac{1}{x}|}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}} = g(x)$$

Исследуем $\int_{0,1}^{1} g(x)\,dx = \int_{0,1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$$\int_{0,1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0,1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{0,1}^{1-\varepsilon} \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -2\sqrt{1-x}\,\Big|_{0,1}^{1-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1-1+\varepsilon} - \sqrt{1-0{,}1}\right) =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon} + 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{0{,}9} = 2\sqrt{0{,}9} \Rightarrow$$

$\int_{0,1}^{1} g(x)\,dx$ сходится

$$\int_{0,1}^{1} |f(x)|dx = \int_{0,1}^{1} \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x}}\right| dx$$ сх-ся по нер-ву

$$\int_{0,1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0,1}^{1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$ сх-ся абсолютно по признаку абсолютной сходимости

№2

$$\begin{cases} y = x \\ y = x + \sin^2 x \\ x \in [0; \pi] \end{cases}$$ – линии, ограничивающие крив. трапецию

Найдем т. пересечения: $x = x + \sin^2 x$

$\sin x = 0$

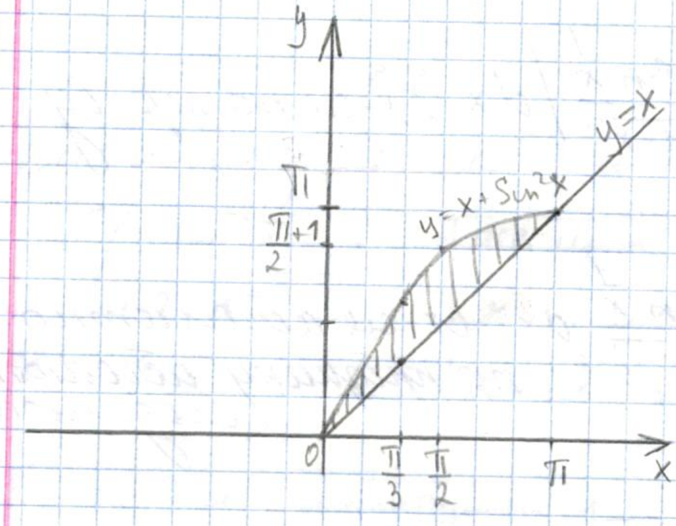
$x = 0, \quad x = \pi$

$y = x$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

$y = x + \sin^2 x$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
y	0	$\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{2\pi}{3}+\frac{3}{4}$	π



$$V_{Oy} = V_1 - V_2$$

$$V_1 = 2\pi\int_0^{\pi} x(x+\sin^2 x)\,dx = 2\pi\int_0^{\pi}(x^2 + x\sin^2 x)\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x\cos 2x}{2}\right)dx = 2\pi\left(\int_0^{\pi} x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,dx\right.$$

$$\left.- \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx\right) = 2\pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\cdot x^2\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{x\sin 2x}{2} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{\cos 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi}\right) = 2\pi\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{2\pi^4}{3} + \frac{\pi^3}{2}$$

$$=$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^{\pi} x^2 dx = 2\pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^4}{3}$$

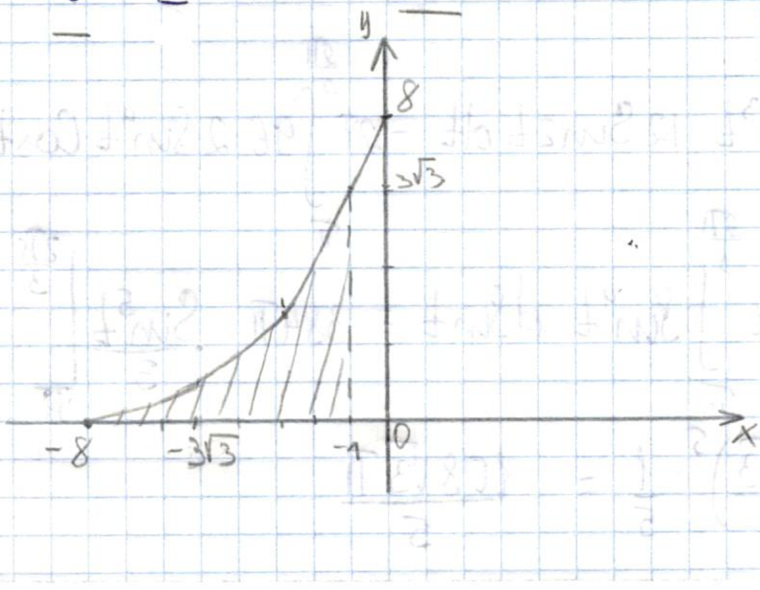
$$V_{oy} = \frac{2\pi^4}{3} + \frac{\pi^3}{2} - \frac{2\pi^4}{3} = \frac{\pi^3}{2}$$

Ответ: $V_{oy} = \frac{\pi^3}{2}$

№3.

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases} \qquad x \leq -1 \qquad Q_{ox} - ?$$

t	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	-8	$-3\sqrt{3}$	$-2\sqrt{2}$	-1	0
y	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$2\sqrt{2}$	$\underline{3\sqrt{3}}$	8



$$\Theta_{ox} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = (-24\cos^2 t \sin t)^2 + (24 \sin^2 t \cos t)^2 =$$

$$= 576 \cos^4 t \sin^2 t + 576 \sin^4 t \cos^2 t =$$

$$= 144 \cdot \cos^2 t \cdot 4 \cos^2 t \sin^2 t + 144 \sin^2 t \, 4 \sin^2 t \cos^2 t =$$

$$= 144 \cos^2 t \sin^2 2t + 144 \sin^2 t \sin^2 2t =$$

$$= 144 \sin^2 2t \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) = 144 \sin^2 2t$$

$$\Theta_{ox} = 2\pi \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} 8 \sin^3 t \sqrt{144 \sin^2 2t}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} 8 \sin^3 t \cdot 12 \sin 2t\, dt = 2\pi \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} 96 \cdot 2 \sin^4 t \cos t\, dt =$$

$$= 2\pi \cdot 192 \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^4 t \, d\sin t = 384\pi \left. \frac{\sin^5 t}{5} \right|_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= 384\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{108\sqrt{3}\,\pi}{5}$$