Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

Лекция 1

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Скалярные и векторные величины. Понятие геометрического вектора (направленного отрезка). Нуль-вектор, единичный вектор (орт). Коллинеарные и компланарные векторы. Равенство векторов. Связанные, скользящие, свободные векторы. Линейные операции над векторами, свойства этих операций. Ортогональная проекция векторов на направление. Теоремы о проекциях

1.1. Векторные и скалярные величины

В прикладных науках оперируют величинами различного характера. В качестве примера обратимся к величинам, встречающимся в физике и механике. Такие величины, как массу и объем, характеризуют количественным значением, которое по отношению к некоторому эталону (единице измерения) задают действительным числом. Поэтому их называют ***скалярными***. Напротив, скорость, ускорение, сила характеризуются не только количественным значением, но и направлением. Их называют ***векторными величинами***.

Определение 1.1. ***Геометрическим вектором*** (также ***направленным отрезком***) называют любой отрезок, на котором выбрано одно из двух возможных направлений (рис. 1.1).

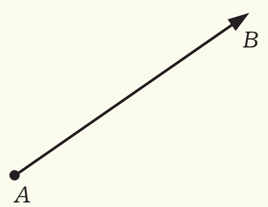


Рис. 1.1

Любой отрезок однозначно определяется своими концами, поэтому одно из двух возможных направлений для данного отрезка можно задать, указав порядок концов, т.е. от какого конца отрезка следует начать движение в заданном направлении, для того чтобы, двигаясь по отрезку, попасть в его другой конец. Это позволяет определить геометрический вектор просто как упорядоченную пару точек: первую точку в паре называют ***началом геометрического вектора***, а вторую — его ***концом***. Начало геометрического вектора называют также ***точкой*** его ***приложения***.

Обозначение: если точка A является началом геометрического вектора, а точка B — его концом, то геометрический вектор обозначают $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Важной характеристикой геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ является его ***модуль***, или ***длина***. Модуль вектора $|\overrightarrow{AB}|$ равен длине $|AB|$ отрезка, соединяющего его начало A и конец B. Геометрический вектор называют ***ненулевым***, если его длина положительна. Длина, равная нулю, соответствует ситуации, когда начало и конец геометрического вектора совпадают. В этом случае геометрический вектор называют ***нулевым*** или ***нуль-вектором*** и обозначают $\mathbf{0}$. Если длина геометрического вектора равна единице, его называют ***ортом*** или ***единичным вектором***.

Для нуль-вектора понятие направления теряет смысл, так как начало и конец у него совпадают. Однако такому геометрическому вектору удобно приписать произвольное направление, которое устанавливают в зависимости от конкретной ситуации.

1.2. Типы векторов и их взаимное расположение

Определение 1.2. Два *геометрических вектора* называют ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой[1] или на параллельных прямых.

Про пару коллинеарных геометрических векторов иногда говорят, что один из них коллинеарен другому.

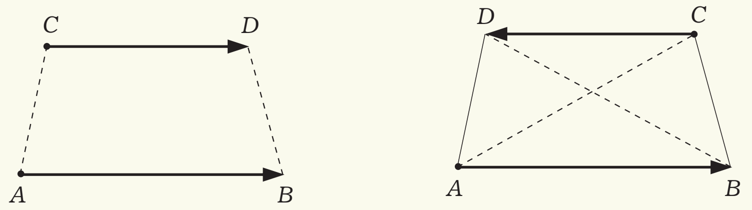
Все пары коллинеарных геометрических векторов можно разделить на две группы:

– ***однонаправленные*** (или ***сонаправленные***) ***коллинеарные геометрические векторы***, имеющие совпадающие направления;

– ***противоположно направленные коллинеарные геометрические векторы***, имеющие противоположные направления.

По определению считаем, что *нуль-вектор* коллинеарен любому другому. Определение 1.2 распространяется очевидным образом на любое число геометрических векторов.

Определение 1.3. Три геометрических вектора называют ***компланарными***, если эти векторы лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.



а *б*

Рис. 1.2

Это определение теряет смысл, если его сформулировать для двух геометрических векторов, потому что любые два геометрических вектора лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости. Однако можно говорить о четырех компланарных геометрических векторах или об их большем числе.

Определение 1.4. Два геометрических вектора называют ***равными***, если:

– они коллинеарны и однонаправлены;

– их длины совпадают.

В соответствии с определением 1.4 равные геометрические векторы могут иметь различные *точки приложения*, но задают одно и то же направление и имеют одинаковые *длины*. В этом случае, т.е. когда заданы направление и длина, но не фиксируется точка приложения, говорят, что задан ***свободный вектор***. Термин подчеркивает, что точка приложения геометрического вектора может меняться произвольно. В дальнейшем для удобства свободные векторы мы будем называть просто ***векторами***. Векторы обозначают одной строчной буквой с дополнительной чертой или стрелкой вверху: $\overline{a}$ или $\overrightarrow{a}$. Распространенным является также обозначение вектора полужирным шрифтом $\boldsymbol{a}$, которое в дальнейшем мы и будем использовать.

Разный характер действия векторов в прикладных задачах приводит к необходимости рассматривать другие типы векторов. Например, вектор угловой скорости и вектор силы, действующей на абсолютно твердое тело, можно перемещать только вдоль прямых, на которых они находятся. Такие векторы называют ***скользящими векторами***. Наконец, геометрические векторы, точка приложения которых не может изменяться, называют еще ***связанными векторами***. К ним относятся, например, скорости в потоке жидкости или газа.

[1] Говоря, что геометрический вектор лежит на прямой, мы подразумеваем очевидную ситуацию, когда начало и конец вектора лежат на этой прямой.

Пример 1.1. В зависимости от учета тех или иных конкретных условий одну и ту же *векторную величину* иногда удобно рассматривать как свободный, скользящий или связанный вектор. Например, вектор ускорения земного притяжения является связанным вектором, поскольку его модуль и направление зависят от расположения точки приложения относительно центра Земли. Поэтому при расчете траектории полета, например с Земли на Луну, его считают связанным вектором. Однако в задаче о движении снаряда при стрельбе на небольшую по сравнению с радиусом Земли дальность изменения вектора ускорения земного притяжения вдоль траектории снаряда незначительны и его принимают постоянным по модулю и направленным вертикально вниз, т.е. считают свободным вектором. Учет кривизны поверхности Земли приведет к необходимости считать этот вектор уже скользящим, т.е. постоянным при перемещениях лишь вдоль радиуса к центру Земли.

Замечание 1.1. Многие понятия, связанные с геометрическими векторами, переносятся и на свободные векторы. Так, говорят о ***начале*** (***точке приложения***) ***вектора***, ***конце вектора***, ***модуле*** (***длине***) ***вектора***. Рассматривают ***векторы ненулевые*** (включая ***единичные***, или ***орты***) и ***нулевые*** (***нуль-векторы***), ***векторы коллинеарные*** и ***векторы компланарные***. Коллинеарные векторы могут быть ***однонаправленными*** (***сонаправленными***) и ***противоположно направленными***.

1.3. Линейные операции и их свойства

Обсуждение векторных операций начнем с двух из них — сложения векторов и умножения вектора на число. Эти операции часто объединяют общим термином ***линейные операции***.

Определение 1.5. ***Суммой*** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ двух ***векторов*** $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют вектор $\boldsymbol{c}$, построенный по следующему ***правилу треугольника***. Совместим начало вектора $\boldsymbol{b}$ с *концом* вектора $\boldsymbol{a}$. Тогда суммой этих векторов будет вектор $\boldsymbol{c}$, начало которого совпадает с началом $\boldsymbol{a}$, а конец — с концом $\boldsymbol{b}$ (рис. 1.3).

Замечание 1.2. Наряду с правилом треугольника существует ***правило параллелограмма***. Выбрав для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ общее *начало*, строим на этих векторах параллелограмм. Тогда диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала векторов, определяет их сумму (рис. 1.4). Отметим, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны*, то их сумму по правилу параллелограмма определить нельзя, а правило треугольника применимо и в этом случае.

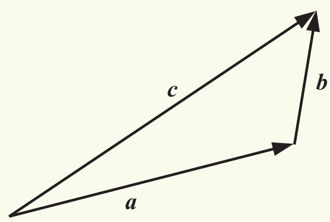


Рис. 1.3

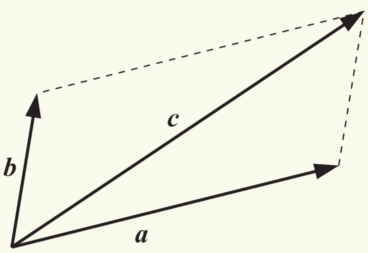


Рис. 1.4

Замечание 1.3. В определении 1.5 существует произвол в выборе *точки приложения векторов*, но результаты, получаемые с различными точками приложения, равны между собой. #

1°. Сложение векторов коммутативно: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

◄ Если складываемые векторы неколлинеарны, то свойство непосредственно вытекает из правила параллелограмма, так как в этом правиле порядок векторов не играет роли. Если же векторы коллинеарны, то их сложение сводится к сложению или вычитанию их длин в зависимости от того, являются ли складываемые векторы *однонаправленными* или *противоположно направленными*. ►

2°. Сложение векторов ассоциативно: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

◀ Доказать это свойство проще всего при помощи правила треугольника. Выберем в качестве начала вектора $\boldsymbol{a}$ точку A (рис. 1.5), и пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$. Совместим начало вектора $\boldsymbol{b}$ с точкой B, и пусть $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$. Наконец, начало вектора $\boldsymbol{c}$ совместим с концом C вектора $\boldsymbol{b}$, и пусть тогда $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$.

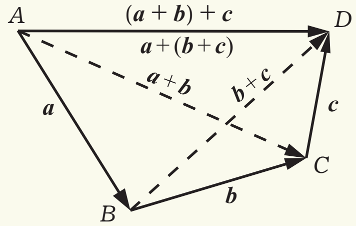


Рис. 1.5

Непосредственно из построения получаем

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},$$

т.е. *геометрический вектор* $\overrightarrow{AD}$ изображает и левую часть доказываемого равенства, и правую. ▶

3°. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ выполняется равенство $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$.

◀ Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что указанному условию удовлетворяет *нулевой вектор*. Проверку удобно проводить при помощи правила треугольника. ▶

4°. Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует такой вектор $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

◀ Действительно, таким является вектор $(-\boldsymbol{a})$, ***противоположный*** к вектору $\boldsymbol{a}$, т.е. вектор, коллинеарный $\boldsymbol{a}$, той же длины, что и $\boldsymbol{a}$, но *противоположно направленный*. Если в качестве точки приложения этого вектора выбрать конец вектора $\boldsymbol{a}$, то конец противоположного вектора совпадет с началом вектора $\boldsymbol{a}$. Согласно правилу треугольника, суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $(-\boldsymbol{a})$ будет вектор с совпадающими началом и концом, т.е. нулевой вектор. ▶

5°. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ существует такой вектор $\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. При этом вектор $\boldsymbol{x}$ определен однозначно.

◀ Указанному условию удовлетворяет вектор $(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$, так как с учетом свойств 2°–4°

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\big((-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\big)=\big(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})\big)+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

Если вектор $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет равенству $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, то, прибавив слева к обеим частям последнего равенства вектор $(-\boldsymbol{a})$, получим с учетом свойств 1°, 2°, что $\boldsymbol{x}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$. Действительно,

$$(-\boldsymbol{a})+\big(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}\big)=\big((-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\big)+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}.$$

Значит, вектор $\boldsymbol{x}$ определен однозначно. ▶

Свойство 5° позволяет ввести операцию вычитания векторов.

Определение 1.6. ***Разностью*** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ двух ***векторов*** $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют такой вектор $\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

С алгебраической точки зрения переход от $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ (в соответствии с определением 1.6) означает, что при переносе вектора в другую часть равенства перед ним надо менять знак.

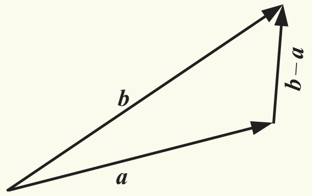


Рис. 1.6

Практически для вычисления разности векторов можно воспользоваться правилом треугольника. Совместим начала векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, тогда вектор с началом в конце вектора $\boldsymbol{a}$ и концом, совпадающим с концом $\boldsymbol{b}$, равен разности $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ этих векторов (рис. 1.6).

Операцию вычитания векторов также относят к линейным, так как она определяется операцией сложения и является обратной сложению.

Определение 1.7. ***Произведением вектора a на число*** λ называют вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, с длиной $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$, *однонаправленный* с $\boldsymbol{a}$ при $\lambda>0$ и противоположно направленный при $\lambda<0$.

Замечание 1.4. Если $\lambda=0$, то, согласно этому определению, вектор $0\boldsymbol{a}$ должен иметь длину $0\,|\boldsymbol{a}|=0$, т.е. должен быть нулевым вектором. Поэтому, хотя остальные характеристики и не определены (коллинеарность, направленность), произведение вектора на число 0 задано однозначно: $0\boldsymbol{a}$ есть нулевой вектор.

Пример 1.2. Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число -1 есть вектор, противоположный к $\boldsymbol{a}$, т.е. $(-1)\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a})$. #

Операция умножения вектора на число обладает свойством ассоциативности, а совместно с операцией сложения она удовлетворяет двум свойствам дистрибутивности.

6°. Умножение вектора на число ассоциативно: $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$.

◀ Действительно, обе части равенства представляют собой векторы, коллинеарные исходному вектору $\boldsymbol{a}$. Поэтому равенство будет верным, если совпадут длины векторов и их направления. Равенство длин векторов очевидно. Если числа λ и μ имеют один и тот же знак, то векторы в обеих частях будут однонаправлены с вектором $\boldsymbol{a}$. Если же λ и μ имеют противоположные знаки, то оба вектора в равенстве являются противоположно направленными по отношению к $\boldsymbol{a}$. Итак, в любом случае в равенстве стоят векторы одного направления и одинаковой длины, т.е. *равные векторы*. ▶

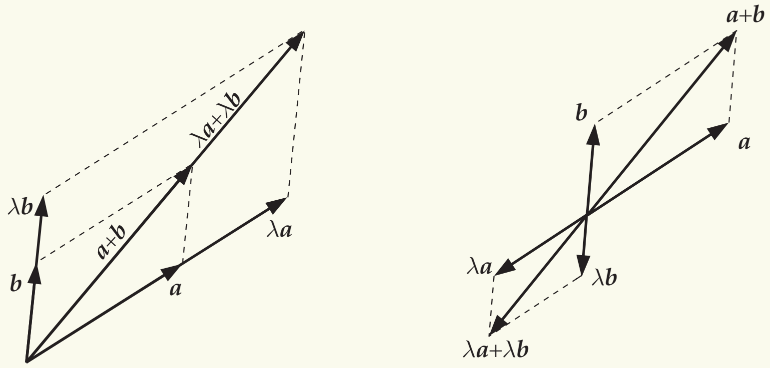
7°. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно векторов: $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

◀ При $\lambda=0$ свойство очевидно, так как в этом случае слева будет нулевой вектор (произведение вектора на число 0), а справа — сумма двух нулевых векторов. Если $\lambda\neq0$, свойство вытекает из правила параллелограмма и свойств подобных параллелограммов. На рис. 1.7 представлены случаи: а) $\lambda>0$; б) $\lambda<0$. ▶

8°. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно чисел: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

◀ В указанном равенстве — три коллинеарных вектора. Поэтому доказательство сводится к подсчету длин векторов, которым присвоены знаки, учитывающие направление. Если λ и μ имеют положительные знаки, то все три вектора в равенстве имеют одно направление, совпадающее с направлением вектора $\boldsymbol{a}$. При сложении этих векторов справа складываются их длины, а доказываемое равенство равносильно следующему: $(\lambda+\mu)\,|\boldsymbol{a}|=\lambda\,|\boldsymbol{a}|+\mu\,|\boldsymbol{a}|$. Случай, когда λ и μ отрицательны, аналогичен.

Пусть λ и μ имеют противоположные знаки. Для определенности будем считать, что $\lambda>0$, $\mu<0$. Противоположный случай сводится к этому заменой обозначений и учетом коммутативности сложения чисел и векторов. Если $\lambda>0$, $\mu<0$, то при сложении векторов $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\mu\boldsymbol{a}$ вычитаются их длины, так как складываются векторы противоположного направления.



а *б*

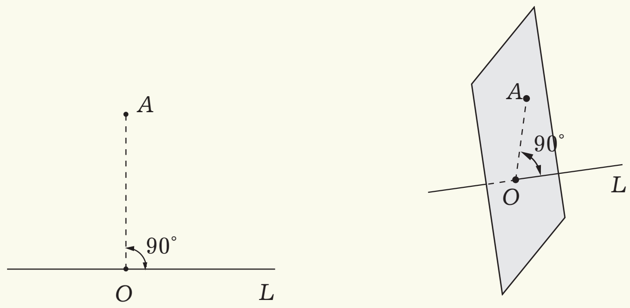
Рис. 1.7

Получаемый при этом вектор будет однонаправленным с $\boldsymbol{a}$ при $|\lambda| > |\mu|$ и противоположно направленным при $|\lambda| < |\mu|$. Его длина, согласно определению произведения вектора на число, равна $|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|$. Учитывая направление этого вектора, заключаем, что он равен $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$, т.е. доказываемое равенство верно и при противоположных знаках коэффициентов λ и μ.

Наконец, отметим тривиальный случай, когда один из коэффициентов λ и μ равен нулю. Например, если $\mu = 0$, то равенство $(\lambda+\mu)\,|\boldsymbol{a}| = \lambda\,|\boldsymbol{a}| + \mu\,|\boldsymbol{a}|$ сводится к равенству $(\lambda+0)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a}$, вытекающему из свойства 3° и определения 1.7. ►

1.4. Ортогональная проекция

Пусть на плоскости заданы прямая L и точка A. Опустим из точки A на прямую L перпендикуляр (рис. 1.8, *а*). Тогда его основание (точку O) называют ***ортогональной проекцией точки A на прямую L***. Если прямая L и точка A заданы в пространстве, то в этом случае ортогональной проекцией точки A на прямую L называют точку O пересечения прямой L с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через точку A (рис. 1.8, *б*). Если точка A лежит на прямой L, то она совпадает со своей ортогональной проекцией на L.



а *б*

Рис. 1.8

Для *вектора* $\overrightarrow{AB}$ (на плоскости или в пространстве) можно построить ортогональные проекции на прямую L его *начала* и *конца* (рис. 1.9). Вектор $\overrightarrow{O_AO_B}$, соединяющий эти проекции O_A и O_B и лежащий на прямой L, называют ***ортогональной проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на прямую L***.

