

23. Теорема Коши о $\int$ и ! решения лин. Д.У. n -го пор-ка.
Св-ва частных решений ЛОДУ n -го пор-ка.

• Теорему Коши смотри в билете №22.

• Св-ва частных решений:

1) Если ~~функции~~ $(y_1, \dots, y_n)$ явл. реш-иями $L[y] = 0$, то их лин. комб:
 $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$ тоже явл. реш-ием этого Д.У.

Док-во:

$$L[a_1 y_1 + \dots + a_n y_n] = \overbrace{a_1 L[y_1]}^0 + \dots + \overbrace{a_n L[y_n]}^0 = 0 \Rightarrow a_1 y_1 + \dots + a_n y_n - \text{реш-ие } L[y] = 0$$

2) Если y_1 и y_2 явл. реш-иями $L[y] = b(x)$, то $y_1 - y_2$ - явл. реш-ием $L[y] = 0$.

Док-во:

$$L[y_1 - y_2] = \underbrace{L[y_1]}_{b(x)} - \underbrace{L[y_2]}_{b(x)} = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 - \text{решение } L[y] = 0$$

3) Если y_1 - реш-ие $L[y] = 0$; а y_2 - реш-ие $L[y] = b(x)$, то $y_1 + y_2$ - явл. реш-ием $L[y] = b(x)$

Док-во:

$$L[y_1 + y_2] = \overbrace{L[y_1]}^0 + \overbrace{L[y_2]}^{b(x)} = b(x) \Rightarrow y_1 + y_2 - \text{реш-ие } L[y] = b(x)$$

24. Определение лин. зависимой и линейно независ. систем ф-ций. Теорема о вронском линейно завис. ф-ций.

• Сис-ма ф-ций $y_1, \dots, y_n$ называется лин. завис., если суц. нетрив. лин. комб. этих ф-ций равная 0.

Т.е: $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0$, причём не все $\lambda_i, i=1, n$ равны нулю.

Если $\lambda_i, i=1, n = 0$, то сис-ма ф-ций называется лин. независ.

• Теорема:

Пусть $y_1, \dots, y_n$ (n-1) раз диф-ма и сис-ма $y_1, \dots, y_n$ - лин. зав., тогда вронская этой сис-мы тождественно равна нулю: $W(x) = 0$

Док-во:

$y_1, \dots, y_n$ - лин. зав $\Rightarrow \exists$ нетрив. лин. комб: $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0$

Продиф-уем эту комб (n-1) раз:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 y_1' + \dots + \lambda_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ столбцы $W(x)$ - лин. зависимы $\Rightarrow W(x) = 0$ ■

25. Определение лин. завис. и лин. независ. систем n -уи.
Теорема о вращении систем лин. независ. частных реш-ий
ЛОДУ n -го пор-ка.

• Определение смотрит в билете №24.

• Теорема:

Пусть $y_1, \dots, y_n$ - реш-ие ЛОДУ $L[y] = 0$, тогда для того чтобы они были линеин. независ. недх. и достаточно чтобы $W(x) \neq 0$ в $\forall$ т-ке.

Док-во:

Необходимость: $y_1, \dots, y_n$ - лин. независ. сис-ма реш-ий $L[y] = 0$
 (от противного)

Пусть $W(x_0) = 0$

Рассмотрим сис-му: $\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сис-ма имеет триви. реш-ие: $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$

Рассмотрим n -ую: $y = \lambda_1^* y_1 + \dots + \lambda_n^* y_n \Rightarrow L[y] = L[y, \lambda_1^* + \dots + y_n \lambda_n^*] = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y$ - реш-ие $L[y] = 0 \Rightarrow$ оно удовл. нач. усл:

$$\begin{cases} y(x_0) = \lambda_1^* y_1(x_0) + \dots + \lambda_n^* y_n(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = \lambda_1^* y_1'(x_0) + \dots + \lambda_n^* y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \lambda_1^* y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \lambda_n^* y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

С др. стороны $y = 0$ - тоже эвл. реш-ием ЗК $L[y] = 0$: $\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$

Т-к. ЗК имеет ! реш-ие $\Rightarrow \lambda_1^* y_1 + \dots + \lambda_n^* y_n = 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$ - лин. ~~не~~ завис.
 (противоречие)

значит: $W(x_0) \neq 0$ в $\forall$ т-ке.

