Черкасин С.С. ИУ1-21 В-16

№: $xy'' - y' - x^3(y')^2 = 0$ $y=0$, $y' = -\frac{2}{3}$, $x=2$

$y' = p$

$y'' = p'$

$xp' - p - x^3 \cdot p^2 = 0$

$p' - \frac{p}{x} - x^2 \cdot p^2 = 0$ $z = p^{1-2} = \frac{1}{p}$, $z' = -\frac{1}{p^2} \cdot p'$

$-\frac{1}{p^2} p' + \frac{p}{p^2 x} + x^2 = 0$

$z' + \frac{z}{x} = -x^2$

$z_0 = c \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} = c \cdot \frac{1}{x}$

$z = \frac{c(x)}{x}$

$z' = \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2}$

$\frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = -x^2$

$c'(x) = -x^3$

$c(x) = -\int x^3 dx = -\frac{x^4}{4} + C_1$

$z = -\frac{x^3}{4} + \frac{K_1}{x}$ $\frac{1}{p} = -\frac{x^3}{4} + \frac{K_1}{x}$

$\frac{1}{y'}$

$-\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}$

K

$\frac{1}{y'}$

$\frac{dx}{d}$

$\frac{4x}{-x^4+}$

-4

-4

$$\frac{1}{y'} = -\frac{x}{4} + \frac{K_1}{x}$$

2 $$-\frac{3}{2} = -\frac{8}{4} + \frac{K_1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{K_1}{2}$$

$$K = 1$$

$$\frac{1}{y'} = -\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x} = \frac{-x^4+4}{4x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x^4+4}{4x}$$

$$\frac{4x\,dx}{-x^4+4} = dy$$

$$-4\int\frac{x\,dx}{x^4-4} = y$$

$$-4\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^4-4} = y$$

$$-2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+2}\right| + K_2 = y$$

$$-\ln\left|\frac{4-2}{4+2}\right| + K_2 = 0$$

$$K_2 = \ln\frac{1}{2}$$

$$-\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+2}\right| + \ln\frac{1}{3} = y$$

№3

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \qquad C_1' = -\frac{C_2 \sin x}{\cos x}$$

$$\frac{C_2 \sin^2 x}{\cos x} + C_2' \cos x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{C_2 \sin^2 x + C_2' \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$C_2' = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln \sin x + K_2$$

$$C_1' = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$$C_1 = -x + K_1$$

$$y = (-x + K_1) \cos x + (\ln \sin x + K_2) \sin x$$

№34

$y^{V}+4y'''=x-x^3+x\cdot e^x+\sin 2x$

$\lambda^3(\lambda^2+4)=0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda^3=0\\ \lambda^2+4=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lambda=0, k=3\\ \lambda=\pm 2i\end{array}\right.$ $y_1=C_1+xC_2+x^2C_3$

$y_2=C_4\cos 2x+C_5\sin 2x$

$f_1=x-x^3$

$\mu=0, k=3, S=3$

$y_{ч.н._1}=x^3\cdot e^{0\cdot x}(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$

$f_2=x\cdot e^x$

$\mu=1, k=1$

$y_{ч.н._2}=e^x(Ex+F)$

$f_3=\sin 2x$

$\mu=2i, k=0, S=1$

$y_{ч.н._3}=x(G\cdot\cos 2x+H\,\cancel{\cos}\sin 2x)$

$y_{о.н}=C_1+xC_2+x^2C_3+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x+$

$+x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+e^x(Ex+F)+x($

$(G\cos 2x+H\sin 2x).$

№ 1

$\lambda_1 = 3 \cdot \lambda_2 = i \cdot \lambda_3 = -i$

$(k-3)(k-i)(k+i)=0$

$(k-3)(k^2-i^2)=0$

$(k-3)(k^2+1)=0$

$k^3+k-3k^2-3=0$ – хар. ур.

$y'''-3y''+1=0$ – ЛОДУ

Теорема.

Если система функций $y_1, \dots, y_n$ заданных на промежутке I, состоит из n-1 раз дифференцируемых функций, то определителем Вронского этой системы называют определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

№2.

Общее решение уравнения (1) $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = b(x)$ может быть записано в виде (2) $y = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$, где $y_0(x)$ - частное решение уравнения, а $y_1 \dots y_n$ - ФСР соответствующего однородного уравнения, C - произвольные постоянные.

Док-во.

Уравнение ЛОДУ с помощью дифф. оператора можно записывать $L[y]=b(x)$; соответствующее однородное ур-ние запишется в виде $L[y]=0$. Применим этот дифференциальный оператор к (2) получим $L[y]=L[y_0+c_1y_1+\ldots+c_ny_n]=$
$=L[y_0]+\ldots+c_nL[y_n]=b(x)$, при любых С функция y, определяемая равенством 2 явл. решением ур-ния.

Проверим теперь, что при соответствующем подборе констант С можно получить решение, удовл. любым начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}$

Для опр. констант С имеем систему:

$$\begin{cases} y(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0)=y_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq, \text{ т.к. } y_1, \ldots y_n - \text{ФСР}$$

однородного ур-ия, свойство его вдоль ур-ии (1). Поэтому требуемое надо постоянным С еду.

ч.т.д.