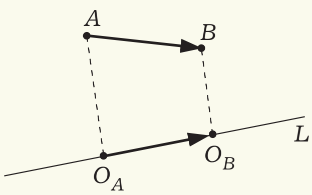


Рис. 1.9

Прямую, на которой задано одно из двух возможных направлений, называют ***осью***. Выбранное направление на оси изображают с помощью стрелки на соответствующем конце оси. Ортогональную проекцию $\overrightarrow{O_AO_B}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l можно полностью описать *длиной* вектора $\overrightarrow{O_AO_B}$, приписав ей знак, указывающий направление вектора. Если направление $\overrightarrow{O_AO_B}$ совпадает с заданным направлением оси, то берут знак плюс, а если направление вектора противоположно направлению оси, то берут знак минус. Длину вектора $\overrightarrow{O_AO_B}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, называют ***ортогональной проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на ось*** $\boldsymbol{l}$ и обозначают $\text{пр}_l\, \boldsymbol{a}$.

Обратим внимание на то, что ортогональной проекцией вектора на ось является число, в то время как ортогональная проекция вектора на прямую — это вектор. Чтобы вектору соответствовало число как его проекция, на прямой нужно выбрать одно из двух возможных направлений.

Каждый *ненулевой вектор* $\boldsymbol{l}$ однозначно определяет ось: его можно рассматривать расположенным на некоторой прямой и задающим на ней направление. Ортогональную проекцию вектора на такую ось называют ***ортогональной проекцией*** этого ***вектора на направление*** вектора $\boldsymbol{l}$.

Угол между направлениями двух ненулевых векторов называют ***углом между*** этими ***векторами***. Угол может изменяться в пределах от 0 до π. Крайние значения 0 и π отвечают *коллинеарным векторам*, соответственно *однонаправленным* и *противоположно направленным*. Если хотя бы один из двух векторов является *нулевым*, то угол между такими векторами не определен. Удобно, однако, считать, что в этом случае угол имеет произвольное значение. Так, нулевой вектор коллинеарен любому другому, что формально соответствует углу 0 (или π). Конкретное значение, приписываемое углу между нулевым вектором и каким-либо другим, выбирают исходя из ситуации.

Теорема 1.1. Ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление ненулевого вектора $\boldsymbol{l}$ равна длине $|\boldsymbol{a}|$, умноженной на косинус угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$, т.е.

$$\text{пр}_l\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l}}),$$

где $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{l}})$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$.

◀ Пусть вектор $\boldsymbol{l}$ лежит на прямой L, а его началом является точка A. Совместим начало вектора $\boldsymbol{a}$ с точкой A, и пусть его концом будет точка B (рис. 1.10). Построим ортогональную проекцию C точки B на прямую L. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ на прямую L.

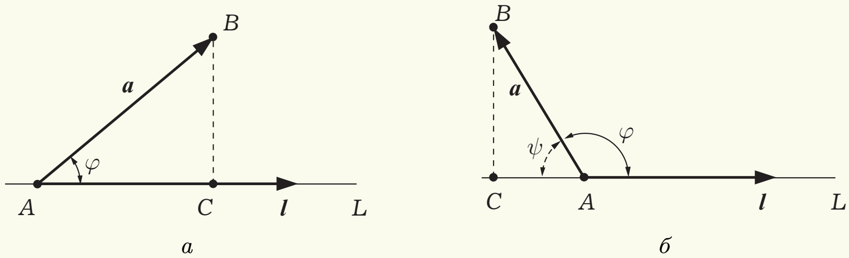


Рис. 1.10

Если угол φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$ острый (как это показано на рис. 1.10, *а*), то конец вектора $\boldsymbol{l}$ и точка C лежат по одну сторону от точки A. В этом случае проекция $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{l}$ равна длине $|AC| = |AB| \cos\varphi$ катета AC треугольника ABC.

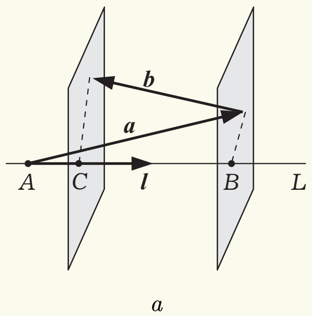
Если угол φ тупой (см. рис. 1.10, *б*), то конец вектора $\boldsymbol{l}$ и точка C лежат по разные стороны от точки A. Это значит, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{l}$ имеют противоположные направления, а проекция вектора $\boldsymbol{a}$ равна $-|AC|$. В треугольнике ABC угол ψ, прилежащий к катету AC, равен $\pi - \varphi$, поэтому $|AC| = |AB| \cos(\pi - \varphi) = -|AB| \cos\varphi$.

Если же $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то точка C совпадает с точкой A и вектор $\overrightarrow{AC}$ является нулевым вектором. Однако $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, следовательно, и в этом случае утверждение теоремы справедливо. ▶

Теорема 1.2. Ортогональная проекция *суммы векторов* на направление ненулевого вектора равна сумме их ортогональных проекций на направление этого вектора, а при умножении вектора на число его ортогональная проекция на направление ненулевого вектора умножается на то же число:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{пр}_{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{a} + \text{пр}_{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{b}, \qquad \text{пр}_{\boldsymbol{l}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\,\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{a}.$$

◀ Доказательство следует из рис. 1.11. В случае, изображенном на рис. 1.11, *а*, имеем $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{a} = |AB|$, $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{b} = -|BC|$, $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |AC| = |AB|-|BC|$. В случае, изображенном на рис. 1.11, *б*, $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{a} = |AB|$ и, если $\lambda > 0$, $\text{пр}_{\boldsymbol{l}}(\lambda\boldsymbol{a}) = |AE| = \lambda|AB|$. Остальные варианты (точка C не принадлежит отрезку AB в случае *а*, $\lambda \leqslant 0$ в случае *б*) рассматриваются аналогично. ▶



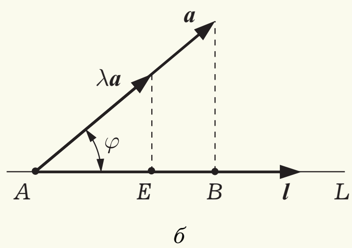


Рис. 1.11

Лекция 2

БАЗИС. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов. Критерий линейной зависимости двух и трех векторов, линейная зависимость четырех векторов. Векторные пространства V_1, V_2, V_3 и базисы в них. Разложение вектора по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами. Ортонормированный базис. Скалярное произведение векторов, его механический смысл. Вычисление скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе. Вычисление длины вектора, косинуса угла между векторами и проекции вектора на направление. Координаты вектора в ортонормированном базисе как проекции этого вектора на направление базисных векторов. Направляющие косинусы вектора.

2.1. Линейная зависимость и независимость векторов

Введенные нами *линейные операции* над *векторами* дают возможность составлять различные выражения для *векторных величин* и преобразовывать их при помощи установленных для этих операций свойств.

Исходя из заданного набора векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, можно составить выражение вида

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n, \tag{2.1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа. Это выражение называют ***линейной комбинацией векторов*** $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Числа α_i, $i = \overline{1, n}$, представляют собой ***коэффициенты линейной комбинации***. Набор векторов называют еще ***системой векторов***.

В связи с введенным понятием линейной комбинации векторов возникает задача описания множества векторов, которые могут быть записаны в виде линейной комбинации данной системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Кроме того, закономерны вопросы об условиях, при которых существует представление вектора в виде линейной комбинации, и о единственности такого представления.

Определение 2.1. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называют ***линейно зависимыми***, если существует такой набор коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

и при этом хотя бы один из этих коэффициентов ненулевой. Если указанного набора коэффициентов не существует, то векторы называют ***линейно независимыми***.

Если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, то, очевидно, $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$. Имея это в виду, можем сказать так: векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно независимы, если из равенства (2.2) вытекает, что все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равны нулю.

Следующая теорема поясняет, почему новое понятие названо термином „зависимость“ (или „независимость“), и дает простой критерий линейной зависимости.

Теорема 2.1. Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $n > 1$, были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них являлся линейной комбинацией остальных.

◄ Необходимость. Предположим, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы. Согласно определению 2.1 линейной зависимости, в равенстве (2.2) слева есть хотя бы один ненулевой коэффициент, например α_1. Оставив первое слагаемое в левой части равенства, перенесем остальные в правую часть, меняя, как обычно, у них знаки. Разделив полученное равенство на α_1, получим

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_n,$$

т.е. представление вектора $\boldsymbol{a}_1$ в виде линейной комбинации остальных векторов $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$.

Достаточность. Пусть, например, первый вектор $\boldsymbol{a}_1$ можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{a}_n$. Перенеся все слагаемые из правой части в левую, получим $\boldsymbol{a}_1 - \beta_2\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \beta_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, т.е. линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\beta_2$, ..., $\alpha_n = -\beta_n$, равную *нулевому вектору*. В этой линейной комбинации не все коэффициенты равны нулю. Согласно определению 2.1, векторы $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы. ►

Определение и критерий линейной зависимости сформулированы так, что подразумевают наличие двух или более векторов. Однако можно также говорить о линейной зависимости одного вектора. Чтобы реализовать такую возможность, нужно вместо „векторы линейно зависимы“ говорить „система векторов линейно зависима“. Нетрудно убедиться, что выражение „система из одного вектора линейно зависима“ означает, что этот единственный вектор является нулевым (в линейной комбинации имеется только один коэффициент, и он не должен равняться нулю).

Понятие линейной зависимости имеет простую геометрическую интерпретацию. Эту интерпретацию проясняют следующие три утверждения.

Теорема 2.2. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

◄ Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы, то один из них, например $\boldsymbol{a}$, выражается через другой, т.е. $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$ для некоторого действительного числа λ. Согласно определению 1.7 *произведения вектора на число*, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются коллинеарными.

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Если они оба нулевые, то очевидно, что они линейно зависимы, так как любая их линейная комбинация равна нулевому вектору. Пусть один из этих векторов не равен $\boldsymbol{0}$, например вектор $\boldsymbol{b}$. Обозначим через λ отношение длин векторов: $\lambda = |\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$. Коллинеарные векторы могут быть *однонаправленными* или *противоположно направленными*. В последнем случае у λ изменим знак. Тогда, проверяя определение 1.7, убеждаемся, что $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$. Согласно теореме 2.1, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы. ►

Замечание 2.1. В случае двух векторов, учитывая критерий линейной зависимости, доказанную теорему можно переформулировать так: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них представляется как произведение другого на число. Это является удобным критерием коллинеарности двух векторов.

Теорема 2.3. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *компланарны*.

◄ Если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы, то, согласно теореме 2.1, один из них, например $\boldsymbol{a}$, является линейной комбинацией остальных: $\boldsymbol{a} = \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$. Совместим начала векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в точке A. Тогда векторы $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$ будут иметь общее начало в точке A и по *правилу параллелограмма* их *сумма*, т.е. вектор $\boldsymbol{a}$, будет представлять собой вектор с началом A и *концом*, являющимся вершиной параллелограмма, построенного на векторах-слагаемых. Таким образом, все векторы лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. Если один из этих векторов является нулевым, то очевидно, что он будет линейной комбинацией остальных. Достаточно все коэффициенты линейной комбинации взять равными нулю. Поэтому можно считать, что все три вектора не являются нулевыми. Совместим *начала* этих векторов в общей точке O. Пусть их концами будут соответственно точки A, B, C (рис. 2.1). Через точку C проведем прямые, параллельные прямым, проходящим через пары точек O, A и O, B. Обозначив точки пересечения через A' и B', получим параллелограмм $OA'CB'$, следовательно, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Вектор $\overrightarrow{OA'}$ и ненулевой вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ коллинеарны, а потому первый из них может быть получен умножением второго на действительное число α: $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}$. Аналогично $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$, $\beta \in \mathbb{R}$. В результате получаем, что $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, т.е. вектор $\boldsymbol{c}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Согласно теореме 2.1, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ являются линейно зависимыми. ►

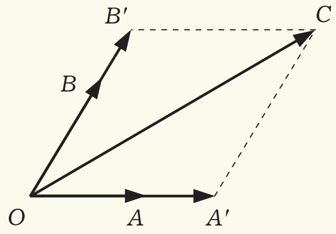


Рис. 2.1

Теорема 2.4. Любые четыре вектора линейно зависимы.

◄ Доказательство проводим по той же схеме, что и в теореме 2.3. Рассмотрим произвольные четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$. Если один из четырех векторов является нулевым, либо среди них есть два коллинеарных вектора, либо три из четырех векторов компланарны, то эти четыре вектора линейно зависимы. Например, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то мы можем составить их линейную комбинацию $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ с ненулевыми коэффициентами, а затем в эту комбинацию добавить оставшиеся два вектора, взяв в качестве коэффициентов нули. Получим равную $\mathbf{0}$ линейную комбинацию четырех векторов, в которой есть ненулевые коэффициенты.

Таким образом, мы можем считать, что среди выбранных четырех векторов нет нулевых, никакие два не коллинеарны и никакие три не являются компланарными. Выберем в качестве их общего начала точку O. Тогда концами векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ будут некоторые точки A, B, C, D (рис. 2.2). Через точку D проведем три плоскости, параллельные плоскостям OBC, OCA, OAB, и пусть A', B', C' — точки пересечения этих плоскостей с прямыми OA, OB, OC соответственно. Мы получаем параллелепипед $OA'C''B'C'B''DA''$, и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ лежат на его ребрах, выходящих из вершины O. Так как четырехугольник $OC''DC'$ является параллелограммом, то $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC''} + \overrightarrow{OC'}$. В свою очередь, отрезок OC'' является диагональю параллелограмма $OA'C''B'$, так что $\overrightarrow{OC''} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, а $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$.

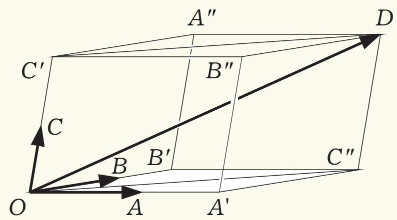


Рис. 2.2

Остается заметить, что пары векторов $\overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{OC'}$ коллинеарны, и, следовательно, можно подобрать коэффициенты α, β, γ так, что $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC'} = \gamma\overrightarrow{OC}$. Окончательно получаем $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OD}$ выражается через остальные три вектора, а все четыре вектора, согласно теореме 2.1, линейно зависимы. ►

2.2. Базис

Аналогично трем моделям геометрии (геометрии на прямой, на плоскости и в пространстве) мы рассмотрим три множества *свободных векторов*, или, как говорят, три пространства векторов: ***пространство*** $\boldsymbol{V_1}$ всех *коллинеарных* между собой *векторов*, т.е. параллельных некоторой прямой, ***пространство*** $\boldsymbol{V_2}$ всех *компланарных* между собой *векторов*, т.е. параллельных некоторой плоскости, и ***пространство*** $\boldsymbol{V_3}$ всех свободных векторов.

Рассмотрим пространство V_1. Любой *ненулевой вектор* пространства V_1 называют ***базисом в*** $\boldsymbol{V_1}$. Любые два вектора этого пространства, будучи коллинеарными, *линейно зависимы*, т.е. один из них может быть получен из другого умножением на число. Выберем и зафиксируем в V_1 базис, т.е. вектор $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{x} \in V_1$ представляется в виде $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{e}$. Это равенство называют ***разложением вектора*** $\boldsymbol{x}$ ***в базисе*** $\boldsymbol{e}$, а число λ — ***координатой вектора*** $\boldsymbol{x}$ в этом базисе. Отметим, что коэффициент λ при этом определен однозначно. Действительно, этот коэффициент равен $\lambda = \pm|\boldsymbol{x}|/|\boldsymbol{e}|$, причем выбирают знак плюс, если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{e}$ *однонаправлены*, и знак минус в противоположном случае.

Рассмотрим пространство V_2. Любую упорядоченную пару неколлинеарных векторов в пространстве V_2 называют ***базисом в*** $\boldsymbol{V_2}$. Выберем в этом пространстве базис, т.е. два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Согласно теореме 2.3, эти два вектора и любой третий вектор $\boldsymbol{x}$, будучи компланарными, линейно зависимы. Поэтому один из них является *линейной комбинацией* двух других. При этом можно утверждать, что вектор $\boldsymbol{x}$ выражается через $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Действительно, запишем линейную комбинацию этих векторов

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}, \tag{2.3}$$

в которой хотя бы один из *коэффициентов* не равен нулю. Сразу делаем вывод, что $\alpha \neq 0$, так как в противном случае в равенстве (2.3) слева можно опустить первое слагаемое, и мы получим, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ линейно зависимы. Но этого быть не может, так как они не коллинеарны (см. теорему 2.2). Так как $\alpha \neq 0$, мы можем разделить равенство (2.3) на α. В результате, перенося последние два слагаемых в правую часть, получаем представление вида

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2, \tag{2.4}$$

которое называют ***разложением вектора*** $\boldsymbol{x}$ ***в базисе*** $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, а коэффициенты λ_1, λ_2 этого представления — ***координатами вектора*** $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Отметим, что в представлении (2.4) коэффициенты λ_1 и λ_2 определены однозначно. Это можно обосновать, анализируя доказательство теоремы 2.3 (используемый в доказательстве параллелограмм однозначно определен диагональю и прямыми, на которых лежат смежные стороны). Однако то же можно установить, используя лишь факт линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

В самом деле, если есть два представления $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 = \mu_1\boldsymbol{e}_1 + \mu_2\boldsymbol{e}_2$, то, перенеся в последнем равенстве все слагаемые влево и используя свойство 8° (см. с. 5) дистрибутивности умножения вектора на число относительно чисел, получим $(\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$. Коэффициенты в этом равенстве слева равны нулю, так как векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ линейно независимы (они неколлинеарны, см. теорему 2.2). Таким образом, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, и два взятых нами представления вектора $\boldsymbol{x}$ совпадают.

Рассмотрим пространство V_3. Любую упорядоченную тройку некомпланарных векторов называют ***базисом*** в V_3. Выберем в V_3 базис, т.е. любые три некомпланарных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Эти три вектора с добавленным к ним произвольным четвертым вектором $\boldsymbol{x}$ линейно зависимы (см. теорему 2.4). Можно доказать так же, как мы это делали в случае пространства V_2, что вектор $\boldsymbol{x}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3. \tag{2.5}$$

При этом коэффициенты в представлении (2.5) определены однозначно, так как векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ линейно независимы. Представление вектора $\boldsymbol{x}$ в виде (2.5) называют ***разложением*** этого ***вектора в базисе*** $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, а коэффициенты λ_1, λ_2 и λ_3 разложения — ***координатами вектора*** $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Векторы в базисах пространств V_2 и V_3, согласно определению базисов, являются упорядоченными. Порядок векторов в базисе устанавливает порядок среди координат любого вектора, и поэтому координаты всегда считают тоже упорядоченными. Если базис, например, в пространстве V_3 фиксирован, то каждому вектору из V_3 соответствует единственная упорядоченная тройка чисел, составленная из его координат. Кроме того, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует единственная линейная комбинация векторов базиса, т.е. вектор из V_3, координаты которого совпадают с этой тройкой чисел. Поэтому, если базис фиксирован, то векторы можно рассматривать как упорядоченные наборы их координат в этом базисе.