Достаточность:

$W(x) \neq 0$ в $\forall$ т-ке для сис-мы реш-ий $L[y] = 0$ $y_1, \dots, y_n$
 (от противного)

Пусть $y_1, \dots, y_n$ - лин. завис. $\Rightarrow W(x) = 0$ - противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_1, \dots, y_n$ - лин. независ. ■

26. Теорема о $\exists$ ФСР, ЛОДУ n -го порядка.

• Теорема:

$\forall$ однородное Д.У. с непр. коэф. имеет ФСР.

Док-во:

ЛОДУ: $Ly = 0$. Рассмотрим реш-ие сп. ЗК для этого ЛОДУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = \dots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ 2) y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, y_2''(x_0) = \dots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ n) y_n(x_0) = y_n'(x_0) = \dots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{array} \right.$$

Определитель Вронского для этой системы:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow W(x_0) \neq 0 \text{ в } \forall \text{ т-ке} \Rightarrow \text{система ф-ций} \\ \text{линейно независима} \Rightarrow y_1, \dots, y_n \text{ - образуют ФСР. } \blacksquare$$

27. Теорема о структуре общ. реш-ия ЛОДУ n-го пор-ка.

• Теорема:

Пусть $y_1, \dots, y_n$ - ФЕР ЛОДУ $L[y] = 0$ с непрер. коэф. $a_i(x)$, $i = \overline{1, n}$.
Тогда общ. реш-ие данного ур-ия может быть представлено в
виде: $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ (*)

Док-во:

1) $L[y] = L[c_1 y_1 + \dots + c_n y_n] = 0 \Rightarrow y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ - реш-ие $L[y] = 0$

2) Докажем, что $\forall$ реш-ие $L[y] = 0$ можно представить в виде (*)

Пусть $\tilde{y}(x)$ - реш-ие ЗК для $L[y] = 0$:

$$\begin{cases} \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ \tilde{y}'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Рассмотрим сис-му (1):

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Опр-но сис-мы: $W(x_0) \neq 0$ (т.к. $y_1, \dots, y_n$ - ФЕР)
Значит сис-ма имеет ! реш-ие.

Обозначим его $c_1^0, \dots, c_n^0$.

Рассмотрим ф-цию $\bar{y}(x) = c_1^0 y_1 + \dots + c_n^0 y_n$:

$$L[\bar{y}] = L[c_1^0 y_1 + \dots + c_n^0 y_n] = 0$$

Из сис-мы (1):

$$\begin{cases} \bar{y}(x_0) = y_0 \\ \bar{y}'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Тогда $\bar{y}(x)$ - решение ЗК для $L[y] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = \tilde{y}(x) = c_1^0 y_1 + \dots + c_n^0 y_n \quad \blacksquare$$

28. Вывести ф-лу Остроградского-Лиувилля для ЛОУ 2-го пор-ка.

• Рассмотрим ЛОУ 2-го пор-ка: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

Пусть y_1 и y_2 - ф-ры данного ЛОУ:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \Rightarrow W'(x) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W'(x) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)y_1' - a_2(x)y_1 & -a_1(x)y_2' - a_2(x)y_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)y_1' & -a_1(x)y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_2(x)y_1 & -a_2(x)y_2 \end{vmatrix} = -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + 0$$

Значит: $W'(x) = -a_1(x) \cdot W(x)$

$$\frac{dW}{dx} = -a_1(x) \cdot W(x) \Rightarrow \int \frac{dW}{W(x)} = - \int a_1(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(W(x)) = - \int a_1(x) dx \Rightarrow W(x) = \exp\left(- \int a_1(x) dx\right) \blacksquare$$

• Если известно нач. уел:

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(- \int a_1(x) dx\right)$$

29. Вывод ф-лы для обы. реш-ия ЛДУ 2-го пор-ка при одном известном частном реш-ии.

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(-\int a_1(x) dx\right)$$

30. Теорема о структуре обш. реш-ия ЛНДУ n-го пор-ка.

