№1.

$yy'' + (y')^2 = 1$, при $y(0) = 1$ $y'(0) = \sqrt{2}$

II тип => замена;

$y' = p$; $p = p(y) \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$

$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 1 \quad | : yp$

$\frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = \frac{1}{yp}$

$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{p} - p\right)$

$\int \frac{p}{1-p^2} dp = \int \frac{1}{y} \cdot dy \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - p^2 \\ dt = -2p\,dp \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt \end{array} \right\}$

$-\frac{1}{2} \ln|1-p^2| = \ln|y| + \ln|C_1|$

$1 - p^2 = (yC_1)^{-2}$

$p^2 = 1 - \frac{1}{y^2 C_1^2} \Rightarrow p = \sqrt{1 - \frac{1}{(yC)^{-2}}}$

т.к. $p = y'$:

$y' = \sqrt{1 - \frac{1}{(yC)^2}} \quad (1)$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \frac{1}{(yC_1)^2}}$$

$$\int \frac{yC_1}{\sqrt{y^2C_1^2-1}}\,dy = \int dx \qquad \left\{ \begin{aligned} y^2C_1^2 - 1 &= t \\ dt &= 2C_1^2\, y\,dy \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{2C_1} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int dx$$

$$\frac{1}{C_1}\sqrt{y^2C_1^2-1} = x + C_2.$$

$$y^2C_1^2 - 1 = (xC_1 + C_1C_2)^2,$$

$$y = \sqrt{\frac{(xC_1+C_1C_2)^2+1}{C_1^2}}.$$

(2) $y = \sqrt{(x+C_2)^2 + \frac{1}{C_1^2}}$, $\frac{1}{C_1^2} = C_3$

$y = \sqrt{(x+C_2)^2 + C_3}$ - общ. решен.

Найдем частн. реш.

$y(0) = 1$ и $y'(0) = \sqrt{2}$ в (1) и (2)

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 - \frac{1}{(yC_1)^2}} \\ y = \sqrt{(x+C_2)^2 + \frac{1}{C_1^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{C_1^2}} \\ 1 = \sqrt{C_2^2 + \frac{1}{C_1^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{C_1^2} = 1 \\ C_2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $y = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 - 1}$

№2

$$x^2 y'' = (y')^2 - 3xy + 3x^2$$

ДУ II типа.

$$y' = p,\ p = p(x) \Rightarrow y'' = p'$$

$$x^2 p' = p^2 - 3xp + 3x^2 \ \Big|: x^2 \neq 0$$

$$p' = \left(\frac{p}{x}\right)^2 - 3\frac{p}{x} + 3$$

Проверим, явл-ся ли ф-я $f(x,p)$ – однородной

$$f(\lambda x, \lambda p) = \left(\frac{\lambda p}{\lambda x}\right)^2 - 3\frac{\lambda p}{\lambda x} + 3 = f(x,p) \text{ – явл.}$$

$\Rightarrow p' = \left(\frac{p}{x}\right)^2 - 3\frac{p}{x} + 3$ – однородное ДУ 1-го пор.

Найдем $u = p/x$, тогда $p = ux \Rightarrow p' = u + xu'$

$$u + xu' = u^2 - 3u + 3 \qquad \left\{ \begin{array}{l} u^2 - 4u + 3 = 0 \\ u_{1,2} = 2 \pm 1 \end{array} \right\}$$

$$x\frac{du}{dx} = (u-3)(u-1) \ \Big|: x(u-3)(u-1) \ \Big|\cdot dx$$

$$\int \frac{du}{(u-3)(u-1)} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-3}{u-1}\right| = \ln|x| + \ln|C_1| \ \Big|\cdot 2$$

$$\frac{u-3}{u-1} = (xC_1)^2$$

$$u-3=(xC_1)^2(u-1)$$

$$u-(xC_1)^2u=3-(xC_1)^2$$

$$u=\frac{3-(xC_1)^2}{1-(xC_1)^2}$$

Т.к. $p=uv$ и $p'=y$:

$$y'=\frac{3-x^2C_1^2}{1-x^2C_1^2}x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-x^2C_1^2x}{1-x^2C_1^2}$$

$$\int dy=\int\frac{x^2C_1^2-3}{x^2C_1^2-1}x\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^3C_1^2-3x+0 & x^2C_1^2-1 \\ \underline{x^3C_1^2-x} & x-\frac{2}{xC_1^2} \\ \quad -2x & \\ \quad \underline{-2x+\frac{2}{xC_1^2}} & \\ \quad\quad -\frac{2}{xC_1^2} & \end{array}$$

$$\int\frac{dx}{x^2C_1^2-1}=\left|\begin{array}{l} t=x^2C_1^2-1 \\ dt=2C_1^2x\,dx \\ \frac{1}{x}dx=\frac{1}{2C_1^2x^2};\ x^2C_1^2=t+1 \end{array}\right|.$$

$$\int dy=\int x\,dx-\int\frac{2}{xC_1^2}dx-\int\frac{2dx}{C_1^2x(x^2C_1^2-1)}$$

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{C_1^2}\ln|x|-\frac{2}{C_1^2}\int\frac{dx}{x^3C_1^2-x}$$