Эту возможность часто используют, отождествляя векторы с упорядоченными наборами их координат. Например, если вектор $\boldsymbol{x}$ из V_3 в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ имеет разложение $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$, то этому вектору соответствует упорядоченная тройка его координат, которую часто записывают так: $\{2; 3; -4\}$. Более того, отождествляют вектор с упорядоченной тройкой координат и пишут $\boldsymbol{x} = \{2; 3; -4\}$, вкладывая в это равенство указанный выше смысл.

Итак, если базис в пространстве V_1, V_2 или V_3 фиксирован, то любой вектор из этого пространства однозначно определен своими координатами, записанными в порядке следования векторов базиса. Поэтому можно сказать, что координаты вектора являются представлением, или „изображением“, этого вектора в данном базисе.

2.3. Вычисления в координатах

Выясним, что происходит с *координатами векторов* при выполнении *линейных операций*.

Теорема 2.5. При сложении двух векторов их координаты в одном и том же *базисе* складываются. При умножении вектора на число координаты этого вектора умножаются на это число.

◄ Для простоты остановимся, например, на пространстве V_3. Фиксируем в V_3 базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Возьмем два произвольных вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и запишем их *разложения* в выбранном базисе: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3$. Используя свойства линейных операций, вычисляем сумму этих векторов:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)+(y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3) = (x_1+y_1)\boldsymbol{e}_1+(x_2+y_2)\boldsymbol{e}_2+(x_3+y_3)\boldsymbol{e}_3.$$

Мы получили разложение *суммы векторов* в фиксированном базисе. Отсюда заключаем, что координаты x_i и y_i исходных слагаемых, соответствующие одному вектору $\boldsymbol{e}_i$ в базисе $(i = 1, 2, 3)$, складываются.

Аналогично с учетом свойств линейных операций имеем $\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3) = (\lambda x_1)\boldsymbol{e}_1+(\lambda x_2)\boldsymbol{e}_2+(\lambda x_3)\boldsymbol{e}_3$. В итоге получаем разложение вектора $\lambda\boldsymbol{x}$ в фиксированном базисе. Из этого разложения видим, что каждая из координат исходного вектора $\boldsymbol{x}$ умножена на число λ. ►

Разложение вектора в базисе имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим, например, пространство V_3. Разложение вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе, скажем $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, показано на рис. 2.2. Координатами вектора $\boldsymbol{d}$ будут отношения

$$d_a = \pm\frac{|OA'|}{|OA|}, \qquad d_b = \pm\frac{|OB'|}{|OB|}, \qquad d_c = \pm\frac{|OC'|}{|OC|},$$

где знаки выбирают в зависимости от того, является соответствующая пара *коллинеарных векторов* (например, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ для d_a) *однонаправленной* или нет.

Теорема 2.6. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их одноименные координаты в одном и том же базисе были пропорциональны.

◀ Докажем теорему в случае пространства V_3. Фиксируем в V_3 базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Рассмотрим разложения в выбранном базисе векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3. \tag{2.6}$$

Если одноименные координаты этих векторов пропорциональны, т.е. существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что выполнены равенства

$$x_1 = \lambda y_1, \quad x_2 = \lambda y_2, \quad x_3 = \lambda y_3, \tag{2.7}$$

то $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \lambda y_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda y_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda y_3\boldsymbol{e}_3 = \lambda(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) = \lambda\boldsymbol{y}$ и из теорем 2.1, 2.2 следует, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ коллинеарны. Достаточность условия доказана. Для доказательства его необходимости предположим, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ коллинеарны. Но тогда по теореме 2.2 они *линейно зависимы* и в силу теоремы 2.1 один из них, например $\boldsymbol{x}$, является *линейной комбинацией* „остальных“, т.е. $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$. Подставляя в это равенство разложения (2.6), получаем $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \lambda(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3)$, или $(x_1 - \lambda y_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - \lambda y_2)\boldsymbol{e}_2 + (x_3 - \lambda y_3)\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$. А поскольку вектор $\boldsymbol{0}$ в любом базисе имеет нулевые координаты, то из последнего равенства следуют соотношения (2.7). ▶

Следствие 2.1. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы отношения их одноименных координат в одном и том же базисе были равны.

◀ Выражая λ из соотношений (2.7) и приравнивая полученные дроби, находим, что

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}. \tag{2.8}$$

Отметим, что в условии (2.8) в знаменателях дробей могут стоять нули, но при этом подразумевается, что и в числителе соответствующей дроби стоит нуль. Для пространства V_2 условие (2.8) сводится к равенству только первых двух дробей. ▶

Пример 2.1. Пусть векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ образуют базис в V_2. Векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$ *линейно независимы*, так как $2/(-1) \neq -3/3$. Поэтому они тоже образуют базис в пространстве V_2. Найдем разложение в этом базисе векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2$.

Чтобы найти разложение вектора $\boldsymbol{e}_1$, вычислим сумму векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$. Следовательно, искомым разложением является $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Чтобы найти разложение вектора $\boldsymbol{c}$, поступим следующим образом. Пусть $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$. Подставив в это равенство разложения векторов $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, приведем подобные слагаемые в правой части равенства. Получим, что

$$3\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 = \lambda_1(2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2) + \lambda_2(-\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) = (2\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{e}_1 + (-3\lambda_1 + 3\lambda_2)\boldsymbol{e}_2.$$

Поскольку каждый вектор в любом базисе имеет единственное разложение, то λ_1, λ_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 3, \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Это значит, что $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Определение 2.2. Базис называют ***ортогональным***, если он состоит из векторов, лежащих на взаимно перпендикулярных прямых. Базис называют ***ортонормированным***, если он ортогональный и состоит из *единичных векторов*.

Параллелепипед, изображенный на рис. 2.2 в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ в V_3, является прямоугольным, а точки A', B', C' — *ортогональными проекциями точки D* на соответствующие прямые. Координаты вектора $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$ в ортонормированном базисе равны *ортогональным проекциям* этого вектора *на направления векторов*, образующих этот базис.

Ортонормированный базис в пространстве V_3 принято обозначать, с учетом порядка, буквами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, в V_2 — соответственно $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и в V_1 — $\boldsymbol{i}$.

В случае ортонормированного базиса в пространстве V_3 легко найти расстояние от точки O до произвольной точки X. По теореме Пифагора $|OX|^2 = |OX_i|^2 + |OX_j|^2 + |OX_k|^2$ (рис. 2.3), где точки X_i, X_j, X_k — ортогональные проекции точки X на соответствующие оси. Но длины отрезков OX_i, OX_j, OX_k — это абсолютные значения координат вектора $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. В результате получаем формулу для вычисления *длины вектора* $\boldsymbol{x}$ с координатами $\{x_1; x_2; x_3\}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ пространства V_3:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \boldsymbol{x} \in V_3. \tag{2.9}$$

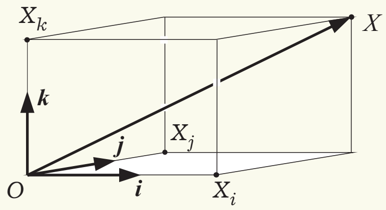


Рис. 2.3

Аналогично вычисляют длину вектора из пространства V_2 по его координатам x_1, x_2 в ортонормированном базисе:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \boldsymbol{x} \in V_2, \tag{2.10}$$

и длину вектора из V_1 с координатой x_1 в ортонормированном базисе:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|, \quad \boldsymbol{x} \in V_1. \tag{2.11}$$

Пусть *ненулевой вектор* $\boldsymbol{x} \in V_3$ образует с направлениями векторов ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ углы α, β и γ соответственно. Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют ***направляющими косинусами вектора*** $\boldsymbol{x}$ (рис. 2.4). Направляющие косинусы не зависят от длины вектора, они характеризуют направление вектора и при умножении вектора на положительное число не изменяются.

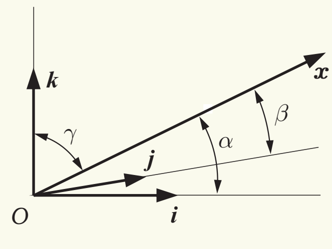


Рис. 2.4

Направляющие косинусы вектора можно использовать при вычислении его координат. Если ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in V_3$ имеет в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ координаты $\{x_1; x_2; x_3\}$ и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, то

$$x_1 = |\boldsymbol{x}|\cos\alpha, \quad x_2 = |\boldsymbol{x}|\cos\beta, \quad x_3 = |\boldsymbol{x}|\cos\gamma. \tag{2.12}$$

Используя формулу (2.9) для вычисления длины вектора, получаем $|\boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2\cos^2\alpha + |\boldsymbol{x}|^2\cos^2\beta + |\boldsymbol{x}|^2\cos^2\gamma$, откуда после сокращения на $|\boldsymbol{x}| \neq 0$ вытекает следующая формула связи для направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.13}$$

Для любых углов α, β, γ из отрезка $[0, \pi]$, удовлетворяющих соотношению (2.13), существует вектор, направляющими косинусами которого являются величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. В качестве примера можно взять вектор $\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$. Согласно формулам (2.9) и (2.13) этот вектор имеет единичную длину, а значения $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ представляют собой направляющие косинусы этого вектора.

В случае ортонормированного базиса в пространстве V_2 направление вектора удобно указывать одним углом φ, который отсчитывается от первого вектора базиса против хода часовой стрелки в случае положительного значения (рис. 2.5). Угол φ, длина вектора $\boldsymbol{x}$ и его координаты $\{x_1; x_2\}$ связаны соотношениями: $x_1 = |\boldsymbol{x}| \cos\varphi$, $x_2 = |\boldsymbol{x}| \sin\varphi$.

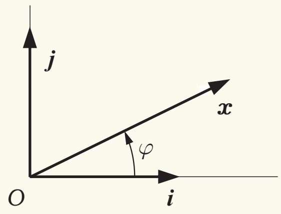


Рис. 2.5

2.4. Скалярное произведение

Есть несколько операций умножения *векторов*. Рассмотрим одну из них, результатом которой является действительное число, т.е. скалярная величина.

Определение 2.3. ***Скалярным произведением*** двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют число, равное $|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\varphi$ — произведению длин $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ этих векторов на косинус *угла* φ между ними.

Если хотя бы один из двух векторов является *нулевым*, то их скалярное произведение будет равно нулю независимо от того, какое значение выбрано в качестве угла между векторами.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ далее будем обозначать $\boldsymbol{ab}$, хотя в литературе встречается и обозначение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Используя теорему 1.1, можно выразить скалярное произведение двух векторов через *ортогональную проекцию на направление*. Если вектор $\boldsymbol{a}$ ненулевой, то скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получается перемножением длины вектора $\boldsymbol{a}$ и ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \operatorname{пр}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$. Аналогично при $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ имеем равенство $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{b}| \operatorname{пр}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$.

Если угол между двумя *ненулевыми векторами* прямой (т.е. равен $90°$), то такие векторы называют ***ортогональными***.

Нулевой вектор считают ортогональным любому другому вектору.

Теорема 2.7. Для того чтобы два вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

◄ Как следует из определения 2.3, скалярное произведение ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\varphi$. Поэтому его знак определяется углом φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

– угол φ острый: $\boldsymbol{ab} > 0$;

– угол φ тупой: $\boldsymbol{ab} < 0$;

– угол φ прямой: $\boldsymbol{ab} = 0$.

Мы видим, что два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними прямой. Если один из векторов является нулевым, то скалярное произведение также равно нулю. При этом угол между векторами не определен, но, как уже было отмечено, считают, что нулевой вектор ортогонален любому другому. ►

Скалярное произведение имеет следующие свойства.

1°. Скалярное произведение коммутативно: $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

◀ Свойство непосредственно вытекает из определения 2.3, так как, согласно этому определению, скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей. ▶

2°. Совместно с умножением на число операция скалярного умножения ассоциативна:

$$(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab}).$$

◀ Если $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ — нулевой вектор, то обе части доказываемого равенства равны нулю. Если же $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то, используя выражение скалярного произведения через ортогональную проекцию вектора на направление вектора $\boldsymbol{b}$ и утверждение теоремы 1.2, получаем

$$(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\lambda \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b}| \operatorname{пр}_{\boldsymbol{b}}(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda\, |\boldsymbol{b}| \operatorname{пр}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{ab}). \qquad ▶$$

3°. Скалярное умножение и сложение векторов связаны свойством дистрибутивности:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}.$$

◀ Доказательство аналогично предыдущему. При $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ обе части доказываемого равенства равны нулю. Если же $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, то удобно выразить скалярное произведение через ортогональные проекции векторов на направление вектора $\boldsymbol{c}$. Используя теорему 1.2, находим

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}| \operatorname{пр}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{c}|\,(\operatorname{пр}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a} + \operatorname{пр}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{c}| \operatorname{пр}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a} + |\boldsymbol{c}| \operatorname{пр}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}. \qquad ▶$$

Величину $\boldsymbol{aa}$ называют ***скалярным квадратом вектора*** $\boldsymbol{a}$ и обозначают $\boldsymbol{a}^2$.

4°. Свойство скалярного квадрата: $\boldsymbol{a}^2 \geqslant 0$, причем $\boldsymbol{a}^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

◀ Действительно, $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}| \cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2$. Поскольку квадрат длины вектора — неотрицательное число, то неравенство $\boldsymbol{a}^2 \geqslant 0$ выполнено всегда. Равенство $\boldsymbol{a}^2 = 0$ эквивалентно соотношению $|\boldsymbol{a}| = 0$, т.е. тому, что $\boldsymbol{a}$ — нулевой вектор. ▶

Замечание 2.2. Свойства 2° и 3° часто объединяют в свойство ***линейности скалярного произведения*** относительно первого сомножителя. Благодаря коммутативности скалярного произведения (свойству 1°) скалярное произведение линейно и по второму сомножителю. Действительно, $\boldsymbol{a}(\lambda \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{ba}) = \lambda(\boldsymbol{ab})$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{ba} + \boldsymbol{ca} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$. #

Свойства скалярного произведения часто используют при решении задач.

Пример 2.2. Найдем длину вектора $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d}$ при условии, что $|\boldsymbol{c}| = 5$, $|\boldsymbol{d}| = 4$, а угол φ между векторами $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ равен 60°.

Поскольку $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$, то, вычисляя скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$, находим, что

$$\boldsymbol{a}^2 = (3\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d})(3\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d}) = 9\boldsymbol{c}^2 - 12\boldsymbol{cd} + 4\boldsymbol{d}^2 = 9\,|\boldsymbol{c}|^2 - 12\,|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{d}| \cos\varphi + 4\,|\boldsymbol{d}|^2 =$$
$$= 9 \cdot 25 - 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 16 = 225 - 120 + 64 = 169.$$

Следовательно, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} = 13$.

Пример 2.3. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 120°, а длина стороны AC в три раза больше расстояния между вершинами A и B. Найдем острый угол φ между стороной BC и медианой AM треугольника.

Угол φ между стороной BC и медианой AM (рис. 2.6) равен углу между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AM}$. Согласно определению 2.3 скалярного произведения, косинус угла выражается через скалярное произведение этих векторов и их длины с помощью формулы

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BC}|}.$$

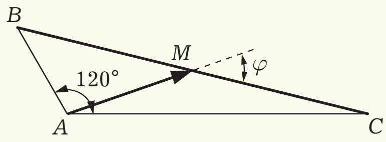


Рис. 2.6

Пусть $|AB| = s$. Тогда $|AC| = 3s$, и поскольку $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, то

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 0{,}5\big(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\big) = 0{,}5\big(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\big)$$

и поэтому

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0{,}5(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0{,}5(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = 0{,}5(9s^2 - s^2) = 4s^2.$$

Вычислив длины векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AM}| &= \sqrt{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}} = 0{,}5\sqrt{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})} = \\ &= 0{,}5\sqrt{(\overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2} = 0{,}5\sqrt{9s^2 + 6s^2\cos 120^\circ + s^2} = 0{,}5s\sqrt{7},\\ |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}} = \sqrt{(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})} = \\ &= \sqrt{(\overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{9s^2 - 6s^2\cos 120^\circ + s^2} = s\sqrt{13},\end{aligned}$$

найдем, что

$$\cos\varphi = \frac{4s^2}{0{,}5s\sqrt{7}\cdot s\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{91}}.$$

Следовательно, острый угол между стороной BC и медианой AM равен $\varphi = \arccos(8/\sqrt{91})$. #

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ из V_3 заданы своими *координатами* в *ортонормированном базисе* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\boldsymbol{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$. Это означает, что имеются *разложения* $\boldsymbol{a} = x_a\boldsymbol{i} + y_a\boldsymbol{j} + z_a\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_b\boldsymbol{i} + y_b\boldsymbol{j} + z_b\boldsymbol{k}$. Используя их и свойства 1°–4° скалярного произведения, вычислим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} &= (x_a\boldsymbol{i} + y_a\boldsymbol{j} + z_a\boldsymbol{k})(x_b\boldsymbol{i} + y_b\boldsymbol{j} + z_b\boldsymbol{k}) = \\ &= x_ax_b\boldsymbol{ii} + x_ay_b\boldsymbol{ij} + x_az_b\boldsymbol{ik} + y_ax_b\boldsymbol{ji} + y_ay_b\boldsymbol{jj} + y_az_b\boldsymbol{jk} + z_ax_b\boldsymbol{ki} + z_ay_b\boldsymbol{kj} + z_az_b\boldsymbol{kk} = \\ &= x_ax_b\boldsymbol{i}^2 + y_ay_b\boldsymbol{j}^2 + z_az_b\boldsymbol{k}^2 = x_ax_b + y_ay_b + z_az_b.\end{aligned}$$

Окончательный ответ получен с учетом того, что ортонормированность базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ означает выполнение равенств $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{jk} = 0$, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$. Таким образом,

$$\boldsymbol{ab} = x_ax_b + y_ay_b + z_az_b, \tag{2.14}$$

т.е. скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе равно сумме попарных произведений одноименных координат.

Из теоремы 2.7 и формулы (2.14) получаем следующий ***критерий ортогональности векторов*** $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$x_ax_b + y_ay_b + z_az_b = 0. \tag{2.15}$$

Вспомним, что, согласно определению 2.3 скалярного произведения, $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Зная, как выражается скалярное произведение и длины векторов через их координаты в ортонормированном базисе, можно вычислить и косинус угла между ненулевыми векторами. Действительно, исходя из формулы

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|},$$

получаем

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \tag{2.16}$$

В случае, когда $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_2$ и известны координаты этих векторов в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$: $\boldsymbol{a} = x_a\boldsymbol{i} + y_a\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = x_b\boldsymbol{i} + y_b\boldsymbol{j}$, справедливы формулы, аналогичные (2.14)–(2.16):

для вычисления скалярного произведения

$$\boldsymbol{ab} = x_a x_b + y_a y_b; \tag{2.17}$$

для критерия ортогональности

$$x_a x_b + y_a y_b = 0;$$

для косинуса угла между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}\,.$$

Пример 2.4. Найдем значения параметра t, при которых векторы $\boldsymbol{a} = \{t; 1 - t; 7\}$ и $\boldsymbol{b} = \{t + 1; 2; -2\}$, заданные своими координатами в ортонормированном базисе, ортогональны.