• Теорема:

Обш. решение ЛНДУ можно представить в виде:

$$(1): y_{\text{обш.}} = y_{\text{ч.}} + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \text{ где } y_1, \dots, y_n - \text{ФЕР соотв ЛОРУ;} \\ y_{\text{ч.}} - \text{частное решение ЛНДУ;} \\ c_1, \dots, c_n - \text{произв. konst.}$$

Док-во:

ЛНДУ: $L[y] = b(x) \Rightarrow$ соотв ЛОРУ: $L[y] = 0$

$$1) L[y] = L[y_{\text{ч.}} + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n] = \underbrace{L[y_{\text{ч.}}]}_{b(x)} + \underbrace{L[c_1 y_1 + \dots + c_n y_n]}_{0} = b(x)$$

2) Убедимся, что найдется такой набор konst. $(c_1, \dots, c_n)$, что (1) будет явл. реш-ием З.К:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{выберем} \\ \begin{pmatrix} y_{\text{ч.}}(x_0) \\ y_{\text{ч.}}'(x_0) \\ \vdots \\ y_{\text{ч.}}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = y_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -y_{\text{ч.}}(x_0) + y_0 \\ -y_{\text{ч.}}'(x_0) + y_0' \\ \vdots \\ -y_{\text{ч.}}^{(n-1)}(x_0) + y_0^{(n-1)} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} : \begin{matrix} W(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{из сис-ин} \\ \text{однозначно опр } (c_1, \dots, c_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{для \forall нач. усл. найдутся} \\ \text{konst.} \Rightarrow \end{matrix}$$

$\Rightarrow y_{\text{ч.}} + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ - обш. реш-ие ■

31. Вспомогат. уравнение для общ. реш-ия ЛОРУ 2-го порядка с пост. коэф. в случае кратных корней хар. уравн.

• Д.у. вида: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n = 0$, $a_i, i = \overline{1, n}$ - const и называется ЛОРУ с пост. коэф.

• Характеристич. уравн. данного ЛОРУ называется уравн. вида:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

• Пусть ~~кратные~~ $n=2$: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Хар. уравн.: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

Пусть $\Delta \neq 0 \Rightarrow \lambda$ - действ. корень $\Rightarrow y_1 = e^{\lambda x}$ - реш-ие ЛОРУ.

Докажем, что $y_2 = x \cdot e^{\lambda x}$ тоже явл. решением ЛОРУ:

$$\left. \begin{aligned} y_2' &= e^{\lambda x} + x \lambda e^{\lambda x} \\ y_2'' &= \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + x \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + x \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 e^{\lambda x} + a_1 x \lambda e^{\lambda x} + a_2 x e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x} \cdot x \underbrace{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2)}_{=0} + e^{\lambda x} \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \cdot e^{\lambda x}$ - реш-ие ЛОРУ.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0 \Rightarrow \underline{y = e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x)}$$

32. Вот все ф-лы для одн. реш-ия ЛОРУ 2-го пор-ка с пост. коэф. в случае компл. корней. хар. ур-ия.

$$\bullet y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

$$\text{Пусть } D < 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases}$$

$$Wx = \beta \cdot e^{2\alpha x} \neq 0 \ (\beta \neq 0) \Rightarrow y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \blacksquare$$

1! Определение первообразной; св-ва первообразной и неопр. ит-ла; теорема об интегрировании по частям.

- Ф-ция $F(x)$, ~~яв~~ заданная на промежутке I , называется первообразной для ф-ции $f(x)$, если во всех т-ках I :
 $f(x) = F'(x)$

- Совокупность всех первообразных называется неопр. ит-лом:
 $\int f(x) = F(x) + C$

- Св-ва неопр. ит-ла:

1) $(\int f(x) dx)' = f(x)$

Док-во: $(\int f(x) dx)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$ ■

2) $\int F'(x) dx = F(x) + C$

Док-во: Т.к. (по опр-ию) $F'(x) = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$ ■

3) $\int (A \cdot f(x) + B \cdot g(x)) dx = A \int f(x) dx + B \int g(x) dx$

Док-во: $(A \cdot \int f(x) dx + B \int g(x) dx)' = A(\int f(x) dx)' + B(\int g(x) dx)' =$
 $=$ из св-ва 1) $= A \cdot f(x) + B \cdot g(x) \Rightarrow$ верно ■

- 4) Если $F(x)$ - п/о для $f(x)$, где x - независ. пер-ая, то:

$\int f(u) du = F(u) + C$, где u - ф-ция независ. пер-ой

Док-во: $dF(x) = F'(x) dx$

По св-ву инвариантности д-ла замени 1-го глф:

$dF(u) = F'(u) du \Rightarrow$

$\Rightarrow \int dF(u) = \int F'(u) du \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C$ ■

- Теорема:

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют непр. производные, тогда:

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ - ц-на интегрирования по частям.

