Вариант 15 Теория
Федоренко Дарья
ИУ1-21

1. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла II-го рода

Несобственным интегралом II-го рода или интегралом от неограниченной ф-ии на интервале $[a;b)$ называется предел

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon}$$

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл II-го рода сходящийся

2. Сформулировать и доказать теорему Ньютона-Лейбница.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x)$$

Док-во: Пусть $F(x)$ - любая первообразная ф-ии $f(x)$

$J(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ - первообразная ф-ии $f(x)$ (по теореме о производной интеграла с переменным пределом) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$, $C = const$

1) Положим $x = a$: $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$ $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

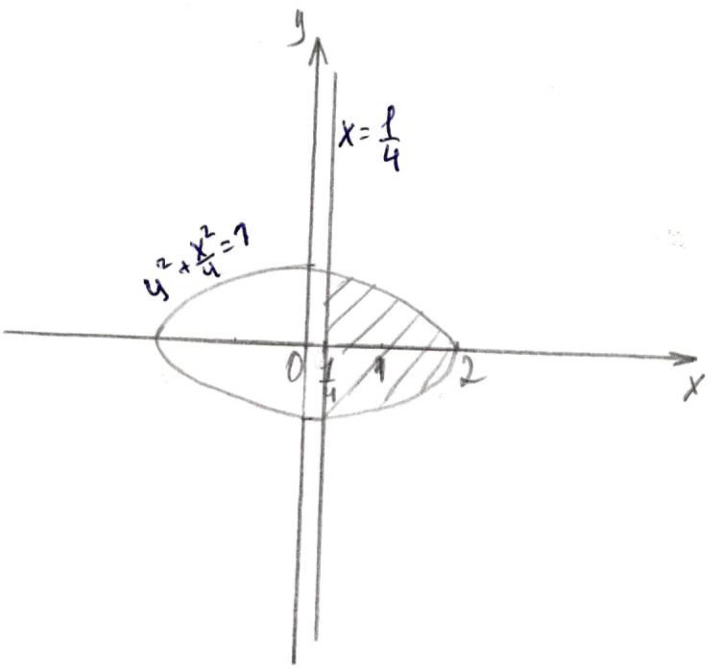
2) Положим $x = b$: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$, где $F(x)$ - первообразная ф-ии $f(x)$

чтд.

Вариант 15
Федоренко Д.
ИУ1-21

1. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

$x = \frac{1}{4}$, $M(2;0)$



t	0	π/2	π	3π/2	2π
x	2	0	-2	0	2
y	0	1	0	-1	0

$\cos t = \frac{x}{2}$; $\sin t = y$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S = 2\int_{\frac{1}{4}}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{4-x^2}\,dx \\ du = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\,dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{4-x^2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{2} - \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = x\sqrt{4-x^2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{2} - \left(\int_{\frac{1}{4}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\right.$$

$$= x\sqrt{4-x^2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{2} - \int_{\frac{1}{4}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx + 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{2}$$

$$2\int_{\frac{1}{4}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = x\sqrt{4-x^2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{2} + 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{1}{4}}^{2} = -\frac{\sqrt{63}}{16} + \dots$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{63}}{32} + \pi - 2\arcsin\frac{1}{8} = \pi - \frac{3\sqrt{7}}{32} - 2\arcsin\frac{1}{8}$$

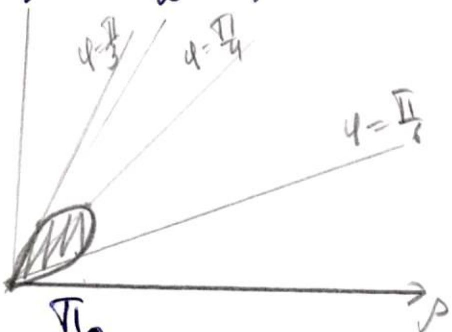
Ответ: $S = \pi - \frac{3\sqrt{7}}{32} - 2\arcsin\frac{1}{8}$.

2. $\rho = \sin 2\varphi$; $\sin 2\varphi \geq 0$

$0 \leq 2\varphi \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	~~$\frac{3\pi}{4}$~~	π
ρ	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	~~-1~~	~~0~~



$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3\varphi\cos^3\varphi \sin\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \cdot (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4\varphi - \sin^6\varphi)\, d\sin\varphi$$

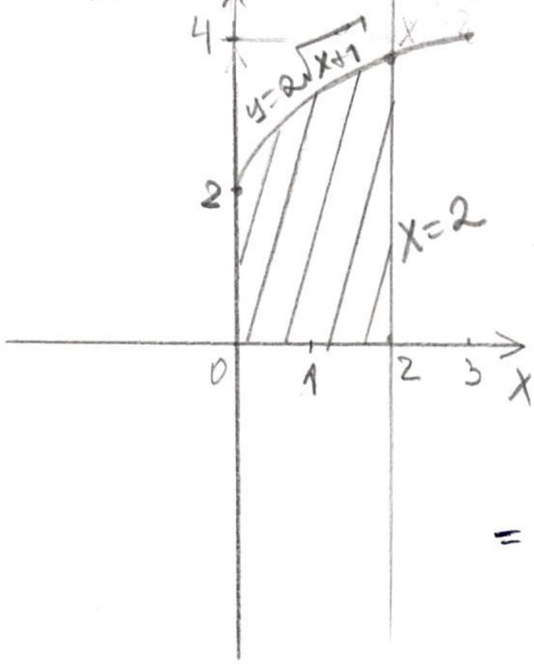
$$= \frac{2\pi}{3}\cdot 8 \left(\frac{\sin^5\varphi}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^7\varphi}{7}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{16\pi}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) =$$

$$= \frac{16\pi}{3}\cdot\frac{2}{35} = \frac{32\pi}{105}$$

Ответ: $V = \frac{32\pi}{105}$

3. $y = 2\sqrt{x+1}$

$x = 2$



$$Q_{ox} = 2\pi \int_0^2 2\sqrt{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^2 2\sqrt{x+2}\,dx = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x+2}\,dx =$$

~~Рассмотрим~~ $\cancel{\int \sqrt{x+2}\,dx} = \left| \cancel{t = \sqrt{x+2}} \right.$

$$= 4\pi \left(\frac{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^2 \right) = 4\pi \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$= 4\pi \left(\frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{16\pi(4-\sqrt{2})}{3}$$

Ответ: ~~16π(√~~ $\frac{16\pi(4-\sqrt{2})}{3}$

4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}\,dx$ – несоб. инт. 1го рода

$f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} \underset{\text{при } x\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = g(x)$

$0 \le f(x) \le g(x)$

исследуем $\int\limits_1^{+\infty} g(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ интеграл Дирихле

интеграл сходится

По признаку сходимости / расходимости по неравенству $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}\,dx$ тоже сходится

5. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^x-1}\,dx$ – несобств. инт. 2-го рода $x=0$.

$f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = g(x)$

$0 \le f(x) \le g(x)$

Исследуем $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}}$, $\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow$ сходится (интеграл Дирихле)

По предельному признаку сравнения

$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^x-1}$ тоже сходится