Используя критерий (2.15) ортогональности векторов, получаем уравнение

$$t(t + 1) + 2(1 - t) - 14 = 0$$

относительно параметра t. Решая это квадратное уравнение, находим, что лишь при $t = -3$ и $t = 4$ данные векторы ортогональны.

Лекция 3

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Ориентация базиса, правые и левые тройки векторов. Векторное произведение двух векторов, его механический и геометрический смысл. Свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в координатной форме в ортонормированном базисе. Смешанное произведение трех векторов и его геометрический смысл. Объем тетраэдра. Свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе. Условие компланарности трех векторов.

3.1. Векторное произведение

Векторное произведение вводится для двух *векторов* из V_3. Оно опирается на следующее понятие.

Определение 3.1. Упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называют ***правой***, если направление вектора $\boldsymbol{a}$ совмещается с направлением вектора $\boldsymbol{b}$ при помощи кратчайшего поворота вектора $\boldsymbol{a}$ в плоскости этих векторов, который со стороны вектора $\boldsymbol{c}$ совершается против хода часовой стрелки (рис. 3.1). В противном случае (поворот по ходу часовой стрелки) эту тройку называют ***левой***.

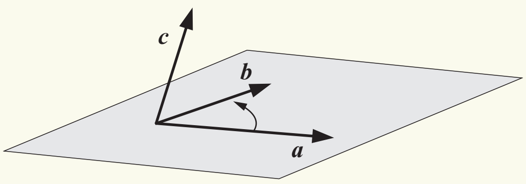


Рис. 3.1

Так как упорядоченная тройка некомпланарных векторов образует *базис в* V_3, то также говорят о ***правых*** и ***левых базисах***. Каждый базис является либо правым, либо левым, т.е. все базисы в V_3 разделяются на два класса: класс правых базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называют его ***ориентацией***.

Определение 3.2. ***Векторным произведением*** неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют такой вектор $\boldsymbol{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1) вектор $\boldsymbol{c}$ *ортогонален* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
2) *длина вектора* $\boldsymbol{c}$ равна $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, где φ — *угол между векторами* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
3) упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ является правой (рис. 3.2).

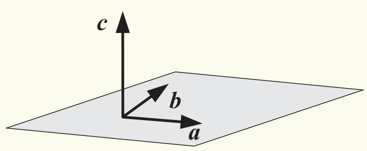


Рис. 3.2

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны*, то $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi = 0$. Поэтому дополним определение 3.2, полагая, в соответствии с условием 2, что векторное произведение двух коллинеарных векторов есть нуль-вектор.

Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ далее будем обозначать $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, хотя в литературе встречается и обозначение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Векторное произведение используют, например, в механике. Так, момент силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к точке M, относительно некоторой точки O равен $\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{F}$ (рис. 3.3). Рассмотрим свойства векторного произведения.

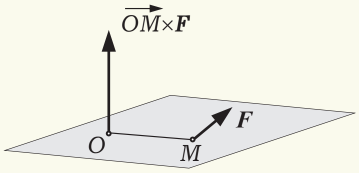


Рис. 3.3

1°. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору.

◀ Необходимость. Если векторы коллинеарны, то их векторное произведение равно нуль-вектору согласно определению. Докажем достаточность. Если $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, то $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 0$, т.е. $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi = 0$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Но тогда выполнено, по крайней мере, одно из трех равенств: $|\boldsymbol{a}| = 0$, $|\boldsymbol{b}| = 0$ или $\sin\varphi = 0$. Каждое из этих равенств влечет коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. ▶

Следующее свойство выражает геометрический смысл модуля векторного произведения.

2°. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, то модуль $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на смежных сторонах (рис. 3.4).

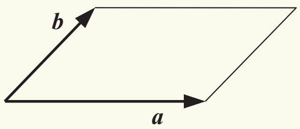


Рис. 3.4

◀ Свойство объясняется тем, что модуль векторного произведения и площадь параллелограмма по двум смежным сторонам и углу между ними вычисляют по одной и той же формуле как произведение длин векторов (сторон параллелограмма) на синус угла между ними. ▶

3°. Важнейшими свойствами векторного произведения являются следующие три:
– свойство антикоммутативности $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;
– свойство ассоциативности совместно с умножением на число $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;
– свойство дистрибутивности относительно сложения $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

◀ Доказывая свойство антикоммутативности, заметим, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то в обеих частях равенства $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ в соответствии со свойством 1° стоит нулевой вектор. Если же векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, то существует плоскость, которой они параллельны. В силу первого условия определения 3.2 векторного произведения векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ перпендикулярны этой плоскости и, следовательно, коллинеарны. Ясно, что и длины векторов $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ равны, поскольку совпадают с площадью одного и того же параллелограмма (свойство 2°). Остается доказать, что векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ имеют противоположное направление. Это следует из того, что если тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ правая, то тройка $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ — левая. Поэтому, заменив в последней тройке третий вектор на противоположный, получим правую тройку векторов $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, причем вектор $-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ и имеет ту же длину. Согласно определению 3.2, это означает, что вектор $-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ равен векторному произведению векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$, т.е. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

Свойство ассоциативности доказывается аналогично. В случае коллинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а также при $\lambda = 0$ векторы $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ и $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ равны нуль-вектору, поскольку каждый из них является или векторным произведением коллинеарных векторов, или произведением вектора на число, равное нулю. Следовательно, в рассматриваемых случаях равенство $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ выполнено.

Предположим теперь, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, а $\lambda \neq 0$. Покажем сначала, что в левой и правой частях доказываемого равенства стоят коллинеарные векторы, равные по длине. Действительно, если считать, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ имеют общее начало, то пары $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ неколлинеарных векторов порождают одну и ту же плоскость, которой перпендикулярны их векторные произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$. Поэтому векторы $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ и $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Вычисляя их длины, убеждаемся, что эти длины равны, так как

$$|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а

$$|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}| = |\lambda\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\psi = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\psi = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi,$$

где ψ — угол между векторами $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и использовано равенство $\sin\psi = \sin\varphi$, выполненное при всех $\lambda \neq 0$.

Два коллинеарных вектора, равные по длине, либо совпадают, либо являются противоположными друг другу. Нам достаточно исключить последнюю возможность, доказав, что векторы $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ и $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ являются однонаправленными.

Если $\lambda > 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ однонаправлены. Следовательно, векторы $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ тоже являются однонаправленными. А поскольку векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ тоже однонаправлены, то однонаправлены и векторы $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ и $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

Если $\lambda < 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ являются противоположно направленными. Следовательно, векторы $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ тоже являются противоположно направленными. Умножение вектора $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ на отрицательное число λ меняет его направление на противоположное. Поэтому векторы $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ и $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ имеют одинаковое направление.

Доказательство свойства дистрибутивности будет дано позже (см. **3.2**).

Замечание 3.1. Доказанные свойства ассоциативности и дистрибутивности векторного произведения объединяют, аналогично случаю скалярного произведения, в свойство ***линейности векторного произведения*** относительно первого сомножителя. В силу свойства антикоммутативности векторного произведения векторное произведение линейно и относительно второго сомножителя:

$$\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) = -(\lambda\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a} = -\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

Пример 3.1. Найдем площадь S треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ при условии, что $|\boldsymbol{c}| = 1$, $|\boldsymbol{d}| = 4$, а угол φ между векторами $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ равен $30°$.

Для решения задачи воспользуемся формулой

$$S = 0{,}5\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,.$$

Используя алгебраические свойства векторного произведения, находим, что

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (3\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = 3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d} - 2\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d} + 2\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d} = 5\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}.$$

Поэтому

$$S = 0{,}5\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 0{,}5\,|5\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}| = 2{,}5\,|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{d}|\sin\varphi = 5. \quad \#$$

Алгебраические свойства позволяют вычислить векторное произведение через *координаты векторов* и векторные произведения векторов, образующих базис. Наиболее просто соответствующие формулы выглядят в *ортонормированном базисе*.

Рассмотрим правый ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Векторные произведения всевозможных пар векторов базиса (всего 9 пар) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} &= -\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} &= -\boldsymbol{i},\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} &= -\boldsymbol{j}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Векторные произведения базисных векторов на себя не приведены, так как все они равны нуль-вектору.

Таблицу произведений (3.1) удобно трактовать как правило циклической перестановки: произведение двух базисных векторов равно третьему, причем знак плюс выбирается, если тройка векторов (первый сомножитель, второй сомножитель, произведение) получается из исходного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ циклической перестановкой. На рис. 3.5 этот порядок соответствует движению против хода часовой стрелки. При движении на рис. 3.5 от первого сомножителя ко второму по ходу часовой стрелки в правых частях соответствующих равенств (3.1) появляется знак минус.

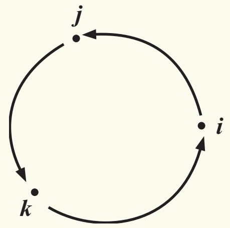


Рис. 3.5

Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\boldsymbol{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$. Тогда имеют место *разложения* этих *векторов*

$$\boldsymbol{a} = x_a\boldsymbol{i} + y_a\boldsymbol{j} + z_a\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{b} = x_b\boldsymbol{i} + y_b\boldsymbol{j} + z_b\boldsymbol{k}.$$

Исходя из этих представлений и алгебраических свойств векторного умножения, получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (x_a\boldsymbol{i} + y_a\boldsymbol{j} + z_a\boldsymbol{k})\times(x_b\boldsymbol{i} + y_b\boldsymbol{j} + z_b\boldsymbol{k}) =\\ &= x_ax_b\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + x_ay_b\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + x_az_b\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} +\\ &+ y_ax_b\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + y_ay_b\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + y_az_b\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} +\\ &+ z_ax_b\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + z_ay_b\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + z_az_b\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} =\\ &= (y_az_b - y_bz_a)\boldsymbol{i} + (z_ax_b - z_bx_a)\boldsymbol{j} + (x_ay_b - x_by_a)\boldsymbol{k} =\\ &= \begin{vmatrix} y_a & z_a\\ y_b & z_b \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_a & z_a\\ x_b & z_b \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a\\ x_b & y_b \end{vmatrix}\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Чтобы упростить полученную формулу, заметим, что она похожа на формулу *разложения определителя третьего порядка* по 1-й строке, только вместо числовых коэффициентов стоят векторы. Поэтому можно записать эту формулу как определитель, который вычисляется по обычным правилам. Две строки этого определителя будут состоять из чисел, а одна — из векторов. При вычислении определителя, умножение векторов на числа и сложение векторов выполняются по обычным правилам, введенным для этих линейных операций в гл. 1. Итак, формулу вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Пример 3.2. Найдем все векторы, ортогональные векторам

$$\boldsymbol{n}_1 = \{3; 1; -2\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{n}_2 = \{1; -1; 1\}.$$

Отметим, что векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ неколлинеарны, так как их координаты непропорциональны, например:

$$\frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}.$$

Совместим начала этих векторов в некоторой точке. Тогда существует единственная плоскость, содержащая эти векторы. Искомое множество векторов, ортогональных данным, совпадает с множеством векторов, перпендикулярных указанной плоскости, а это множество совпадает с множеством векторов, коллинеарных векторному произведению

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

Ответ: $\lambda(-\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.2. Смешанное произведение

Определение 3.3. ***Смешанным произведением*** трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называют число, равное $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ — *скалярному произведению векторного произведения* первых двух векторов и третьего вектора.

Обозначают смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ так: $\boldsymbol{abc}$.

Смешанное произведение имеет простой геометрический смысл.

Теорема 3.1. Смешанное произведение трех *некомпланарных* векторов $\boldsymbol{abc}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах, выходящих из одной вершины, взятого со знаком плюс, если тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — правая, и со знаком минус, если эта тройка — левая.

◄ Вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ перпендикулярен грани указанного параллелепипеда, построенной на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и в силу свойства 2° векторного произведения имеет длину, равную площади S этой грани (рис. 3.6). Обозначив через $\boldsymbol{e}$ единичный вектор, ортогональный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и однонаправленный с векторным произведением $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, получим

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = S\boldsymbol{e}.$$

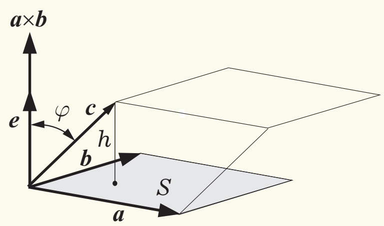


Рис. 3.6

Смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$ равно скалярному произведению вектора $S\boldsymbol{e}$ на вектор $\boldsymbol{c}$ и равно $S\,|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$, где φ — *угол между векторами* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Отметим, что число $|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$ равно проекции вектора $\boldsymbol{c}$ на направление вектора $\boldsymbol{e}$, а его модуль, т.е. $\big|\,|\boldsymbol{c}|\cos\varphi\big|$, равен высоте h параллелепипеда. Знак проекции определяется углом φ между $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{e}$. Если $\varphi < 90°$, то векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{e}$ находятся по одну сторону от плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Значит, тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$

и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеют одну и ту же ориентацию — правую. В этом случае смешанное произведение положительно и равно объему параллелепипеда со знаком плюс. Если же $\varphi > 90°$, то ориентация указанных троек различная, т.е. тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ является левой, и смешанное произведение будет равно объему параллелепипеда со знаком минус. Отметим, что равенство $\varphi = 90°$ невозможно, так как оно означает, что вектор $\boldsymbol{c}$ находится в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а это противоречит условию некомпланарности этих векторов. ►

Замечание 3.2. Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны*, то параллелепипед, построенный на них, вырождается (лежит в плоскости). Поэтому ему следует приписать нулевой объем. Непосредственно из определения заключаем, что для компланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ ортогональны, т.е. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = 0$. Значит, теорема верна и в случае, когда векторы компланарны. #

Свойства смешанного произведения.

1°. Для смешанного произведения действует правило циклической перестановки:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\boldsymbol{bac} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{acb}.$$

◄ Действительно, все шесть указанных произведений по абсолютной величине дают объем одного и того же параллелепипеда, а знак произведений определяется ориентацией тройки сомножителей. При циклической перестановке векторов в тройке ориентация не меняется, при перестановке местами двух векторов в тройке ориентация меняется на противоположную. ►

Замечание 3.3. Из доказанного свойства получаем, что

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

т.е. порядок двух операций, дающих смешанное произведение, не является существенным. Это объясняет, почему в обозначении смешанного произведения знаки образующих операций опускаются.

2°. Три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

◄ Это вытекает из теоремы 3.1 и замечания 3.2. ►

3°. Для смешанного произведения выполняется свойство ассоциативности относительно умножения векторов на число: $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc} = \lambda(\boldsymbol{abc})$.

◄ Обозначив $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$ и используя свойство 2° ассоциативности скалярного произведения относительно умножения на число, получим

$$(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc} = (\lambda\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{e} = \lambda(\boldsymbol{ae}) = \lambda\big(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big) = \lambda(\boldsymbol{abc}). \qquad ►$$

4°. Для смешанного произведения выполняется свойство дистрибутивности $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc}$.

◄ Обозначив $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$ и используя свойство 3° дистрибутивности скалярного произведения, получим

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{bc} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{e} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{e} = \\ = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc}. \qquad ►$$

Замечание 3.4. Свойства 3° и 4° смешанного произведения сформулированы для первого сомножителя. Однако при помощи циклической перестановки можно доказать аналогичные утверждения и для второго и для третьего сомножителей, т.е. верны равенства

$$\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \lambda(\boldsymbol{abc}), \quad \boldsymbol{ab}(\lambda\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{abc}),$$
$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab}_1\boldsymbol{c} + \boldsymbol{ab}_2\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{abc}_1 + \boldsymbol{abc}_2,$$

и в итоге имеем свойство ***линейности смешанного произведения*** по каждому сомножителю.

Замечание 3.5. Отметим, что при доказательстве свойств смешанного произведения мы не использовали свойства векторного произведения. Наоборот, обоснование свойств векторного произведения можно строить на основе свойств смешанного произведения. Покажем это на примере свойства дистрибутивности векторного произведения, доказательство которого мы обещали привести.

Сначала обратим внимание на следующее. Если векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ таковы, что для любого вектора $\boldsymbol{y}$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}, \tag{3.3}$$

то $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. Действительно, равенство (3.3) означает, что $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{y} = 0$. Так как вектор $\boldsymbol{y}$ любой, мы можем положить $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$. Тогда получим $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2 = 0$, но это возможно только при $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$, т.е. при $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$.

Согласно доказанному, равенство

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}$$

будет выполняться, если для любого вектора $\boldsymbol{c}$

$$\big((\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b}\big)\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

или

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc}.$$

Но последнее равенство верно, так как выражает доказанное свойство 4° дистрибутивности для смешанного произведения. #

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ заданы своими *координатами* в *правом ортонормированном базисе*: $\boldsymbol{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\boldsymbol{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, $\boldsymbol{c} = \{x_c; y_c; z_c\}$. Чтобы найти их смешанное произведение, воспользуемся формулами для вычисления скалярного и векторного произведений:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\left(\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= x_a\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - y_a\begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + z_a\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}.$$

Согласно полученной формуле, свойство 2° смешанного произведения можно сформулировать так: необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе, является равенство нулю *определителя третьего порядка*, строками которого являются координаты этих векторов.

Пример 3.3. Найдем объем треугольной пирамиды, построенной на векторах

$$\boldsymbol{a} = \{-2; 1; -2\}, \quad \boldsymbol{b} = \{1; 0; -1\}, \quad \boldsymbol{c} = \{1; 1; 1\}$$

как на смежных ребрах.

Трем векторам с общим началом можно сопоставить как треугольную пирамиду, так и параллелепипед, причем объем пирамиды будет в 6 раз меньше объема параллелепипеда, равного модулю смешанного произведения $\boldsymbol{abc}$ данных векторов. Итак, объем пирамиды равен $V = |\boldsymbol{abc}|/6 = 1$, поскольку

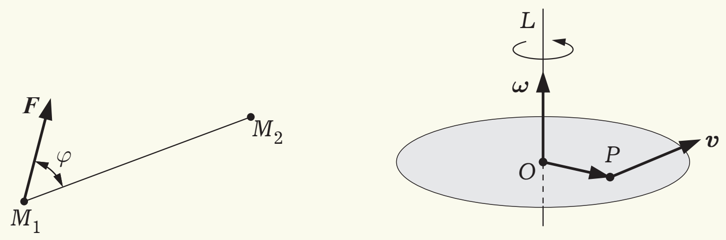
$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

3.3. Приложения произведений векторов

Рассмотрим различные приложения произведений *векторов* на следующих примерах.

Пример 3.4. Работа A постоянной силы $\boldsymbol{F}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения M_1 в положение M_2 равна $A = |\boldsymbol{F}|\,|M_1M_2|\cos\varphi$ (рис. 3.7, *а*). Поэтому с помощью *скалярного произведения* эта работа вычисляется по формуле

$$A = \boldsymbol{F}\boldsymbol{s}, \qquad \boldsymbol{s} = \overrightarrow{M_1M_2}.$$



а *б*

Рис. 3.7

Если к материальной точке приложено n постоянных сил $\boldsymbol{f}_i$, $i = \overline{1, n}$, то при том же ее перемещении сумма A их работ A_i равна работе равнодействующей силы

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i,$$

поскольку

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i\boldsymbol{s} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i\Big)\boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{s}.$$

Из этого равенства следует, что система сил не совершает работу, если их равнодействующая *ортогональна вектору* перемещения $\boldsymbol{s}$. Ясно, что равенство $A = \boldsymbol{F}\boldsymbol{s} = 0$ справедливо и в случае, когда равнодействующая равна нулю или отсутствует перемещение, или верно и то и другое.