Док-во:

$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv \Rightarrow u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$

Принтегрируем полученное ввр-ие:

$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \Rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ ■

② Разложение правильной рациональной дроби на простейшие; интегрирование простейших дробей.

• Втор-ие вида:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} \text{ называется рац. дробью}$$

Если $m < n$, то она называется правильной, если $m \geq n$ - неправильной.
Чтобы проинтегрировать данную дробь, её нужно разложить на сумму простейших дробей вида:

• $\frac{A}{(x-a)^n}$, $A \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$;

• $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, $B^2+C^2 \neq 0$; ур-ие x^2+px+q - не имеет действ. корней;
 $m \in \mathbb{N}$

• Интегрирование простейших дробей:

1) $\frac{A}{(x-a)^n}$ а) $n=1 \Rightarrow \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$

б) $n > 1 \Rightarrow \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = \int A(x-a)^{-n} \cdot d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$

2) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$

а) $m=1 \Rightarrow \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+\frac{p^2}{4})+q-\frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{(Bx+C) dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} =$
 $= \int \frac{B(x+\frac{p}{2}) dx}{x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}} = \int \frac{B(x+\frac{p}{2})+C-\frac{Bp}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} d(x+\frac{p}{2}) = \int \frac{Bt+C-\frac{Bp}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} dt =$
 $= \int \frac{Bt+C-\frac{Bp}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} dt = \left\{ \begin{aligned} C-\frac{Bp}{2} &= D \\ q-\frac{p^2}{4} &= E \end{aligned} \right\} = \int \frac{Bt+D}{t^2+E} dt = \int \frac{Bt}{t^2+E} dt + \int \frac{D}{t^2+E} dt =$
 $= B \int \frac{d(t^2+E)}{t^2+E} + D \int \frac{dt}{t^2+E} = B \cdot \ln|t^2+E| + D \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \arctg \frac{t}{\sqrt{E}} + C =$

$= B \cdot \ln|x+\frac{p}{2}+E| + D \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{E}} + C$

б) $m > 1 \Rightarrow \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} dx = \int \frac{B/2(2x+p)+(C-\frac{Bp}{2})}{(x^2+px+q)^m} dx =$

$= \frac{B}{2} \int \frac{(2x+p) dx}{(x^2+px+q)^m} + (C-\frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m} + C-\frac{Bp}{2} \overset{(1)}{\int} \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}$

Рассмотрим бор-ие (1):

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4}))^m} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Т.к. } x^2+px+q=0 \text{ не} \\ \text{им. действ. корней } \Rightarrow \\ 0 < 0 \Rightarrow q-\frac{p^2}{4} > 0 = a^2, x+\frac{p}{2} = t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} - \text{вводится с помощью} \\ \text{рекуррентной ф-лы}$$

3!) Св-ва опр. ит-па; теорема о сокращении опр. ит-пом
- знака под интегр. φ -ум.

- Опр. интегралом от $f(x)$ на $[a, b]$ называется предел интегр. сумм при усл, что $\max_k \Delta x \rightarrow 0$

Обозначение: $\int_a^b f(x) dx$

- Св-ва опр. ит-па: ($f(x)$ - интегрируема на $[a, b]$)

1) Линейность:

$$\int_a^b (A f(x) + B g(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$$

Док-во:

$$\begin{aligned} \text{По опр-ию: } \int_a^b (A f(x) + B g(x)) dx &= \lim_{\max_k \Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (A f(\xi_k) + B g(\xi_k)) \cdot \Delta x_k = \\ &= A \cdot \lim_{\max_k \Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + B \cdot \lim_{\max_k \Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= A \cdot \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2) Аддитивность:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Док-во

$$1) a < c < b: \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=m+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Если перейти к пределу полученных сумм при $\max_k \Delta x \rightarrow 0$, то получим:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \blacksquare$$

$a < b < c$:

$$2) \text{ По пункту 1): } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \blacksquare$$

Остальные случаи доказываются аналогично.

$$3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4) Если $f(x) \leq g(x)$ где $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Доказ-во: т.к. $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(\xi_k) \leq g(\xi_k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow \lim_{\max_{k=1}^n \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \lim_{\max_{k=1}^n \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \blacksquare$$

• Теорема:

Если $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$

Доказ-во:

$$\text{т.к. } f(x) \geq 0 \Rightarrow f(\xi_k) \geq 0 \Rightarrow f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\max_{k=1}^n \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \blacksquare$$

(4) Св-ва опр. шит-па; теорема об оценке опр. шит-па.