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{C_1^2}\ln|x|-\frac{2}{2C_1^2}\int\frac{dt}{(t+1)t}$$

§. $\left\{\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{At+A+Bt}{t(t+1)};\ t=0\ A=1;\ t=-1\ B=-1\right\}$

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{c_1^2}\ln|x|-\frac{1}{c_1^2}\left(\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{1+t}dt\right)$$

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{c_1^2}\ln|x|-\frac{1}{c_1^2}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C$$

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{c_1^2}\ln|x|-\frac{1}{c_1^2}\ln\left|\frac{x^2c_1^2-1}{x^2c_1^2}\right|+c_2,\quad c_1^2=c_3$$

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{c_3}\ln\left|\frac{x^4c_3}{x^2c_3-1}\right|+c_2 \text{ - общее решение ДУ}$$

Потерянное решение:

1) $u=1 \Rightarrow p=ux=x \Rightarrow y'=x \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+c_5$

2) $u=3 \Rightarrow p=3x \Rightarrow y=\frac{3}{2}x^2+c_4$ Входит в общее решение

Ответ: $\begin{cases} y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{c_3}\ln\left|\frac{x^4c_3}{x^2c_3-1}\right|+c_2 \\ y=\frac{3}{2}x^2+c_4 \end{cases}$

№3

$$y^{V}+y^{'''}=x-2e^{-x}+x\cos 2x+\sin x-5\sin 2x$$

1) Найдем решения однородного ДУ: $y^{V}+y^{'''}=0$

Для этого найдем корни хар-кого ур-ия:

$k^5+k^3=0 \Rightarrow k^3(k^2+1)=0$

$k_1=0 \quad r=3$

$k_2=\pm i \quad v=1 \quad (\tilde{\alpha}=0,\ \tilde{\beta}=1)$

Тогда решение однородного ДУ:

$$y_{одн}=e^{\tilde{\alpha}x}(C_1\cos\tilde{\beta}x+C_2\sin\tilde{\beta}x)+C_3e^{x}$$

$y_{одн}=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3+C_4x+C_5x^2$, где

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5=const$

2) Ф-ия в правой части:

$$f(x)=\underline{x}-\underline{\underline{2e^{-x}}}+x\cos 2x+\sin x-5\sin 2x$$

Состоит из нескольких ~~чле~~нов функций:

$f_1(x)=x$ — I типа

$f_2(x)=-2e^{-x}$ — I типа

$f_3(x)=x\cos 2x-5\sin 2x$ — II типа

$f_4(x)=\sin x$ — II типа

а) $f_1(x)=x,\ \alpha_1=0 \quad P_n(x)=x$ многочлен степени 1

$\alpha = 0$ совпадает с корнем хар. ур.

$k_1 = 0,\ r = 3 \Rightarrow y_{0} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x) \Rightarrow y_{01} =$

$= x^3 (Ax + B),\quad A, B = const$

б) $f_2(x) = -2e^{-x},\ \alpha = -1\quad P_n(x) = -2$ многочлен степени 0

$\alpha = -1$ не совп. с корнем хар. ур-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{02} = e^{\alpha x} Q_n(x) = Ce^{-x},\ C = const$

в). $f_3(x) = x \cos 2x - 5\sin 2x$

$\alpha = 0,\ \beta = 2\quad P_n(x) = x$ - многочлен степени 1

$Q_n(x) = -5$ многочлен степени 0

$\alpha + \beta i = 2i$ не совп с корнем хар. ур-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{03} = e^{\alpha x}(Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x)$,

где $N = \max\{0; 1\} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{03} = (Dx + E) \cos 2x + (Fx + Q) \sin 2x$,

$D, E, F, Q = const$

г) $f_4(x) = \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \sin x$

$\alpha = 0\quad \beta = 1\quad P_n(x) = 0$ - многочлен ст. 0

$R_n(x) = 1$ - многочлен ст. 0

$\alpha + \beta i = i$ совпадает с корнем $k_2 = \pm i,\ r = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{04} = x^r e^{\alpha x}(Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x)$, где $\nu = \max\{0; 0\} = 0$

$y_{ч.н} = x(H\cos x + K\sin x)$

В ф-ле частное решение ДУ:

$y_ч = (Ax+B)x^3 + Ce^{-x} + (Dx+E)\cos 2x + (Fx+Q)\cdot$
$\cdot \sin 2x + x(H\cos x + K\sin x)$

$A, B, C, D, E, F, Q, H, K - const.$

№4.

$$y''+y'-6y=-(7+10x)e^{2x}-12; \quad y(0)=2, \quad y'(0)=4$$

1) найдем общее решен. ОДУ: $y''+y'-6y=0$

Для этого найдем корни хар-ого ур-ия:

$k^2+k-6=0$

$$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\-3\end{array}\right. \quad k_1=2, \; k_2=-3, \quad n=1$$

Тогда общее решение однородного ур-я:

$y_{одн}=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$, C_1 и $C_2=const$.

2) Ф-я в правой части:

$$F(x)=-(7+10x)e^{2x}-12$$

состоит из двух ф-ий:

$F_1(x)=-e^{2x}(7+10x)$ – I тип

$F_2(x)=-12e^{0x}$ – I тип.

а) $F_1(x)=-e^{2x}\cdot(7+10x)$

$\alpha=2$, $P_n(x)=-(7+10x)$ многочлен степени 1. Т.к. $\alpha=2$ совпадает с корнем $k_1=2$ хар. ур-я, получаем

$y_{o1} = x^{r} e^{\alpha x} Q_n(x) \Rightarrow$

$y_{o1} = x e^{2x} (Ax + B)$, A и B - const

б) $F_2(x) = -12 e^{0x}$

$\alpha = 0$, $P_n(x) = -12$ - многочлен степени

0 т.к. $\alpha = 0$ не совпадает с корнем

хар. ур-я, получаем $y_{o2} = e^{\alpha x} Q_n(x) \Rightarrow$

$y_{o2} = C$, C - const

В р-не частное решение будет иметь

вид:

$y_o = y_{o1} + y_{o2} = (Ax + B) x e^{2x} + C$, где

A, B, C - const

3) Найдем коэф. методом неопр. коэф.

$y_o' = (2Ax + B) e^{2x} + (Ax^2 + Bx) e^{2x} \cdot 2 =$

$= e^{2x} (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)$

$y_o'' = e^{2x} (4Ax + 2A + 2B) + 2 e^{2x} (2Ax^2 + 2Ax +$

$2Bx + B) = e^{2x} (4Ax^2 + 8Ax + 2A + 4Bx + 4B)$

подставим y_o, y_o' и y_o'' в исх ур-е:

$-((Ax + B) x e^{2x} + C) 6 + e^{2x} (4Ax^2 + 8Ax + 2A + 4Bx +$

$+ 4B) + e^{2x} (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B) = -(7 + 10x) e^{2x} - 12$

$-6((Ax+B)xe^{2x}+C)+e^{2x}(6Ax^2+10Ax+$

$+2A+6Bx+5B)=-(7+10x)e^{2x}-12$

$e^{2x}(6Ax^2+10Ax+2A+6Bx+5B-6Ax^2-$

$-6Bx)-6C=-(7+10x)e^{2x}-12.$

$e^{2x}(10Ax+2A+5B)-6C=-(7+10x)e^{2x}-12$

$(10Ax+(2A+5B))e^{2x}-6C=(-10x-7)e^{2x}-12$

$$\begin{cases}10A=-10\\2A+5B=-7.\\6C=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=-1.\\C=2.\end{cases}$$

Тогда частное решение имеет вид:

$y_0=-(x+1)xe^{2x}+2$

4) Общее решение неоднородного ЛУ:

$y_{неодн}=y_{одн}+y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}-(x+1)xe^{2x}+$

$+2,\quad C_1,C_2=const.$

5) Найдем частное решение неоднородного ур-ния, удовлет. нач. условиям

$y(0)=2$ и $y'(0)=4$

$y'_{\text{общ}} = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x} - 2e^{2x}(x^2+x) -$

$-(2x+1)e^{2x} = e^{2x}(2c_1 - 2x^2 - 2x - 2x - 1) -$

$- 3c_2 e^{-3x}$

Подставим нач. условия:

$$\begin{cases} 2 = c_1 e^0 + c_2 e^0 - 0 + 2 \\ 4 = e^0(2c_1 - 1) - 3c_2 e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 2c_1 - 1 = 4 + 3c_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Отсюда частное решение исходного ур-я:

$y_{\text{общ. част.}} = -e^{2x}(x^2 - x - 1) - e^{-3x} + 2$

№5

$y''\sin^2 2x + 6y'\sin 2x + 4(3-2\cos^2 x)y = \operatorname{ctg} 3x \sin^2 2x$

$y_1 = \operatorname{ctg} x$

$$y'' + \frac{6}{\sin 2x}y' + \frac{4(3-2\cos^2 x)}{\sin^2 2x}y = \operatorname{ctg}^3 x$$

$$a_1(x) = \frac{6}{\sin 2x}$$

Решим по ф-ле Остроградского-Лиувилля: $W(x) = W_0(x_0)\cdot e^{-\int a(x)dx}$,

где $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ – опр. Вронского

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ctg} x & y_2 \\ -\frac{1}{\sin^2 x} & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int 6\frac{dx}{\sin 2x}}$$

$$-6\int\frac{dx}{\sin 2x} = -6\int\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = -3\ln|\operatorname{tg}x|$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{tg}x = t; & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ x = \operatorname{arctg} t; & \sin 2x = \frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right\}$$

$y_2' \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin^2 x} \cdot y_2 = e^{-3\ln|\operatorname{tg} x|}$

Пусть $y_2 = u \cdot v \Rightarrow y_2' = u'v + uv'$ - м-д Бернулли

$u'v \cdot \operatorname{ctg} x + uv' \operatorname{ctg} x + \frac{uv}{\sin^2 x} = (\operatorname{tg} x)^{-3}$

Найдем $v = v(x)$ такую, что

$u\left(v' \operatorname{ctg} x + \frac{v}{\sin^2 x}\right) = 0$

$v' \operatorname{ctg} x = -\frac{v}{\sin^2 x}$

$\int \frac{1}{v}\, dv = -2 \int \frac{dx}{2\sin x \cos x}$ (см. выше)

$\ln v = -\ln|\operatorname{tg} x| \Rightarrow v = \operatorname{tg}^{-1} x.$

Подставим v и найдем $u = u(x)$

$u' \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\int du = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\, dx$

$u = \ln|\sin x|$

Т.к. $y_2 = u \cdot v$, получаем:

$$y_2 = \frac{\ln|\sin x|}{tg\, x}$$

Т.о, общее решение:

$$y = C_1 \, ctg\, x + C_2 \frac{\ln|\sin x|}{tg\, x}$$

Найдем $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ - методом Лагранжа:

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0 \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = F(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, ctg\, x + C_2'(x) \dfrac{\ln|\sin x|}{tg\, x} = 0 \\ -C_1'(x) \dfrac{1}{\sin^2 x} + C_2'(x) \dfrac{\cos x \cdot \frac{1}{\sin x}\, tg\, x - \ln|\sin x| \frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x} = \\ = ctg^3 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1'(x) = C_2'(x) \ln|\sin x| \quad (1) \\ \dfrac{C_2'(x) \ln|\sin x|}{\sin^2 x} + C_2'(x) \dfrac{\cos^2 x - \ln|\sin x|}{tg^2 x \cos^2 x} = \\ = ctg^3 x \end{cases}$$

$$\frac{C_2'}{\sin^2 x}\left(\ln|\sin x| + \cos^2 x - \ln|\sin x|\right) = ctg^3 x$$

$$C_2' \, ctg^2 x = ctg^3 x$$

$$C_2' = ctg\, x$$

$$\int d\, C_2(x) = \int ctg\, x \, dx$$

$$\underline{C_2(x) = \ln|\sin x| \; \tilde{C}_2}$$

Подставим C_2' в (1):

$$-C_1'(x) = ctg\, x \ln|\sin x|$$

$$\int d\, C_1(x) = -\int ctg\, x \ln|\sin x| \, dx$$

$$\left|\begin{array}{l} t = \ln|\sin x| \\ dt = \frac{1}{\sin x}\cos x \, dx \end{array}\right| \Rightarrow \int ctg\, x \cdot \ln|\sin x| \, dx =$$

$$= \int t\, dt =$$

$$\frac{t^2}{2} + C^2 = \frac{\ln^2|\sin x|}{2} + \tilde{C}_1$$

$$C_1(x) = -\frac{\ln^2|\sin x|}{2} + \tilde{C}_1$$

Общее решение неоднородного линейного ДУ:

$$y = \left(-\frac{\ln^2|\sin x|}{2} + \tilde{C_1}\right) ctg x + \left(\ln|\sin x| + \tilde{C_2}\right)$$

$$\cdot \frac{\ln|\sin x|}{tg x}$$

$$y = ctg x \left(\ln^2|\sin x| + \ln|\sin x| \cdot \tilde{C_2} -\right.$$

$$\left. - \frac{\ln^2|\sin x|}{2} + \tilde{C_1}\right)$$

$$y = ctg \left(\frac{\ln^2|\sin x|}{2} + \tilde{C_1} + \tilde{C_2} \ln|\sin x|\right)$$