Пример 3.5. Круговой диск вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг перпендикулярной ему оси вращения L, проходящей через его центр O (рис. 3.7, *б*). Пусть $\boldsymbol{v}$ — скорость точки P. Тогда $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

Пример 3.6. На движущуюся со скоростью $\boldsymbol{v}$ частицу с электрическим зарядом q магнитное поле с магнитной индукцией $\boldsymbol{B}$ действует с силой Лоренца $\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$. Если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ *коллинеарны*, то $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ и при постоянном магнитном поле частица будет совершать прямолинейное равномерное движение. Если же векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ неколлинеарны, то $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$, но мощность, развиваемая этой силой, равна нулю: $W = \boldsymbol{f}\boldsymbol{v} = q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\boldsymbol{v} = q\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = 0$, поскольку *смешанное произведение компланарных векторов* равно нулю. Следовательно, заряженная частица массой m в постоянном магнитном поле сохраняет свою кинетическую энергию $m\boldsymbol{v}^2/2$.

Рассмотрим случай, когда векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ ортогональны, т.е. $\boldsymbol{v}\boldsymbol{B} = 0$. Поскольку и сила Лоренца $\boldsymbol{f}$ ортогональна $\boldsymbol{B}$, то частица остается в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{B}$, и двигается по окружности радиуса R, который определяется из условия равновесия возникающей при этом центробежной силы и действующей силы Лоренца,

$$m\boldsymbol{v}^2/R = q|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}| = q|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin 90^\circ.$$

Отсюда

$$R = \frac{m|\boldsymbol{v}|}{q|\boldsymbol{B}|}.$$

Лекция 4
ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Радиус-вектор точки, координаты точки; связь координат вектора с координатами его начала и конца. Простейшие задачи аналитической геометрии: вычисление длины отрезка, деление отрезка в данном отношении. Геометрический смысл уравнения $f(x, y) = 0$ на плоскости и $F(x, y, z) = 0$ в пространстве. Различные виды уравнения прямой на плоскости: общее уравнение, параметрические уравнения, каноническое уравнение, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой „в отрезках“. Нормальный и направляющий векторы прямой. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

В основе аналитической геометрии лежит возможность однозначного описания точек при помощи наборов чисел, называемых координатами. Описание множества с помощью соотношений между координатами входящих в него точек позволяет привлечь для его исследования алгебраические методы, что значительно расширяет возможности анализа. Наоборот, уравнения, неравенства и их системы можно интерпретировать как зависимости между координатами точек и ассоциировать с ними множество, составленное из точек, координаты которых удовлетворяют этим зависимостям, и, следовательно, получить наглядное представление чисто алгебраической задачи (например, в случае поиска решений уравнений и их систем). Таким образом, возникает своеобразный мостик, связывающий алгебру и геометрию. Его роль выполняет система координат.

4.1. Декартова система координат

Существуют различные способы задания точек набором координат. Аналитическая геометрия опирается на простейшую систему координат — прямоугольную, которая известна из школьного курса математики. Мы дадим определение прямоугольной системы координат, используя *векторную алгебру*. Фактически мы построим систему координат более общего вида, в которой оси координат могут находиться по отношению друг к другу под произвольным углом. Прямоугольная система координат будет частным случаем, когда углы между осями координат будут прямыми.

Назовем ***декартовой*** (***аффинной***) ***системой координат*** пару, состоящую из фиксированной точки O и некоторого *базиса*. Соответственно трем *пространствам* V_1, V_2, V_3 получаем три варианта декартовой системы координат: на прямой, на плоскости и в пространстве. ***Декартовыми*** (***аффинными***) ***координатами*** произвольной ***точки*** M являются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в заданном базисе.

С декартовой системой координат связаны следующие понятия:

– ***начало*** (***системы***) ***координат*** — точка O в составе декартовой системы координат;

– ***репе́р*** — базис в составе декартовой системы координат, для векторов которого выбирается общая *точка приложения* в начале координат;

– ***оси координат*** (координатные оси) — прямые, на которых лежат векторы репера, задающие направление на этих прямых. Оси имеют специальные названия (в порядке нумерации): ***ось абсцисс***, ***ось ординат*** и ***ось аппликат***. Координаты точки именуются по осям: ***абс-***

цисса, ***ордината*** и ***аппликата***. На плоскости отсутствует ось аппликат, на прямой также нет оси ординат.

– ***координатные плоскости*** — плоскости, определяемые парами векторов репера. Понятие используется для декартовой системы координат в пространстве;

– ***радиус-вектор*** точки M — вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат O с этой точкой.

Декартову систему координат общего вида часто называют ***косоугольной системой координат***.

Если репер декартовой системы координат является *ортонормированным базисом*, то такую систему координат называют ***декартовой прямоугольной системой координат***, или просто ***прямоугольной системой координат***, а декартовы координаты точки — ее ***прямоугольными координатами***.

Далее будем использовать в основном прямоугольные системы координат, т.е. будем предполагать, что репер представляет собой ортонормированный базис, причем обязательно *правый*. Отметим, что базис в V_2 (т.е. на плоскости) называют ***правым*** (***левым***), если первый его вектор совмещается со вторым с помощью кратчайшего поворота против хода (по ходу) часовой стрелки.

Итак, под ***системой координат*** подразумевается прямоугольная система координат с правым базисом, а под ***координатами точки*** — ее прямоугольные координаты. Для обозначения декартовых систем координат, например в пространстве, будем использовать обозначения типа $O\boldsymbol{ijk}$, где O — начало системы координат, а $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — ортонормированный репер (базис), или Oxyz, где указаны обозначения для координатных осей.

4.2. Преобразование прямоугольных координат

Все *прямоугольные системы координат* в изучаемом пространстве, вообще говоря, равноправны, т.е. выбор одной из них ничуть не хуже (и не лучше) выбора другой. Те или иные предпочтения отдают исходя из особенностей конкретной задачи. Использование различных систем координат ставит задачу преобразования *координат точки*, т.е. задачу вычисления ее координат в одной системе координат по ее координатам в другой системе.

Пусть $O\boldsymbol{ijk}$ — некоторая прямоугольная система координат в пространстве, которую мы условно назовем старой, а $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$ — вторая прямоугольная система координат, которую будем называть новой (рис. 4.1). Считаем, что известны *координаты* точки $O'(b_1; b_2; b_3)$ и *векторов* $\boldsymbol{i}' = \{\alpha_{11}; \alpha_{21}; \alpha_{31}\}$, $\boldsymbol{j}' = \{\alpha_{12}; \alpha_{22}; \alpha_{32}\}$, $\boldsymbol{k}' = \{\alpha_{13}; \alpha_{23}; \alpha_{33}\}$ в старой системе координат. Пусть для точки M известны ее координаты $(x; y; z)$ в старой и координаты $(x'; y'; z')$ в новой системах координат. Это значит, что выполняются два равенства $\overrightarrow{O'M} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$ и

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (4.1)$$

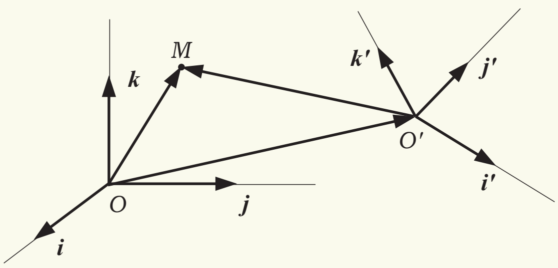


Рис. 4.1

Векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{O'M}$ связаны соотношением $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, причем координаты вектора $\overrightarrow{OO'}$ являются также координатами *начала координат* O' новой системы координат относительно старой, т.е. $\overrightarrow{OO'} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} + x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' = \\ &= b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}+x'(\alpha_{11}\boldsymbol{i}+\alpha_{21}\boldsymbol{j}+\alpha_{31}\boldsymbol{k})+y'(\alpha_{12}\boldsymbol{i}+\alpha_{22}\boldsymbol{j}+\alpha_{32}\boldsymbol{k})+z'(\alpha_{13}\boldsymbol{i}+\alpha_{23}\boldsymbol{j}+\alpha_{33}\boldsymbol{k}) = \\ &= (\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_{13}z'+b_1)\boldsymbol{i}+(\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_{23}z'+b_2)\boldsymbol{j}+(\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+\alpha_{33}z'+b_3)\boldsymbol{k}, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

т.е. получено *разложение вектора* $\overrightarrow{OM}$ в репере старой системы координат. Оно должно совпадать с (4.1) в силу единственности координат вектора в одном и том же *базисе*. Приравнивая соответствующие *коэффициенты разложений* в (4.1) и (4.2), получаем

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + b_1, \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + b_2, \\ z &= \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + b_3. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Соотношения (4.3), выражающие старые координаты через новые, представляют собой *систему трех линейных уравнений* относительно неизвестных x', y', z'. Чтобы найти новые координаты x', y', z' по известным старым, необходимо решить эту систему относительно новых координат. Система (4.3) при любых x, y, z имеет единственное решение, поскольку ее определитель отличен от нуля. Это следует из того, что выполнены равенства

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}' = 1,$$

так как векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ образуют *правый ортонормированный базис* и объем построенного на них параллелепипеда равен 1.

Набор коэффициентов α_{ij} в системе (4.3) отражает положение репера новой системы координат, а свободные члены b_1, b_2, b_3 характеризуют изменение начала координат. Если репер системы координат не изменился, а поменялось лишь начало координат, то формулы преобразования выглядят более просто:

$$\begin{aligned} x &= x' + b_1, \\ y &= y' + b_2, \\ z &= z' + b_3. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Преобразование (4.4) называют ***параллельным переносом системы координат в пространстве*** на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

Все вышеизложенное относится к прямоугольной системе координат в пространстве. Прямоугольная система координат на плоскости отличается от пространственной лишь тем, что репер состоит из двух векторов, а точки имеют всего две координаты. Преобразование системы координат на плоскости описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + b_1, \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + b_2, \end{aligned} \qquad (4.5)$$

где $\{\alpha_{1i}; \alpha_{2i}\}$, $i = 1, 2$, — координаты векторов $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$ нового репера относительно старого $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, а $(b_1; b_2)$ — координаты точки O' начала новой системы координат в старой системе координат.

Преобразование ***параллельного переноса системы координат на плоскости*** выглядит так:

$$\begin{aligned} x &= x' + b_1, \\ y &= y' + b_2. \end{aligned}$$

Если начала новой и старой систем координат на плоскости совпадают, а изменяется лишь репер системы координат, то формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y', \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь возможны два случая. В первом из них новый репер может быть получен из старого поворотом последнего на некоторый угол φ вокруг общего начала систем координат, причем полагают, что $\varphi > 0$ ($\varphi < 0$) при повороте против хода (по ходу) часовой стрелки. В этом случае преобразование (4.6) называют ***поворотом системы координат на плоскости*** на угол φ. Нетрудно убедиться, что координаты векторов $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$ нового репера относительно старого выражаются через угол поворота φ: $\boldsymbol{i}' = \{\cos\varphi; \sin\varphi\}$, $\boldsymbol{j}' = \{-\sin\varphi; \cos\varphi\}$ (рис. 4.2).

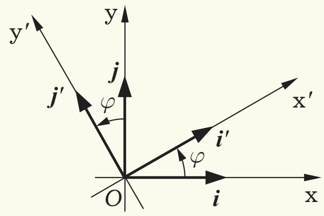


Рис. 4.2

Зная координаты векторов нового репера относительно старого, мы можем записать уравнения для поворота системы координат на плоскости:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Если преобразование состоит в последовательном выполнении поворота и параллельного переноса, то оно имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + b_1, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Система (4.8) легко решается относительно x', y', и обратное преобразование координат, отражающее переход от новой системы координат к старой, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + b_1', \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi + b_2', \end{aligned}$$

где $b_1' = b_1\cos\varphi + b_2\sin\varphi$, $b_2' = -b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi$. Как видим, старая система координат получается из новой с помощью поворота на тот же угол φ, но в противоположную сторону (на угол $-\varphi$ в положительном направлении), и параллельного переноса (на вектор $\overrightarrow{O'O}$).

Во втором случае с помощью поворота старого репера вокруг начала координат на некоторый угол φ можно совместить лишь векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{i}'$, но при этом векторы $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{j}'$ окажутся противоположными и для их совмещения потребуется выполнение преобразования зеркального отражения плоскости относительно первой оси координат.

В первом случае два репера имеют *одинаковую ориентацию*, а во втором — *противоположную*.

Аналогичную терминологию используют и для пространства. Если начало новой и старой прямоугольных систем координат в пространстве совпадают и изменяется лишь репер системы координат, то формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'. \end{cases} \tag{4.9}$$

Преобразование (4.9) называют ***поворотом системы координат в пространстве***, если реперы новой и старой систем координат имеют одинаковую ориентацию, т.е. являются оба правыми или левыми. Как и в случае плоскости, это связано с тем, что реперы с одинаковой ориентацией можно совмещать с помощью поворотов. Например, можно сначала совместить векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{i}'$ с помощью поворота старого репера вокруг вектора $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}'$, а затем выполнить второй поворот вокруг вектора $\boldsymbol{i}'$ для совмещения повернутого вектора $\boldsymbol{j}$ с вектором $\boldsymbol{j}'$. При этом векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$ автоматически совпадут для реперов одной ориентации и будут противоположными для реперов противоположной ориентации. В последнем варианте требуется, как и в случае плоскости, выполнение дополнительного преобразования зеркального отражения (относительно координатной плоскости, определяемой векторами $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$).

4.3. Простейшие задачи аналитической геометрии

Рассмотрим некоторые задачи аналитической геометрии, связанные со взаимным расположением точек на плоскости или в пространстве.

Векторы и точки. Задача состоит в том, чтобы выразить *координаты вектора* через *координаты* его *начала* и *конца*.

Рассмотрим в пространстве *прямоугольную систему координат* с *началом системы координат* в точке O и вектор $\overrightarrow{AB}$, у которого известны координаты его *начала* $A(x_a;y_a;z_a)$ и *конца* $B(x_b;y_b;z_b)$. Определим координаты $\{l;m;n\}$ вектора $\overrightarrow{AB}$. Координаты точек A и B представляют собой координаты их *радиус-векторов* $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Следовательно, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$ $=\{x_b-x_a;y_b-y_a;z_b-z_a\}$ и из соотношения $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ заключаем, что $\{l;m;n\}=$ $=\{x_b-x_a;y_b-y_a;z_b-z_a\}$, т.е.

$$l=x_b-x_a,\quad m=y_b-y_a,\quad n=z_b-z_a. \tag{4.10}$$

В случае прямоугольной системы координат на плоскости координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\{l;m\}$ на этой плоскости и координаты точек его начала $A(x_a;y_a)$ и конца $B(x_b;y_b)$ связаны аналогичными соотношениями

$$l=x_b-x_a,\quad m=y_b-y_a. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) вытекают правила:

– координаты вектора получают вычитанием из координат его конца координат его начала;

– координаты конца вектора получают сложением координат вектора с координатами его начала;

– координаты начала вектора получают вычитанием из координат его конца координат вектора.

Деление отрезка в заданном отношении. Задача состоит в том, чтобы на данном отрезке M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок в заданном отношении: $|M_1M|:|MM_2|=p:q$.

Для точки M из отрезка M_1M_2 векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны и однонаправлены (рис. 4.3). Следовательно, один из них может быть получен из другого умножением на положительное число. Пусть, например, $\overrightarrow{MM_2}=\lambda\overrightarrow{M_1M}$. Число λ равно отношению длин отрезков MM_2 и M_1M, т.е. $\lambda=q/p$. Поэтому $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1M}+\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{M_1M}+\frac{q}{p}\overrightarrow{M_1M}=\frac{p+q}{p}\overrightarrow{M_1M}$, откуда $\overrightarrow{M_1M}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{M_1M_2}$.

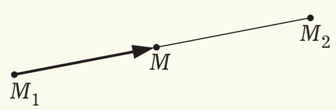


Рис. 4.3

Пусть концы M_1 и M_2 отрезка M_1M_2 заданы своими координатами в произвольной прямоугольной системе координат $\boldsymbol{Oijk}$ в пространстве: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Найдем координаты точки M в этой же системе координат.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_1} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{M_1M_2} =$$
$$= \{x_1; y_1; z_1\} + \frac{p}{p+q}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} = \left\{\frac{px_2 + qx_1}{p+q}; \frac{py_2 + qy_1}{p+q}; \frac{pz_2 + qz_1}{p+q}\right\}.$$

Итак, если обозначить координаты точки M через $(x; y; z)$, то

$$x = \frac{px_2 + qx_1}{p+q}, \quad y = \frac{py_2 + qy_1}{p+q}, \quad z = \frac{pz_2 + qz_1}{p+q}. \tag{4.12}$$

Если точка M — середина отрезка M_1M_2, то $p = q = 1$, и поэтому из (4.12) следует, что координаты M равны полусумме соответствующих координат начала и конца отрезка, т.е.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{4.13}$$

В случае плоскости нет аппликат и координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $|M_1M| : |MM_2| = p : q$, определяются через координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ концов этого отрезка с помощью равенств $x = \dfrac{px_2 + qx_1}{p+q}$, $y = \dfrac{py_2 + qy_1}{p+q}$, которые для середины отрезка переходят в соотношения $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Пример 4.1. В вершинах $A(4; 4; 4)$, $B(-2; 6; 4)$, $C(-4; 4; 2)$ треугольника ABC расположены материальные точки равной массы. Найдем координаты центра масс этой системы точек.

Центр масс указанной системы точек совпадает с точкой M пересечения медиан треугольника ABC. Пусть точка N — середина стороны BC. Тогда ее координаты $(x; y; z)$ равны полусумме соответствующих координат точек B и C, следовательно, $x = -3$, $y = 5$, $z = 3$. Медиану AN точка M делит в отношении $|AM| : |MN| = 2 : 1$, поэтому координаты $(x_0; y_0; z_0)$ центра масс рассматриваемого треугольника в соответствии с (4.12) равны

$$x_0 = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4}{2+1} = -\frac{2}{3}, \quad y_0 = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 4}{2+1} = \frac{14}{3}, \quad z_0 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{2+1} = \frac{10}{3}.$$

Длина отрезка. Задача вычисления длины отрезка (или расстояния между двумя точками) по координатам его концов в прямоугольной системе координат известна из школьного курса геометрии. Мы выведем эту формулу при помощи *векторной алгебры*.