• Св-ва шитри на билете $\sqrt{3}$

• Теорема:

Если $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Док-во:

$$\text{Т.к. } m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b] \Rightarrow m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$$

$$\text{Т.к. } \int_a^b dx = \lim_{\max_k \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \lim_{\max_k \Delta x_k \rightarrow 0} (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = b - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \blacksquare$$

(5.) Св-ва опр. шті-па; теорема аб оуеице модуля опр. шті-па.

• Св-ва опр. шті-па смотри в билете №3.

• Теорема:

Если $f(x)$ и $|f(x)|$ - штегр. на $[a, b]$, то:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Док-во:

$$\text{По св-вам модуля: } \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\max_k \Delta x_k \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \lim_{\max_k \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

6! Св-ва опр. интеграла; теорема о среднем для опр. интеграла.

• Св-ва опр. интеграла суммы в дуге $\sqrt{3}$

• Теорема:

Пусть $f(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, тогда найдётся такая $\xi \in [a, b]$, что:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Док-во:

Пусть m и M - наим. и наиб. значения $f(x)$ на $[a, b]$

Тогда: $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b] \Rightarrow$ по св-ву $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad /: (b-a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

Обозначим $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \lambda \Rightarrow m \leq \lambda \leq M \Rightarrow f(x)$ принимает

все промежуточные значения $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad \blacksquare$$

⑦. Ит-н с переменным верхним пределом; теорема о производной ит-на с переменным верхним пределом.

- Пусть $f(x)$ - интегрируема на $[a, b]$. Выберем на (a, b) произв. точку x и рассмотрим ит-н:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt - \text{опр. ит-н с переменным верхним пределом}$$

• Теорема:

Если $f(x)$ - интегрируема на $[a, x]$, то:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

Док-во:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_a^x f(t) dt ; \quad \varphi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \\ \Delta \varphi(x) &= \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \cdot (x+\Delta x - x) = \\ &= f(\xi) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } \varphi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \{ \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow x \} = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x) \Rightarrow \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Р. Св-ва опр. ант-на; впраг Ф-на Ньютон-Лейбниц.

• Св-ва опр. ант-на смотри в билете №3

• Ф-на Ньютон-Лейбниц:

Пусть $F(x)$ - какая либо первообр для $f(x)$. Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Вывод:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ явл. первообр для } f(x) \\ F(x) \text{ тоже явл. первообр для } f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) = F(x) + C$$
$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

При $x=a$: $0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$

$$x=b: \int_a^b f(t) dt = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \blacksquare$$

(9) Геометрич. интерпретацию опр. итт-па; теорема об интегрировании по составной для опр. итт-па.

• Геометрический смысл опр. итт-па:

Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции опр. отрезком $[a, b]$, где:
 $x = a$; $x = b$; $y = f(x)$.

• Теорема:

Пусть $f(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, $\varphi(t)$ - непрерывна вместе с φ' на $[a, b]$, где $\varphi(a) = a$; $\varphi(b) = b$.

$f(\varphi(t))$ - опр. на $[a, b]$

$$\text{Тогда: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Док-во:

Воспользуемся равенством: $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$

Продифф. обе части:

$$\left. \begin{aligned} \text{л.ч.: } \left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \right)' &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ \text{п.ч.: } (F(\varphi(t)) + C)' &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{равенство верно}$$

По φ -не Н-П:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(b) - F(a)$$

с др. стороны:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad \blacksquare$$

10. Св-ва опр. инт-ла; интегрирование периодических ф-ций;
интегрирование четных и нечетных ф-ций на отрезке, симметрич-
ном отн. началу координат.

• Св-ва опр. инт-ла смотри в билете №3.

