

**«Интегралы и дифференциальные уравнения»
все специальности ИУ (кроме ИУ9), РЛ, ПС, РТ
Вопросы для подготовки к экзамену**

Теоретические вопросы

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла.
2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.
3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.
4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла.
5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.
6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.
7. Дать определение интеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом.
8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона — Лейбница.
9. Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла.
10. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.
11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.
12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.
13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.
14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.
15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.
16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.
17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ — полярные координаты точки, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, где r и φ — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.

18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.

19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y — декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ — полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод “ $u \cdot v$ ”) и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).

22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка.

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

24. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций.

25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

28. Вывести формулу Остроградского — Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.

31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий. Знание остальных теорем, определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора.

Задачи для подготовки

В экзаменационный билет входят два теоретических вопроса (по двум модулям дисциплины) и две задачи (указаны номера комплектов задач). Каждая из задач относится к одной из следующих тем:

- неопределенные интегралы;
- приложения определенного интеграла;
- несобственные интегралы;
- дифференциальные уравнения (ОДУ), допускающие понижение порядка;
- линейные ОДУ с правой частью специального вида;
- линейные ОДУ с правой частью общего вида.

При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

Модуль 1

1. Неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{llll} 1.1. \int \frac{\sqrt[4]{5 + \ln x}}{x} dx. & 1.2. \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1}. & 1.3. \int x^2 \cos 2x dx. & 1.4. \int e^{2x} \cos 3x dx. \\ 1.5. \int \ln x dx. & 1.6. \int \frac{4x + 1}{\sqrt{2 + 4x - x^2}} dx. & 1.7. \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}. & 1.8. \int \operatorname{tg}^3 x dx. \\ 1.9. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}. & 1.10. \int (\sqrt{\cos x} + \sin x)^2 dx. & 1.11. \int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx. & \\ 1.12. \int \frac{dx}{5 - 2 \sin x + 5 \cos x}. & 1.13. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}. & 1.14. \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx. & \end{array}$$

2. Приложения определенного интеграла.

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x+4}$, $y = -\sqrt{x} + 2$ и осью Ox . Сделать чертёж.

2.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Сделать чертёж.

2.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сделать чертёж.

2.4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и $x = 0$. Сделать чертёж.

2.5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$. Сделать чертёж.

2.6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a \ln t$ ($a > 0$) и осями координат, вокруг оси Ox . Сделать чертёж.

2.7. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r = a \sin^2 \phi$ вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

2.8. Найти длину дуги кривой $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$. Сделать чертёж.

2.9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$. Сделать чертёж.

3. Исследование несобственных интегралов на сходимость.

$$\begin{array}{lll} 3.1. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx. & 3.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx. & 3.3. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3} dx. \end{array}$$

Модуль 2

4. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

4.1. $xy'' + y' + x = 0$.

4.2. $1 + yy'' + (y')^2 = 0$ при начальных условиях $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 1$.

5. Вид общего решения линейного ОДУ.

5.1. $y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x$.

5.2. $y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x$.

6. Линейные ОДУ с правой частью общего вида.

6.1. $y'' + y = \operatorname{tg} x \sec x$.

6.2. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$.

6.3. Решить уравнение $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известно его частное решение соответствующего однородного уравнения: $y_1 = x$.

Образец билета

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 0.

Интегралы и дифференциальные уравнения
2-й сем., ИУ-РЛ-ПС-РТ (2021-22)

1. (6 баллов) Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона — Лейбница.

2. (6 баллов) Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

3. (6 баллов) Задача из комплекта № 1.

4. (6 баллов) Задача из комплекта № 5.

5. (6 баллов) Дополнительные вопросы экзаменатора.

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 25.04.2022.