Длина отрезка — это длина вектора, соединяющего его концы, а длину вектора можно определить, вычислив его *скалярный квадрат*. Пусть концы отрезка M_1 и M_2 заданы своими координатами в прямоугольной системе координат $\boldsymbol{Oijk}$: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, заданного своими координатами в *ортонормированном базисе* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, находится с помощью формулы (2.14) для вычисления *скалярного произведения*: $\overrightarrow{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Итак, длина отрезка M_1M_2 вычисляется по формуле $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

4.4. Вычисление площадей и объемов

Вычисление площадей многоугольников и объемов многогранников, заданных *координатами* своих вершин в *прямоугольной системе координат*, основывается на использовании *скалярного*, *векторного* и *смешанного произведений векторов*.

Если параллелограмм задан в пространстве координатами своих вершин, то для вычисления его площади нужно найти *координаты* двух *векторов*, соответствующих смежным сторонам параллелограмма, а затем *модуль* их векторного произведения. Аналогично вычисляется площадь треугольника, равная половине модуля векторного произведения векторов, на которых он построен как на смежных сторонах.

Пример 4.2. Пусть три вершины треугольника заданы своими координатами: $A(4;4;4)$, $B(1;2;3)$, $C(3;-1;2)$.

Для определения площади $\triangle ABC$ с помощью (4.10) найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{1-4; 2-4; 3-4\} = \{-3;-2;-1\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{3-4; -1-4; 2-4\} = \{-1;-5;-2\}.$$

Затем по (3.2) вычислим их векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 13\boldsymbol{k}.$$

Модуль этого векторного произведения равен $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2+13^2} = \sqrt{195}$, и, следовательно, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}|}{2} = \dfrac{\sqrt{195}}{2}$. #

Для вычисления объема параллелепипеда, заданного координатами своих вершин, нужно найти координаты трех векторов, соответствующих смежным ребрам, а затем вычислить модуль смешанного произведения этих векторов. Через смешанное произведение вычисляется и объем произвольной треугольной пирамиды $SABC$ (см. пример 3.2), поскольку он равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на ребрах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AS}$. Таким образом, объем этой пирамиды равен $V_{SABC} = |\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AS}|/6$.

Пример 4.3. Найдем объем V пирамиды $SABC$, заданной координатами своих вершин: $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $S(4;1;3)$.

Используя (4.10), вычисляем координаты векторов, направленных по ребрам пирамиды: $\overrightarrow{AB} = \{5-2; 5-(-1); 4-1\} = \{3;6;3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{3-2; 2-(-1); -1-1\} = \{1;3;-2\}$, $\overrightarrow{AS} = \{4-2; 1-(-1); 3-1\} = \{2;2;2\}$, и определяем объем с помощью смешанного произведения найденных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AS}| = 3.$$

4.5. Кривые и поверхности

Множество точек на плоскости или в пространстве можно описать системой уравнений и (или) неравенств, связывающих *координаты точек* из этого множества. И одна из важнейших задач аналитической геометрии — построение уравнения или системы уравнений и неравенств, описывающих заданное множество.

Определение 4.1. Если уравнению $F(x,y,z) = 0$ удовлетворяют те и только те тройки чисел x, y, z, для которых точка $M(x;y;z)$ принадлежит множеству S в пространстве, то уравнение $F(x,y,z) = 0$ называют ***уравнением множества*** S, а само множество S — ***геометрическим образом*** этого уравнения.

Вышесказанное также относится и к описанию множеств на плоскости, но с единственным отличием — уравнению соответствует функция $F(x,y)$ двух переменных x и y, а не трех.

Определение 4.2. Если уравнению $F(x,y)=0$ удовлетворяют те и только те пары чисел x и y, для которых точка $M(x;y)$ принадлежит множеству Γ на плоскости, то уравнение $F(x,y)=0$ называют ***уравнением множества*** Γ, а само множество Γ — ***геометрическим образом*** этого уравнения.

Рассмотрим простейший вариант, когда множество точек в пространстве описывается одним уравнением вида $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ — функция трех переменных, а переменные x, y, z представляют собой координаты точки в пространстве относительно фиксированной *прямоугольной системы координат.* Если не налагать на функцию $F(x,y,z)$ никаких ограничений, то от подобного описания мало проку, так как тогда при помощи уравнения можно описать любое множество точек в пространстве. Действительно, вспомним общее толкование функции как закона, который любому набору, в данном случае из трех, аргументов ставит в соответствие единственное число. Такой закон можно задать различными способами. Например, выберем произвольное множество S в пространстве. Положим $F(x,y,z)=0$, если точка с координатами $(x;y;z)$ принадлежит множеству S, и $F(x,y,z)=1$ в противном случае. Тогда уравнение $F(x,y,z)=0$ будет задавать в точности множество S.

В рамках аналитической геометрии рассматривают уравнения $F(x,y,z)=0$ ($F(x,y)=0$ на плоскости), для которых функция F является многочленом.

Определение 4.3. ***Многочленом от n переменных*** x_1, ..., x_n называют функцию вида

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{m} a_{i_1,\ldots,i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n},$$

где i_1, ..., i_n — целые неотрицательные числа; $a_{i_1,\ldots,i_n}$ — действительные числа, причем хотя бы один из коэффициентов $a_{i_1,\ldots,i_n}$, для которых $i_1+\ldots+i_n=m$, не равен нулю. Число m называют ***степенью многочлена от n переменных***.

Определение допускает нулевое значение степени многочлена. Независимо от числа переменных многочлены нулевой степени имеют вид $F=a_{0,\ldots,0}$ и являются постоянными функциями. Вид многочленов первой степени зависит от количества переменных. Например, $F= 2x-4y+5z-1$ — многочлен первой степени от трех переменных, а $F=x-y+3$ — многочлен первой степени от двух переменных. При $n<k$ любой многочлен степени m от n переменных можно рассматривать как многочлен той же степени от k переменных, т.е. от большего числа переменных.

Уравнение $F(x_1,\ldots,x_n)=0$, в левой части которого стоит многочлен от n переменных, называют ***алгебраическим***.

Определение 4.4. ***Алгебраической поверхностью*** называют геометрический образ в пространстве, соответствующий уравнению $F(x,y,z)=0$, где F — многочлен от трех переменных x, y, z.

Степень многочлена F в уравнении $F=0$ называют ***порядком уравнения***, или его ***степенью***.

Определение 4.5. ***Алгебраической кривой*** (или ***линией***) ***на плоскости*** называют геометрический образ на плоскости, соответствующий уравнению $F(x,y)=0$, где F — многочлен от двух переменных x, y.

При преобразовании системы координат уравнение поверхности (кривой) изменяется. Пусть x, y, z — старые координаты, x', y', z' — новые координаты, связанные со старыми уравнениями (4.3), а поверхность в старой системе координат описывается уравнением $F(x,y,z)=0$. Тогда, чтобы получить уравнение поверхности в новой системе координат, необходимо в исходное уравнение подставить вместо переменных x, y, z их выражения через новые переменные x', y', z'.

В случае алгебраической поверхности (алгебраической кривой) преобразование координат в уравнении приводит к многочлену той же степени, что и степень первоначального уравнения.

Действительно, при преобразовании координат степень многочлена не может возрасти, но тогда она не может и уменьшиться, так как при обратном преобразовании она должна была бы возрасти. Следовательно, степень многочлена в уравнении отражает характер самой поверхности (кривой) и не связана с выбором системы координат.

Степень многочлена в уравнении, описывающем данную алгебраическую поверхность (кривую на плоскости), определяется неоднозначно. Например, поверхность, которая задается уравнением $F(x,y,z) = 0$, где F — многочлен, может быть также описана и уравнением $\bigl(F(x,y,z)\bigr)^2 = 0$, порядок которого вдвое больше. Но среди всех уравнений, описывающих данную алгебраическую поверхность (кривую на плоскости), есть уравнение наименьшего порядка.

Определение 4.6. Минимальный порядок уравнения, описывающего алгебраическую поверхность (алгебраическую кривую на плоскости) в прямоугольной системе координат, называют ***порядком*** этой ***поверхности*** (***кривой***).

Отметим, что наиболее распространенные кривые на плоскости (прямые и окружности) и поверхности в пространстве (плоскость, сфера, конус), которые изучаются в курсе школьной геометрии, являются алгебраическими порядка 1 или 2.

Кривая в пространстве может рассматриваться как линия пересечения двух поверхностей. Описывая каждую из поверхностей при помощи уравнения в одной и той же системе координат, например $F_1(x,y,z) = 0$, $F_2(x,y,z) = 0$, задают и линию пересечения этих поверхностей системой двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Кривые на плоскости или в пространстве можно описывать и другими способами. Так, кривую можно рассматривать как траекторию движущейся точки и описывать, задавая координаты точки как функции времени. Мы приходим к системе трех уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{4.14}$$

Кривая на плоскости может быть описана аналогичной системой двух уравнений. Такие системы называют параметрическими уравнениями кривой, а переменное t — параметром. Его содержательный смысл (время) не является существенным, да и происхождение параметра может быть различным — не только исходя из механической интерпретации кривой как траектории движения.

Если удается исключить параметр из системы (4.14), то получается система двух уравнений, которая характеризует кривую в пространстве как пересечение двух поверхностей. Возможен и обратный переход, при котором в систему двух уравнений вводят дополнительный параметр так, чтобы новая система могла быть представлена в виде (4.14).

Пример 4.4. Кривую в пространстве, заданную системой двух уравнений

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x - z + 1 = 0,$$

можно задать параметрически. Для этого исключаем из первого уравнения переменную z и получаем $x^2 + y^2 - (1+x)^2 = 0$ или $y^2 = 2x + 1$. Решая последнее уравнение относительно x, приходим к системе двух уравнений, эквивалентной исходной:

$$x = \frac{y^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

Остается ввести параметр, положив $t = y$, и записать параметрические уравнения рассматриваемой кривой:

$$x = \frac{t^2 - 1}{2}, \quad y = t, \quad z = \frac{t^2 + 1}{2}. \quad \#$$

Поверхность в пространстве может быть также задана параметрическими уравнениями, но параметров в этом случае должно быть два.

Пример 4.5. Сфера радиуса R с центром в начале координат описывается параметрическими уравнениями

$$x = R\cos\vartheta\cos\varphi, \quad y = R\cos\vartheta\sin\varphi, \quad z = R\sin\vartheta,$$

в которых параметр ϑ соответствует географической широте на поверхности Земли, а φ — географической долготе. Параметры должны изменяться в пределах $|\vartheta| \leqslant \pi/2$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

4.6. Алгебраические кривые первого порядка

Остановимся на изучении *алгебраических кривых первого порядка* на плоскости, т.е. кривых, которые в некоторой *прямоугольной системе координат* описываются *алгебраическим уравнением первого порядка* $ax + by + c = 0$, где хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля[1]. Это уравнение называют также ***линейным уравнением***.

Теорема 4.1. Любая прямая на плоскости представляет собой алгебраическую кривую первого порядка и любая алгебраическая кривая первого порядка на плоскости есть прямая.

◄ Рассмотрим произвольную прямую L на плоскости. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на L, а *ненулевой вектор* $\boldsymbol{n} = \{a; b\}$ перпендикулярен этой прямой. При таких исходных условиях произвольная точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$ (рис. 4.4).

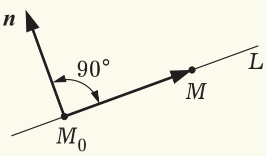


Рис. 4.4

Зная координаты векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ и $\boldsymbol{n}$, запишем условие ортогональности этих векторов через их *скалярное произведение*: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ или $ax + by + c = 0$, где $c = -ax_0 - by_0$. Так как $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$, то либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго рассмотрим произвольное уравнение первого порядка с двумя неизвестными $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Это уравнение имеет хотя бы одно решение. Например, если $a \neq 0$, то решением уравнения является $x = -c/a$, $y = 0$. Это значит, что *геометрический образ* уравнения является непустым и содержит какие-то точки. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит указанному образу, т.е. выполняется равенство $ax_0 + by_0 + c = 0$. Вычтем это равенство из рассматриваемого уравнения. В результате получим новое уравнение, эквивалентное исходному. Это новое уравнение после перегруппировки слагаемых примет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{4.15}$$

Нетрудно увидеть, что полученное уравнение представляет собой условие ортогональности векторов $\boldsymbol{n} = \{a; b\}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где M — это точка с координатами $(x; y)$. Следовательно, если точка

[1]Условие, что коэффициенты a и b одновременно не обращаются в нуль, коротко можно записать так: $a^2 + b^2 \neq 0$.

$M(x;y)$ принадлежит геометрическому образу уравнения $ax+by+c=0$, то вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{M_0M}$, т.е. точка M лежит на прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$. ►

Определение 4.7. Уравнение вида

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \tag{4.16}$$

называют ***общим уравнением прямой***.

Из доказательства теоремы 4.1 следует, что коэффициенты a и b в общем уравнении прямой имеют простой геометрический смысл. Это координаты вектора, перпендикулярного прямой. Такой вектор называют ***нормальным вектором прямой***. Он, как и общее уравнение прямой, определяется с точностью до (ненулевого) числового множителя.

Пусть прямая L задана уравнением (4.16). Если точка $M_0(x_0;y_0)$ лежит на прямой L, то ее координаты удовлетворяют уравнению (4.16), т.е. $ax_0+by_0+c=0$. В любой точке $M_1(x_1;y_1)$, не лежащей на прямой L, значение левой части уравнения (4.16) равно

$$ax_1 + by_1 + c = ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0 = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = \boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M_1} \neq 0.$$

Знак скалярного произведения $\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M_1}$ определяется углом между вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ и нормальным вектором прямой $\boldsymbol{n}$. Если точки M_1 и M_2 расположены по одну сторону от прямой L (рис. 4.5, *а*), то, подставив их координаты в левую часть уравнения (4.16), мы получим значения с одним знаком. Если такая подстановка координат точек M_1 и M_2 приводит к значениям с разными знаками, то эти точки лежат по разные стороны от прямой L (рис. 4.5, *б*).

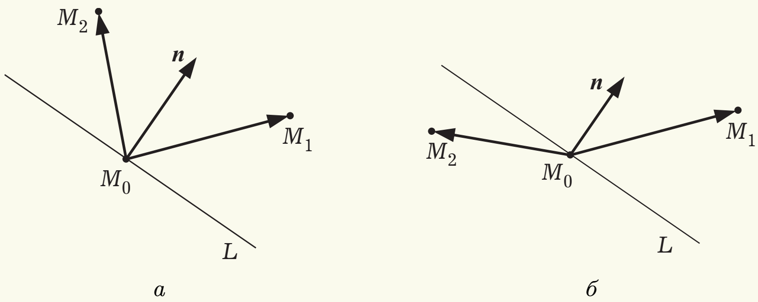


Рис. 4.5

Пример 4.6. Выясним, как по отношению к прямой $3x - 4y + 5 = 0$ расположены точки $A(4;4)$ и $B(6;6)$.

Подставив координаты точки A в левую часть общего уравнения прямой, получим положительное число 1, а подстановка координат точки B приводит к отрицательному числу -1. Значит, точки A и B расположены по разные стороны от данной прямой. #

Уравнение (4.15) очень полезно при решении задач. Оно позволяет по координатам точки на прямой L и координатам нормального вектора прямой L записать уравнение прямой без промежуточных вычислений.

4.7. Специальные виды уравнения прямой

Кроме *общего уравнения прямой* на плоскости часто используют и другие уравнения прямой. Это связано с тем, что, в зависимости от геометрического описания прямой на плоскости, ее уравнение может быть получено в некотором специальном виде. Кроме того, каждому виду уравнения соответствует свой геометрический смысл его коэффициентов, что также важно. Фиксируем на плоскости *прямоугольную систему координат* Oxy.

Уравнение с угловым коэффициентом. Определим прямую L на плоскости, задав точку $M_0(x_0; y_0)$ на этой прямой и угол φ, на который надо повернуть против хода часовой стрелки *ось абсцисс* Ox до совмещения с прямой (рис. 4.6). Предположим, что $\varphi \neq \pi/2$.

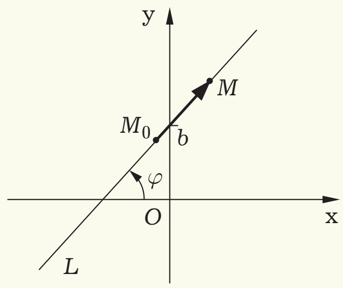


Рис. 4.6

Точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда *вектор* $\overrightarrow{M_0M}$ составляет с осью Ox угол φ или $\pi - \varphi$, при этом отношение *координат* этого *вектора* равно $\operatorname{tg}\varphi$. Это условие можно записать в виде $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \operatorname{tg}\varphi$. Находя y, приходим к уравнению

$$y = kx + b, \tag{4.17}$$

где $k = \operatorname{tg}\varphi$; $b = y_0 - x_0 \operatorname{tg}\varphi$.

Уравнение вида $y = kx + b$ называют ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***. Параметр k (***угловой коэффициент прямой***) равен тангенсу угла наклона прямой. Параметр b равен *ординате точки* пересечения прямой с осью Oy.

Векторное и параметрические уравнения прямой. Определим прямую L на плоскости точкой $M_0(x_0; y_0)$ на этой прямой и *ненулевым вектором* $\boldsymbol{s} = \{l; m\}$, параллельным ей (рис. 4.7). Такой вектор $\boldsymbol{s}$ называют ***направляющим вектором прямой*** L.

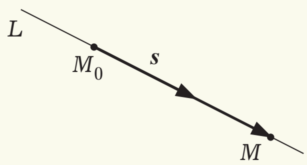


Рис. 4.7

Если точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L, то это эквивалентно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ *коллинеарен* вектору $\boldsymbol{s}$, т.е. эти векторы принадлежат одному и тому же *пространству* V_1. Так как вектор $\boldsymbol{s}$ не равен *нулевому*, он образует *базис* в этом пространстве V_1. Следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{s}$. Воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0\}$, $\boldsymbol{s} = \{l; m\}$, запишем это равенство в координатах:

$$x - x_0 = lt, \quad y - y_0 = mt,$$

или

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt. \tag{4.18}$$

Уравнения (4.18) называют ***параметрическими уравнениями прямой***. Точка $M(x_0; y_0)$, лежащая на прямой, соответствует значению параметра $t = 0$.

Если равенство $\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{s}$ записать через *радиус-векторы* $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}$ точек M_0 и M соответственно, то в результате получим ***векторное уравнение прямой***

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{s}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{s}. \tag{4.19}$$

Каноническое уравнение прямой. Модифицируем вывод параметрических уравнений прямой. *Коллинеарность* векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{s}$, согласно следствию 2.1, эквивалентна равенству отношений их одноименных координат:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{4.20}$$

Уравнение (4.20) называют ***каноническим уравнением прямой***. Это уравнение можно также получить, исключив из параметрических уравнений (4.18) параметр t.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Зададим прямую L на плоскости двумя различными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на ней.

Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ параллелен L и ее каноническое уравнение (4.20) как уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, с направляющим вектором $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.21}$$

Уравнение (4.21) называют ***уравнением прямой, проходящей через две точки***.