• Теорема:

Ф-ция $f(x)$ называется периодической с периодом $T > 0$, если

$$\forall x: f(x+T) = f(x)$$

Если периодич. ф-ция с периодом T интегрируется на отрезке
длины T , то она интегрируема на любом отрезке и

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx$$

Док-во:

Пусть $f(x)$ опр на $[0, T]$, тогда



$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(x+T) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \Rightarrow \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ интеграл не зависит от a ■

• Пусть $f(x)$ опр на $[-a, a]$, тогда:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx =$$

$$= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (*)$$

11. Св-ва опр. итт-па; теорема об интегрировании по частям для опр. итт-па.

• Св-ва опр. итт-па справедливы в смысле ЛЗ

• Теорема:

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - диф-ные на $[a, b]$, тогда:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Док-во:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= v \cdot du + u \cdot dv \Rightarrow u dv = d(u \cdot v) - v \cdot du \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b u dv &= \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du \Rightarrow \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(12.) Несобственный ит-п 1-го рода; признак сходимости по пер-ву. для несобств. ит-пов 1-го рода.

- Пусть $f(x)$ - иепр на $[a, +\infty)$, тогда:

$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ называется несобств. ит-пом 1-го рода

Обознач: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Аналогично для $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

- Признак сходимости по пер-ву:

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - ит-мп на $[a, b]$, $\forall b$. Тогда, если:

$0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости большего следует сходимость меньшего и

из расходимости меньшего следует расходимость большего

Док-во:

1) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ - сходится, т.е. предел суц. и конечен.

$$\text{т.к. } f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in [a, b], \forall b \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

$$\text{т.к. } g(x) \geq 0, \text{ то } \int_a^{+\infty} g(x) dx \leq C, \text{ где } C - \text{const} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходится}$$

2) (от противного) пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ - расходится, т.е. $\lim \int$ или равен ∞ , а

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx - \text{сходится} \Rightarrow \text{по 1-му пункту противоречие} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx - \text{расходится} \blacksquare$$

(13) Несобственный интеграл 1-го рода; предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

• Определение несобственного интеграла 1-го рода смотри в билете №12.

• Предельный признак сравнения:

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — неогр и неогр. на $[a, b]$, $\forall b$, причём $g(x)$ — не отриц. в итоге при достаточно больших x .

Тогда: если $\exists$ конечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, не равный нулю, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходятся или расходятся одновременно

Док-во:

1) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится

Т.к. $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, k > 0 \Rightarrow$ где $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$:

$\exists M(\varepsilon): \forall x: x > M, \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \frac{k}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - k < \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2} \Rightarrow f(x) < \frac{3k}{2} g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx < \frac{3k}{2} \int_a^{+\infty} g(x) dx$

Т.к. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — сходится, то по признаку сравнения:

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ — сходится тоже

2) Остальные случаи аналогичны ■

14. Несобственный интеграл 1-го рода; признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

• Определение несобственного интеграла 1-го рода смотри в билете №12.

• Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ - сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ - абсолютно сходится

Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ - сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ - расходится, то несобственный интеграл называется условно сходящимся.

• Признак абсолютной сходимости:

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ - сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ - сходится

Док-во:

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \Rightarrow f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

Тогда по св-вам интеграла: $\int_a^{+\infty} f(x) + |f(x)| dx \leq \int_a^{+\infty} 2|f(x)| dx$

$$\text{т.к. } \int_a^{+\infty} |f(x)| dx - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} 2|f(x)| dx - \text{сходится} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по признаку сходимости по ~~не~~ нерав-ву: $\int_a^{+\infty} f(x) + |f(x)| dx$ - сходится

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) + |f(x)| dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx = C > 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходится} \blacksquare$$

15. Несобственный ит-л 2-го рода и признаки их сходимости; признак абсолютной сходимости для несобств. ит-лов 1-го рода.

- Пусть $f(x)$ - непрерывна на $[a, b)$ и неогр. при $x \rightarrow b$.

Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ - несобств. ит-л 2-го рода

Обозначается: $\int_a^b f(x) dx$

Таким образом

- Для $(a, b]$ - аналогично: $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

- $f(x)$ - непрерывна на (a, b) и неогр. при $x \rightarrow a+0$ и $x \rightarrow b-0$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

- $f(x)$ - непрерывна на $[a, c) \cup (c, b]$ и неогр. при $x \rightarrow c$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

- Если $\lim \int$ и конечен, то $\int_a^b f(x) dx$ - сходится, иначе расходится

- Признаки сходимости несобств. ит-лов 2-го рода:

1) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывны на $[a, b)$ и неогр. при $x \rightarrow b$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$

Тогда из сходимости большего $\Rightarrow$ сходимости меньшего
расходимости меньшего $\Rightarrow$ расходимость большего

2) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - неогр. на $[a, b)$, непрерывны на $[a, b)$, неогр. при $x \rightarrow b$ и $g(x) \neq 0$ в окр-ти т-ки b

Тогда, если $\exists$ конеч. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, то $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ - сходятся или расходятся одновременно

3) Пусть $f(x)$ - непрерывна и знакопер. на $[a, b)$ и неогр. при $x \rightarrow b$. Тогда:

Если $\int_a^b |f(x)| dx$ - сходится, то $\int_a^b f(x) dx$ - абсолютно сходится.

Если же $\int_a^b f(x) dx$ - сходится, а $\int_a^b |f(x)| dx$ - расходится, то ит-л условно сходится

- Признак абсолютной сходимости для несобств. ит-лов 1-го рода
- рода алогри в билете №14.

16. Ф-ра ограничена кривой $y=f(x) \geq 0$, прямыми $x=a, x=b$ и $y=0, (a < b)$. Ввести ф-лу вычисления площади данной фигуры с помощью опр. интеграла.

• Геометрический смысл опр. интеграла:

Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ~~определённой на~~ ~~на~~ ограниченной прямой $x=a; x=b$; осью Ox и ф-цией $y=f(x)$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

(17.) Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$.
 $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$. Введем φ -ую внешнюю площадь этой φ -рп.

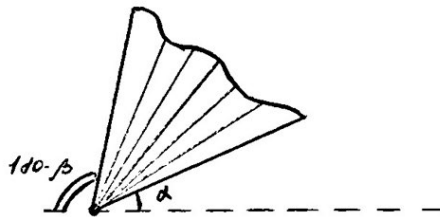
- Пусть криволинейный сектор ограничен лучами $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ и графиком φ -учи в полярных коор-тах $r = f(\varphi)$

Разобьём $[\alpha, \beta]$ на части:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

и внешними $r_i = f(\varphi_i)$, $i = \overline{1, n}$

Построим секторы с углом $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ и радиусом $r_i = f(\varphi_i)$



Площадь такого сектора: $S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i \Rightarrow S_{\text{фигура}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i$

Т.к. справа находится инт. сумма, то перейдем к $\lim$ с $\max \Delta\varphi_i \rightarrow 0$, r_i , получим:

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta\varphi_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_i^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r_{\max}^2 d\varphi$$

78. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейн. трап., огр. $y=f(x) \geq 0$; $x=a$; $x=b$; $y=0$ ($a < b$). Выведем ф-лу вычисления объёма этого тела.

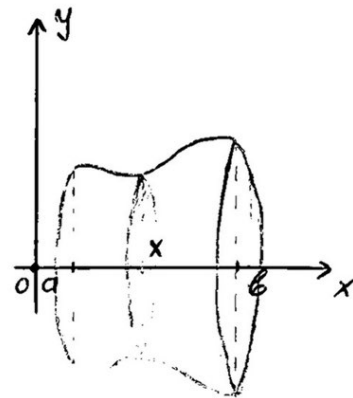
- Пусть криволинейн. трап. огр. осью Ox , $x=a$, $x=b$, $y=f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и вращается вокруг оси Ox :

В произв. т-ке $x \in (a, b)$ построим пл-то $\perp Ox$ и получим окружность:

$$S_0 = \pi R^2 = \pi y^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{по ф-ле } \text{объёма} \\ \text{помогая пл-ти поперек} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$\text{Тогда: } V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad \blacksquare$$



19! Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Ввести функцию для вычисления длины этой кривой.

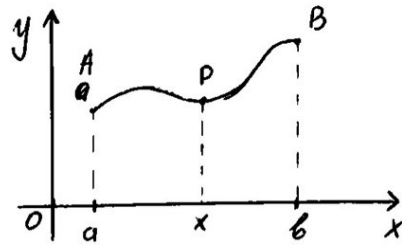
• Сделаем разбиение $[a, b]$ так, что:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и построим

точки $P_1, \dots, P_n$ соответв. $x_i, i = \overline{1, n}$.