Уравнение прямой в отрезках. Определим прямую L ее точками $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ пересечения с осями координат, предполагая, что эти две точки не совпадают с *началом системы координат*, т.е. что $a \neq 0$ и $b \neq 0$ (рис. 4.8).

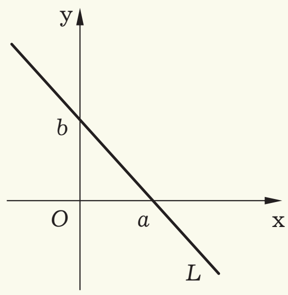


Рис. 4.8

Записывая уравнение прямой L в виде (4.21) по двум ее точкам A и B, получаем $\dfrac{x-a}{0-a} = \dfrac{y-0}{b-0}$, откуда $-x/a + 1 = y/b$, или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{4.22}$$

Уравнение прямой (4.22) называют ***уравнением прямой в отрезках***.

Нормальное уравнение прямой. Определим прямую L при помощи перпендикулярного ей *единичного вектора* $\boldsymbol{n}$ и расстояния $p > 0$ до прямой от начала системы координат. Существуют два единичных вектора, перпендикулярных прямой L. Из этих двух выберем тот, который имеет начало в точке O и направлен „в сторону прямой“ L (рис. 4.9).

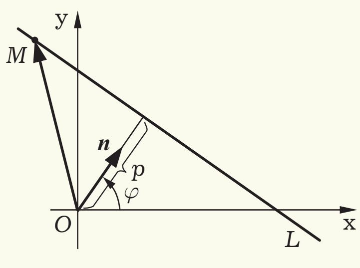


Рис. 4.9

Выбранный вектор $\boldsymbol{n}$ однозначно определяется своим углом φ с осью Ox, который отсчитывается против хода часовой стрелки. Координаты вектора $\boldsymbol{n}$ легко вычисляются через этот угол: $\boldsymbol{n} = \{\cos\varphi;\, \sin\varphi\}$.

Условие, что точка $M(x;y)$ принадлежит прямой L, эквивалентно тому, что *ортогональная проекция* радиус-вектора точки M *на направление нормального вектора прямой* равна расстоянию p от точки O до прямой: $\text{пр}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{OM} = p$ (см. рис. 4.9). Проекция $\text{пр}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{OM}$ совпадает со *скалярным произведением* векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\boldsymbol{n}$, так как длина нормального вектора $\boldsymbol{n}$ равна единице, и это приводит к равенству $\overrightarrow{OM}\boldsymbol{n} = p$. Записав скалярное произведение $\overrightarrow{OM}\boldsymbol{n}$ в координатах, получим уравнение прямой L в виде

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \tag{4.23}$$

Уравнение (4.23) называют ***нормальным уравнением прямой***. Параметрами в этом уравнении являются угол φ между нормальным вектором прямой и осью Ox и расстояние от начала системы координат до прямой.

Общее уравнение прямой $ax+by+c=0$ можно преобразовать в ее нормальное уравнение делением на нормирующий множитель $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, знак которого выбирается противоположным знаку c. По абсолютной величине нормирующий множитель представляет собой длину нормального вектора $\{a;b\}$ прямой, а выбор знака означает выбор нужного направления из двух возможных. Если $c=0$, то прямая проходит через начало координат ($p=0$). В этом случае знак нормирующего множителя можно выбирать любым.

Пример 4.7. Для получения нормального уравнения прямой из ее общего уравнения $3x - 4y + 10 = 0$ вычисляем нормирующий множитель $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, который для данной прямой отрицателен и равен $-\sqrt{3^2+4^2} = -5$. Поэтому нормальное уравнение прямой имеет вид

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

В данном случае имеем $p=2$, $\cos\varphi = -3/5$, $\sin\varphi = 4/5$, а $\varphi = \arccos(-3/5)$.

4.8. Взаимное расположение двух прямых

Фиксируем на плоскости *прямоугольную систему координат*. Две прямые на плоскости могут быть параллельными или пересекаться. Пересекающиеся прямые могут быть перпендикулярными. Какая из этих возможностей реализуется для прямых L_1 и L_2, всегда можно выяснить с помощью их *общих уравнений*

$$L_1\colon\ a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad L_2\colon\ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Действительно, для параллельности прямых L_1 и L_2 необходимо и достаточно, чтобы были *коллинеарными* их *нормальные векторы* $\boldsymbol{n}_1 = \{a_1;b_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{a_2;b_2\}$, а коллинеарность векторов равносильна пропорциональности их координат. Поэтому

$$L_1 \parallel L_2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \tag{4.24}$$

Так как последнее равенство преобразуется в соотношение $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то полученное условие параллельности двух прямых можно записать при помощи *определителя второго порядка*:

$$L_1 \parallel L_2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.25}$$

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их нормальные векторы. Условие ортогональности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1 = \{a_1;b_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{a_2;b_2\}$ эквивалентно равенству нулю их *скалярного произведения* $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0$, т.е., согласно (2.17), условию

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \tag{4.26}$$

И условие параллельности, и условие перпендикулярности можно записать через *угловые коэффициенты прямых*. Для этого необходимо выразить угловые коэффициенты прямых через коэффициенты их общих уравнений: $k_1 = -a_1/b_1$, $k_2 = -a_2/b_2$. Эти выражения позволяют записать условия (4.24) и (4.26) следующим образом:

– условие параллельности: $k_1 = k_2$;
– условие перпендикулярности: $k_1 k_2 = -1$.

Две пересекающиеся прямые L_1 и L_2 образуют два смежных[2] угла. Один из этих углов совпадает с *углом между* нормальными *векторами*. А угол между двумя векторами можно вычислить при помощи скалярного произведения. Отметим, что косинусы двух смежных углов различаются знаками, так как $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$. При этом положительное значение косинуса соответствует острому углу. Значение φ (меньшего из углов между прямыми L_1 и L_2) вычисляется согласно формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Угол между прямыми можно также выразить через угловые коэффициенты прямых. Этот угол представляет собой разность углов наклона прямых. Если $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ — угловые коэффициенты прямых L_1 и L_2, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Приведенная формула учитывает не только значение угла, но и направление поворота вокруг точки пересечения прямых, при котором прямая L_2 совмещается с прямой L_1. Прямую L_2 можно поворачивать как по ходу часовой стрелки, так и в противоположном направлении. Два возможных угла поворота (без учета знака) в сумме равны 180°. Значение острого угла поворота с учетом его направления определяется по формуле

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

4.9. Расстояние от точки до прямой

Для вычисления расстояния от данной точки M до прямой L можно использовать разные способы. Например, если на прямой L взять произвольную точку M_0, то можно определить *ортогональную проекцию вектора* $\overrightarrow{M_0M}$ *на направление нормального вектора прямой*. Эта проекция с точностью до знака и есть нужное расстояние.

Другой способ вычисления расстояния от точки до прямой основан на использовании *нормального уравнения прямой*. Пусть прямая L задана нормальным уравнением (4.23). Если точка $M(x;y)$ не лежит на прямой L, то ортогональная проекция $\text{пр}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{OM}$ *радиус-вектора* точки M на направление *единичного* нормального *вектора* $\boldsymbol{n}$ прямой L равна *скалярному произведению* векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\boldsymbol{n}$, т.е. $x\cos\varphi + y\sin\varphi$. Эта же проекция равна сумме расстояния p от *начала координат* до прямой и некоторой величины δ (рис. 4.10). Величина δ по абсолютной величине равна расстоянию от точки M до прямой. При этом $\delta > 0$, если точки M и O находятся по разные стороны от прямой, и $\delta < 0$, если эти точки расположены по одну сторону от прямой. Величину δ называют ***отклонением точки M от прямой***.

Отклонение δ для точки $M(x;y)$ от прямой L вычисляется как разность проекции $\text{пр}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{OM}$ и расстояния p от начала координат до прямой (см. рис. 4.10), т.е. $\delta = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p$.

По этой формуле можно получить и расстояние $\rho(M, L)$ от точки $M(x;y)$ до прямой L, заданной нормальным уравнением: $\rho(M, L) = |\delta| = |x\cos\varphi + y\sin\varphi - p|$.

[2] Два смежных угла в сумме дают 180°.

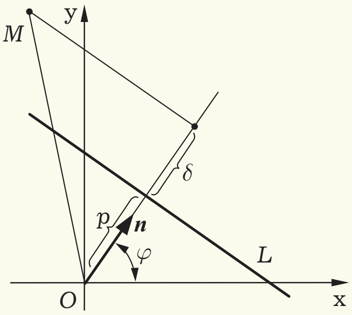


Рис. 4.10

Учитывая приведенную выше процедуру преобразования *общего уравнения прямой* в ее нормальное уравнение, получаем формулу для расстояния от точки $M(x;y)$ до прямой L, заданной своим общим уравнением:

$$\rho(M,L)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4.27}$$

Пример 4.8. Найдем общие уравнения высоты AH, медианы AM и биссектрисы AD треугольника ABC, выходящих из вершины A. Известны координаты вершин треугольника $A(-1;-3)$, $B(7;3)$, $C(1;7)$.

Прежде всего уточним условие примера: под указанными уравнениями подразумевают уравнения прямых L_{AH}, L_{AM} и L_{AD}, на которых расположены соответственно высота AH, медиана AM и биссектриса AD указанного треугольника (рис. 4.11).

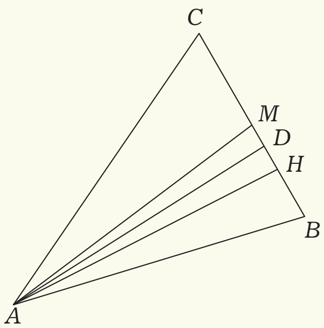


Рис. 4.11

Чтобы найти уравнение прямой L_{AM}, воспользуемся тем, что медиана делит противоположную сторону треугольника пополам. Найдя координаты $(x_1;y_1)$ середины стороны BC $x_1=(7+1)/2=4$, $y_1=(3+7)/2=5$, записываем уравнение для L_{AM} в виде *уравнения прямой, проходящей через две точки*, $\dfrac{x+1}{4+1}=\dfrac{y+3}{5+3}$. После преобразований получаем общее уравнение медианы $8x-5y-7=0$.

Чтобы найти уравнение высоты L_{AH}, воспользуемся тем, что высота перпендикулярна противоположной стороне треугольника. Следовательно, вектор $\overrightarrow{BC}$ перпендикулярен высоте AH и его можно выбрать в качестве нормального вектора прямой L_{AH}. Уравнение этой прямой получаем из (4.15), подставляя координаты точки A и нормального вектора прямой L_{AH}:

$$(-6)(x+1)+4(y+3)=0.$$

После преобразований получаем общее уравнение высоты $3x-2y-3=0$.

Чтобы найти уравнение биссектрисы L_{AD}, воспользуемся тем, что биссектриса AD принадлежит множеству тех точек $N(x;y)$, которые равноудалены от прямых L_{AB} и L_{AC}. Уравнение этого множества имеет вид

$$\rho(N,L_{AB})=\rho(N,L_{AC}), \tag{4.28}$$

и оно задает две прямые, проходящие через точку A и делящие углы между прямыми L_{AB} и L_{AC} пополам. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, найдем общие уравнения прямых L_{AB} и L_{AC}:

$$L_{AB}\colon\ \frac{x+1}{7+1}=\frac{y+3}{3+3},\qquad L_{AC}\colon\ \frac{x+1}{1+1}=\frac{y+3}{7+3}.$$

После преобразований получаем $L_{AB}\colon\ 3x-4y-9=0$, $L_{AC}\colon\ 5x-y+2=0$. Уравнение (4.28) с помощью формулы (4.27) для вычисления расстояния от точки до прямой запишем в виде

$$\frac{|3x-4y-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|5x-y+2|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}.$$

Преобразуем его, раскрыв модули:

$$3x-4y-9=\pm 5\frac{5x-y+2}{\sqrt{26}}.$$

В итоге получим общие уравнения двух прямых

$$(3\mp 25/\sqrt{26})x+(-4\pm 5/\sqrt{26})y+(-9\mp 10/\sqrt{26})=0.$$

Чтобы выбрать из них уравнение биссектрисы, учтем, что вершины B и C треугольника расположены по разные стороны от искомой прямой и поэтому подстановки их координат в левую часть общего уравнения прямой L_{AD} должны давать значения с разными знаками. Выбираем уравнение, соответствующее верхнему знаку, т.е.

$$(3-25/\sqrt{26})x+(-4+5/\sqrt{26})y+(-9-10/\sqrt{26})=0.$$

Подстановка координат точки B в левую часть этого уравнения дает отрицательное значение, поскольку

$$(3-25/\sqrt{26})7+(-4+5/\sqrt{26})3+(-9-10/\sqrt{26})=\\ =21-12-9+(-175+15-10)/\sqrt{26}=-170/\sqrt{26},$$

и такой же знак получается для координат точки C, так как

$$(3-25/\sqrt{26})1+(-4+5/\sqrt{26})7+(-9-10/\sqrt{26})=\\ =3-28-9+(-25+35-10)/\sqrt{26}=-34<0.$$

Следовательно, вершины B и C расположены по одну сторону прямой с выбранным уравнением, а потому уравнением биссектрисы является

$$(3+25/\sqrt{26})x+(-4-5/\sqrt{26})y+(-9+10/\sqrt{26})=0.$$

Лекция 5
ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Различные виды уравнения плоскости в пространстве: общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три точки; уравнение плоскости „в отрезках“. *Связка плоскостей. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

5.1. Алгебраические поверхности первого порядка

Уравнение первого порядка с тремя неизвестными имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля. Оно задает в пространстве в *прямоугольной системе координат* $Oxyz$ *алгебраическую поверхность первого порядка.*

Свойства алгебраической поверхности первого порядка во многом аналогичны свойствам прямой на плоскости — *геометрическому образу уравнения первого порядка с двумя неизвестными.*

Теорема 5.1. Любая плоскость в пространстве является поверхностью первого порядка и любая поверхность первого порядка в пространстве есть плоскость.

◄ Как утверждение теоремы, так и ее доказательство аналогичны теореме 4.1. Действительно, пусть плоскость π задана своей точкой M_0 и *ненулевым вектором* $\boldsymbol{n}$, который ей перпендикулярен. Тогда множество всех точек в пространстве разбивается на три подмножества. Первое состоит из точек, принадлежащих плоскости, а два других — из точек, расположенных по одну и по другую стороны плоскости. Какому из этих множеств принадлежит произвольная точка M пространства, зависит от знака *скалярного произведения* $\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M}$. Если точка M принадлежит плоскости (рис. 5.1, *а*), то *угол между векторами* $\boldsymbol{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ прямой, и поэтому, согласно теореме 2.7, их скалярное произведение равно нулю:

$$\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M} = 0. \tag{5.1}$$

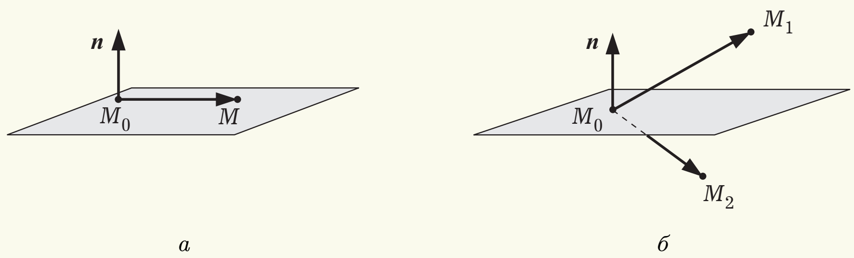


Рис. 5.1

Если же точка M не принадлежит плоскости, то угол между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ острый или тупой, и поэтому $\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M} > 0$ или $\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M} < 0$ соответственно (см. доказательство теоремы 2.7), причем знак этого скалярного произведения один и тот же для всех точек, расположенных по одну сторону от плоскости (рис. 5.1, *б*).

Обозначим *координаты точек* M_0, M и *вектора* $\boldsymbol{n}$ через $(x_0; y_0; z_0)$, $(x; y; z)$ и $\{A; B; C\}$ соответственно. Так как $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, то, записывая скалярное произведение из (5.1) в координатной форме (2.14) как сумму попарных произведений одноименных координат векторов $\boldsymbol{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, получаем условие принадлежности точки M рассматриваемой плоскости в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{5.2}$$

Раскрытие скобок дает уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{5.3}$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ и хотя бы один из коэффициентов A, B, или C отличен от нуля, так как вектор $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$ ненулевой. Это означает, что плоскость является геометрическим образом уравнения (5.3), т.е. алгебраической поверхностью первого порядка.

Проведя изложенное доказательство первого утверждения теоремы в обратном порядке, мы докажем, что геометрическим образом уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, является плоскость. Выберем три числа ($x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$), удовлетворяющих этому уравнению. Такие числа существуют. Например, при $A \neq 0$ можно положить $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ и тогда $x_0 = -D/A$. Выбранным числам соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая геометрическому образу заданного уравнения. Из равенства $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ следует, что $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Подставляя это выражение в рассматриваемое уравнение, получаем $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$, что равносильно (5.2). Равенство (5.2) можно рассматривать как *критерий ортогональности векторов* $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где точка M имеет координаты $(x; y; z)$. Этот критерий выполнен для точек плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$, и не выполнен для остальных точек пространства. Значит, уравнение (5.2) есть уравнение указанной плоскости. ►

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называют ***общим уравнением плоскости***. Коэффициенты A, B, C при неизвестных в этом уравнении имеют наглядный геометрический смысл: вектор $\boldsymbol{n} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен плоскости. Его называют ***нормальным вектором плоскости***. Он, как и общее уравнение плоскости, определяется с точностью до (ненулевого) числового множителя.

По известным координатам точки, принадлежащей некоторой плоскости, и ненулевого вектора, перпендикулярного ей, с помощью (5.2) уравнение плоскости записывается без каких-либо вычислений.

Пример 5.1. Найдем общее уравнение плоскости, перпендикулярной *радиус-вектору* точки $A(2; 5; 7)$ и проходящей через точку $M_0(3; -4; 1)$.

Поскольку ненулевой вектор $\overrightarrow{OA} = \{2; 5; 7\}$ перпендикулярен искомой плоскости, то ее уравнение типа (5.2) имеет вид $2(x-3)+5(y+4)+7(z-1) = 0$. Раскрывая скобки, получаем искомое общее уравнение плоскости $2x + 5y + 7z + 7 = 0$.

5.2. Специальные виды уравнения плоскости

Векторное и параметрические уравнения плоскости. Пусть $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}$ — *радиус-векторы* точек M_0 и M соответственно. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, и условие (5.1) принадлежности точки M плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно *ненулевому вектору* $\boldsymbol{n}$ (рис. 5.2, *а*), можно записать с помощью *скалярного произведения* в виде соотношения

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0, \tag{5.4}$$

которое называют ***векторным уравнением плоскости***.