Тогда длина прямой будет равна:

$$L = \sum_{i=1}^n |P_{i-1} - P_i|$$



Длиной кривой называется предел, к которому стремится длина ломаной при усл: $\max |P_{i-1} - P_i| \rightarrow 0$.

$$|P_{i-1} - P_i| = \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} =$$

$$= \sqrt{f'(\xi_i)^2 (x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}, \text{ где } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$\text{Тогда: } |P_{i-1} - P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 (f'(\xi_i)^2 + 1)} = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{f'(\xi_i)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{f'(x)^2 + 1} \cdot \Delta x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(x)^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad \blacksquare$$

(20.) Кривая задана в полярных координатах: $r = f(\varphi) \geq 0$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Введем φ -ную для вычисления длины дуги этой кривой.

- Рассмотрим уравнение $r = f(\varphi)$ как частный случай φ -ной вычисления длины дуги:
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'_{\varphi} = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ y'_{\varphi} = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases} &\Rightarrow (x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2 = (r')^2 \cos^2 \varphi - 2r'r \cos \varphi \sin \varphi + \\ &+ (r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi)^2 + 2r'r \cos \varphi \sin \varphi + (r \cos \varphi)^2 = \\ &= r^2 + (r')^2 \end{aligned}$$

Тогда:
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

(21) ЛИН. Д.У. 1-го порядка. Интегрирование ЛНДУ 1-го порядка методом Бернулли (и.б.) и методом Лагранжа.

- Д.У. - ур-ие, которое содержит независ. пер-ую "x", ч-ую данной пер-ой "y" = f(x) и производные этой ч-уи.
- Общий вид записи Л.Д.У. 1-го пор-ка:

$$F(x, y, y') = G(x)$$

- Интегрирование методом Бернулли:

$$y' + f'(x)y = g(x)$$

Заменим: $y = \delta(x) \cdot u(x) \Rightarrow y' = u'\delta + u\delta'$. Тогда:

$$u'\delta + u\delta' + u\delta \cdot f'(x) = g(x)$$

$$u'\delta + u(\delta' + \delta f'(x)) = g(x).$$

Найдём частное решение $\delta \neq 0$ из ур-ия: $\delta' + \delta f'(x) = g(x) \Rightarrow \delta(x)$

$$u' \cdot \delta(x) = g(x) \Rightarrow u' = \frac{g(x)}{\delta(x)} \Rightarrow u(x)$$

Зная $u(x)$ и $\delta(x)$ найдём $y(x)$: $y(x) = u(x) \cdot \delta(x)$ ■

- Интегрирование методом Лагранжа:

$$y' + a_1 y = b(x), \text{ где } a_1 - \text{const}$$

Если $(y_1, \dots, y_n)$ - ФСР, т.е. совокупность всех лин. независ. решений, то

частное решение ЛНДУ можно составить в виде: ~~$y_4 = y_1 + c_1 + c_2 y_2$~~
 $y_4 = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$, где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ олр. из сис-м:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = b(x) \end{cases}$$

(22.) Теорема Коши о $\exists$ и $!$ решения Д.У. n -го пор-ка.

Интегрирование Д.У. n -го пор-ка, допускающих понижение пор-ка.

• Теорема Коши:

Пусть $a_i(x)$, $(i = \overline{1, n})$, и $b(x)$ — непрерывны на некотором промежутке I , на котором задано Д.У. $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$.

Тогда $\exists$ единств. решение этого Д.У. упробл. нач. усл:
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0^* \\ y'(x_0) = y_0^* \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

• Интегрирование Д.У., допускающих понижение пор-ка:

1) $y^{(n)} = f(x)$

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx = F(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int F(x) + C_1 dx$$

$$\vdots$$
$$y' = \int f(x) + C_{n-1} dx$$

$$y = g(x) + C_n$$

2) Если Д.У. задано $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, т.е. не содержит явно y , то:
Заменим: $y' = p(x)$; $y'' = p'(x)$; ...; $y^{(n)} = p^{(n-1)}(x)$

Получим $p(x) \rightarrow$ найдем $y(x)$

3) Если Д.У. не содержит явно x , то:

Заменим: $y' = p(x)$; $y'' = p(x) \cdot p'(x)$

И получив $p(x)$ сможем найти $y(x)$.