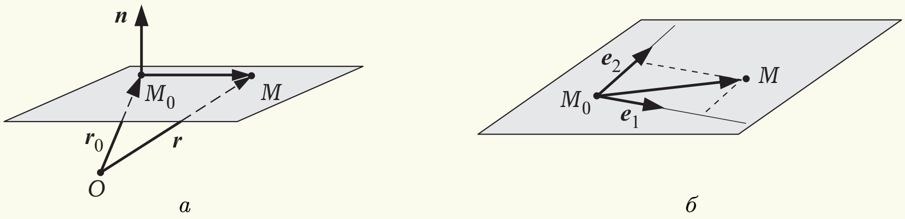


Рис. 5.2

Фиксированной плоскости в пространстве соответствует множество параллельных ей векторов, т.е. *пространство* V_2. Выберем в этом пространстве *базис* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, т.е. пару неколлинеарных векторов, параллельных рассматриваемой плоскости, и точку M_0 на плоскости. Если точка M принадлежит плоскости, то это эквивалентно тому, что ей параллелен вектор $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 5.2, *б*), т.е. он принадлежит указанному пространству V_2. Это означает, что существует *разложение вектора* $\overrightarrow{M_0M}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, т.е. существуют такие числа t_1 и t_2, для которых $\overrightarrow{M_0M} = t_1\boldsymbol{e}_1 + t_2\boldsymbol{e}_2$. Записав левую часть этого уравнения через радиус-векторы $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}$ точек M_0 и M соответственно, получаем ***векторное параметрическое уравнение плоскости***

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{e}_1 + t_2\boldsymbol{e}_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Чтобы перейти от равенства векторов в (5.5) к равенству их *координат*, обозначим через $(x_0; y_0; z_0)$, $(x; y; z)$ *координаты точек* M_0, M и через $\{e_{1x}; e_{1y}; e_{1z}\}$, $\{e_{2x}; e_{2y}; e_{2z}\}$ координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Приравнивая одноименные координаты векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{e}_1 + t_2\boldsymbol{e}_2$, получаем ***параметрические уравнения плоскости***

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1e_{1x} + t_2e_{2x}, \\ y = y_0 + t_1e_{1y} + t_2e_{2y}, \\ z = z_0 + t_1e_{1z} + t_2e_{2z}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Плоскость, проходящая через три точки. Предположим, что три точки M_1, M_2 и M_3 не лежат на одной прямой. Тогда существует единственная плоскость π, которой эти точки принадлежат. Найдем уравнение этой плоскости, сформулировав критерий принадлежности произвольной точки M данной плоскости π. Затем запишем этот критерий через координаты точек. Указанным критерием является описание плоскости π как множества тех точек M, для которых векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ *компланарны*. Критерием компланарности трех векторов является равенство нулю их *смешанного произведения* (см. **3.2**). Смешанное произведение вычисляется с помощью *определителя третьего порядка*, строками которого являются координаты векторов в *ортонормированном базисе*. Поэтому, если $(x_i; y_i; z_i)$ — координаты точек M_i, $i = 1, 2, 3$, а $(x; y; z)$ — координаты точки M, то $\overrightarrow{M_1M} = \{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}$ и условие равенства нулю смешанного произведения этих векторов имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.7}$$

Вычислив определитель, получим *линейное* относительно x, y, z *уравнение*, являющееся *общим уравнением* искомой *плоскости*. Например, если *разложить определитель по 1-й строке*, то получим

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1) - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0.$$

Это равенство после вычисления определителей и раскрытия скобок преобразуется к общему уравнению плоскости.

Отметим, что коэффициенты при переменных в последнем уравнении совпадают с координатами *векторного произведения* $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$. Это векторное произведение, будучи произведением двух неколлинеарных векторов, параллельных плоскости π, дает ненулевой вектор, перпендикулярный π, т.е. ее *нормальный вектор*. Так что появление координат векторного произведения в качестве коэффициентов общего уравнения плоскости вполне закономерно.

Рассмотрим следующий частный случай плоскости, проходящей через три точки. Точки $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$, $abc\neq 0$, не лежат на одной прямой и задают плоскость, которая отсекает на осях координат отрезки ненулевой длины (рис. 5.3). Здесь под „длинами отрезков“ понимают значение ненулевых координат радиус-векторов точек M_i, $i=1,2,3$.

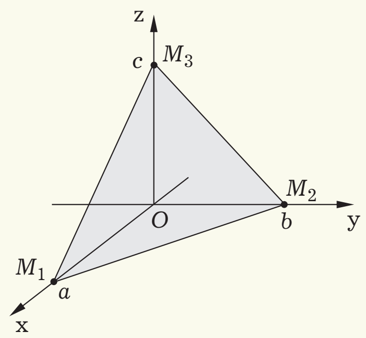


Рис. 5.3

Поскольку $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-a;b;0\}$, $\overrightarrow{M_1M_3}=\{-a;0;c\}$, $\overrightarrow{M_1M}=(x-a;y;z)$, то уравнение (5.7) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=0.$$

Вычислив определитель, найдем $bc(x-a)+acy+abz=0$, разделим полученное уравнение на abc и перенесем свободный член в правую часть,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Это уравнение называют ***уравнением плоскости в отрезках***.

Пример 5.2. Найдем общее уравнение плоскости, которая проходит через точку с координатами $(1;1;2)$ и отсекает от осей координат отрезки одинаковой длины.

Уравнение плоскости в отрезках при условии, что она отсекает от осей координат отрезки равной длины, скажем $a\neq 0$, имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Этому уравнению должны удовлетворять координаты $(1;1;2)$ известной точки на плоскости, т.е. выполняется равенство $4/a=1$. Поэтому $a=4$ и искомым уравнением является $x+y+z-4=0$.

Нормальное уравнение плоскости. Рассмотрим некоторую плоскость π в пространстве. Фиксируем для нее *единичный* нормальный *вектор* $\boldsymbol{n}$, направленный из *начала координат* „в сторону плоскости“, и обозначим через p расстояние от начала O системы координат до плоскости π (рис. 5.4). Если плоскость проходит через начало системы координат, то $p=0$, а в качестве направления для нормального вектора $\boldsymbol{n}$ можно выбрать любое из двух возможных.

Если точка M принадлежит плоскости π, то это эквивалентно тому, что *ортогональная проекция вектора* $\overrightarrow{OM}$ *на направление* вектора $\boldsymbol{n}$ равна p, т.е. выполнено условие $\boldsymbol{n}\overrightarrow{OM}=$ $=\text{пр}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{OM}=p$, так как *длина вектора* $\boldsymbol{n}$ равна единице.

Обозначим координаты точки M через $(x;y;z)$ и пусть $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha;\,\cos\beta;\,\cos\gamma\}$ (напомним, что для единичного вектора $\boldsymbol{n}$ его *направляющие косинусы* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ одновременно являются и его координатами). Записывая скалярное произведение в равенстве $\boldsymbol{n}\overrightarrow{OM}=p$ в координатной форме, получаем ***нормальное уравнение плоскости***

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

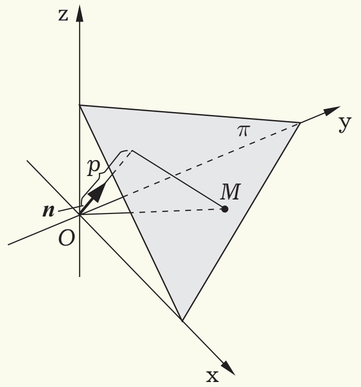


Рис. 5.4

Аналогично случаю прямой на плоскости, общее уравнение плоскости в пространстве можно преобразовать в ее нормальное уравнение делением на нормирующий множитель.

Для уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ нормирующим множителем является число $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, знак которого выбирается противоположным знаку D. По абсолютной величине нормирующий множитель представляет собой длину нормального вектора $\{A;B;C\}$ плоскости, а знак соответствует нужному направлению единичного нормального вектора плоскости. Если плоскость проходит через начало системы координат, т.е. $D=0$, то знак нормирующего множителя можно выбрать любым.

5.3. Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π и произвольную точку M_0. Выберем для плоскости *единичный нормальный вектор* $\boldsymbol{n}$ *с началом* в некоторой точке $M_1\in\pi$, и пусть $\rho(M_0,\pi)$ — расстояние от точки M_0 до плоскости π. Тогда (рис. 5.5)

$$\rho(M_0,\pi)=|\,\text{пр}_{\boldsymbol{n}}\,\overrightarrow{M_1M_0}|=|\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_1M_0}|, \tag{5.8}$$

так как $|\boldsymbol{n}|=1$.

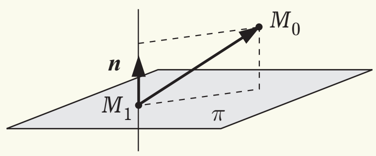


Рис. 5.5

Если плоскость π задана в *прямоугольной системе координат* своим *общим уравнением* $Ax+By+Cz+D=0$, то ее нормальным вектором является вектор с координатами $\{A;B;C\}$ и в качестве единичного нормального вектора можно выбрать

$$\boldsymbol{n}=\frac{\{A;B;C\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пусть $(x_0;y_0;z_0)$ и $(x_1;y_1;z_1)$ — *координаты точек* M_0 и M_1. Тогда выполнено равенство $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, так как точка M_1 принадлежит плоскости, и можно найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$: $\overrightarrow{M_1M_0}=\{x_0-x_1;\ y_0-y_1;\ z_0-z_1\}$. Записывая *скалярное произведение* $\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_1M_0}$ в координатной форме и преобразуя (5.8), получаем

$$\rho(M,\pi)=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$
$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

поскольку $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$. Итак, чтобы вычислить расстояние от точки до плоскости нужно подставить координаты точки в общее уравнение плоскости, а затем абсолютную величину результата разделить на нормирующий множитель, равный длине соответствующего нормального вектора.

5.4. Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны две плоскости, заданные в *прямоугольной системе координат* своими *общими уравнениями*, π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Один из двух углов между этими плоскостями (обозначим его через φ) равен *углу между* их *нормальными векторами* $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ (рис. 5.6), а другой угол равен $\pi - \varphi$.

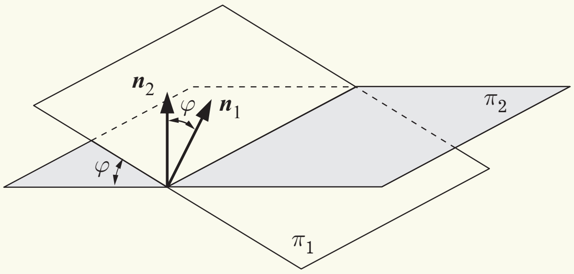


Рис. 5.6

Поэтому, согласно определению 2.3 *скалярного произведения*,

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если две данные плоскости перпендикулярны, то это эквивалентно тому, что их нормальные векторы *ортогональны*. Критерием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения (см. теорему 2.7). Поскольку скалярное произведение двух векторов, заданных в координатах, вычисляется как сумма произведений их одноименных координат, критерием перпендикулярности плоскостей π_1 и π_2 является выполнение равенства

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Аналогично две плоскости параллельны, если их нормальные *векторы коллинеарны*. Критерием же коллинеарности двух векторов является равенство отношений их координат (см. следствие 2.1). Поэтому условие параллельности двух плоскостей записывается в виде двойного равенства

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Замечание 5.1. Это двойное равенство имеет смысл и в том случае, когда в знаменателе одной из дробей стоит нуль. Это значит, что и в числителе той же дроби стоит нуль. #

Параллельные плоскости могут совпадать или быть различными. Левые части общих уравнений совпадающих плоскостей отличаются на ненулевой числовой множитель, и это можно записать как равенство отношений соответствующих коэффициентов их уравнений:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Случай же

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

соответствует тому, что плоскости параллельны, но не совпадают.

Лекция 6
ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве. Общие уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой; векторное уравнение прямой; канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Взаимное расположение прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение двух прямых в пространстве, угол между прямыми в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние между двумя прямыми.

6.1. Уравнения прямой в пространстве

Общие уравнения прямой в пространстве. Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей. Если плоскости π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ не параллельны, то пересекаются по прямой. Точка $M(x; y; z)$ принадлежит этой прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению каждой из плоскостей, т.е. являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

которую называют ***общими уравнениями прямой***.

Векторное уравнение прямой. Описание прямой в пространстве при помощи общих уравнений — не единственный способ. Прямую L в пространстве можно также однозначно задать любой ее точкой M_0 и параллельным ей *ненулевым вектором* $\boldsymbol{s}$.

Любой ненулевой вектор, параллельный прямой, называют ***направляющим вектором прямой***.

Если точка M принадлежит прямой L, то это эквивалентно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ *коллинеарен вектору* $\boldsymbol{s}$ (рис. 6.1). Так как $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$, то вектор $\boldsymbol{s}$ является базисом в *пространстве* V_1 коллинеарных ему векторов. Поэтому для некоторого числа t выполняется равенство $\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{s}$. Так как $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_0$ — *радиус-векторы* точек M и M_0 соответственно, то условие $M \in L$ можно записать в виде уравнения

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{s}, \tag{6.2}$$

которое называют ***векторным уравнением прямой*** в пространстве.

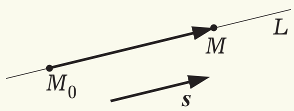


Рис. 6.1

Параметрические уравнения прямой в пространстве. Предположим, что известны *координаты* $\{l; m; n\}$ направляющего *вектора* $\boldsymbol{s}$ прямой L и *точки* $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$ в *прямоугольной системе координат*. Обозначим через $(x; y; z)$ координаты произвольной точки M.

Критерием принадлежности точки M прямой L является условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ и $\boldsymbol{s}$ (см. рис. 6.1), что равносильно пропорциональности их координат (см. теорему 2.6). Обозначив через t коэффициент пропорциональности, получим равенства $x - x_0 = tl$, $y - y_0 = tm$, $z - z_0 = tn$. Но тогда

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \tag{6.3}$$

и (6.3) называют ***параметрическими уравнениями прямой*** в пространстве. Шесть коэффициентов в системе уравнений (6.3) имеют наглядный геометрический смысл: они представляют собой координаты одной точки на прямой, соответствующей $t = 0$, и координаты направляющего вектора прямой, который соединяет точки, соответствующие значениям параметра $t = 0$ и $t = 1$.

Итак, если задана система трех уравнений вида (6.3), в которой хотя бы один из коэффициентов l, m, n отличен от нуля, то эта система определяет в пространстве прямую, причем тройка коэффициентов x_0, y_0, z_0 задает на прямой точку, а тройка коэффициентов l, m, n представляет собой координаты направляющего вектора прямой.

Канонические уравнения прямой в пространстве. Как и в случае прямой на плоскости, из параметрических уравнений (6.3) можно исключить параметр t и записать результат в виде

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{6.4}$$

Уравнения (6.4) называют ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Канонические уравнения представляют собой, по существу, другую форму записи условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{s}$, состоящую в пропорциональности их координат (см. следствие 2.1).

В знаменателе канонических уравнений допускается нулевое значение. Чтобы понять смысл нулевых значений параметров l, m, n, обратим внимание на параметрические уравнения прямой (6.3), в которых нет проблемы нулевых знаменателей. Например, при $l = 0$ из (6.3) следует, что $x = x_0$. Мы видим, что если в канонических уравнениях один из знаменателей (или два, но не все три) равен нулю, то соответствующий числитель тоже равен нулю.

Уравнения прямой, проходящей через две точки. Каждая прямая в пространстве однозначно задается любыми двумя своими различными точками. Если известны координаты этих точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то в качестве направляющего вектора прямой подходит ненулевой вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Зная его координаты и координаты точки M_1 на прямой, можно записать канонические уравнения прямой (6.4). В результате получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad —$$

уравнения прямой, проходящей через две точки.

Пример 6.1. Точки $M_1(1; 2; 3)$ и $M_2(3; 2; 1)$ определяют проходящую через них прямую $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-2}{2-2} = \dfrac{z-3}{1-3}$. Нуль в знаменателе второй дроби означает, что для координат всех точек прямой выполнено равенство $y = 2$. Поэтому прямая расположена в плоскости $y - 2 = 0$, параллельной координатной плоскости xOz и пересекающей ось ординат в точке с ординатой 2.

Изменение формы уравнений прямой. Переход от канонических уравнений прямой к параметрическим и обратно достаточно очевиден и сводится к введению или исключению параметра t. Одна форма уравнений непосредственно записывается по другой, так как в них используются одни и те же параметры, задающие координаты точки на прямой и координаты направляющего вектора.

Пример 6.2. Найдем координаты точки B, симметричной точке $A(2; 3; -1)$ относительно прямой L: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

В вычислениях будем опираться на следующее геометрическое построение точки B: а) через точку A проводим плоскость π, перпендикулярную прямой L; б) находим точку M пересечения прямой L и плоскости π; в) отрезок AM удлиняем до отрезка AB так, чтобы точка M оказалась в середине отрезка AB (рис. 6.2).

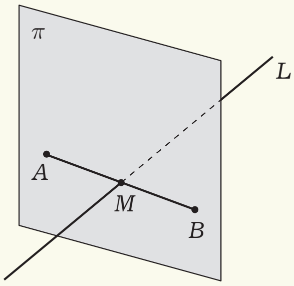


Рис. 6.2

Так как плоскость π перпендикулярна прямой L, то в качестве *нормального вектора* $\boldsymbol{n}$ плоскости можно выбрать направляющий вектор прямой L: $\boldsymbol{n} = \{1; -1; 2\}$. По известным координатам нормального вектора плоскости π и принадлежащей ей точки A записываем уравнение плоскости π в виде (5.2): $1(x-2) + (-1)(y-3) + 2(z+1) = 0$.

Чтобы найти координаты точки M пересечения прямой и плоскости по их уравнениям, запишем параметрические уравнения прямой L: $x = 1+t$, $y = -2-t$, $z = 1+2t$. Подставив эти выражения для координат точки на прямой в уравнение плоскости, для параметра t получим уравнение $(1+t-2) - (-2-t-3) + 2(1+2t+1) = 0$, решение которого дает значение параметра для точки M. Найдя это значение $t = -4/3$ и подставив его в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения $x = 1 - 4/3 = -1/3$, $y = -2 + 4/3 = -2/3$, $z = 1 - 8/3 = -5/3$. Поскольку эта точка должна делить отрезок AB пополам, ее координаты, согласно (4.13), равны полусумме соответствующих координат точек A и B. Следовательно, обозначив через $(x_B; y_B; z_B)$ координаты точки B, получим равенства $\dfrac{2+x_B}{2} = -1/3$, $\dfrac{3+y_B}{2} = -2/3$, $\dfrac{-1+z_B}{2} = -5/3$. Отсюда $x_B = -8/3$, $y_B = -13/3$, $z_B = -7/3$. #

Достаточно просто выполняется переход от канонических уравнений к общим. Нетрудно увидеть, что на самом деле канонические уравнения представляют собой особую форму записи общих уравнений. Действительно, двойное равенство (6.4) равносильно *системе двух линейных уравнений*

$$\frac{x-x_0}{l} - \frac{y-y_0}{m} = 0, \qquad \frac{x-x_0}{l} - \frac{z-z_0}{n} = 0, \tag{6.5}$$

которые представляют собой частный вид общих уравнений прямой в пространстве.

Самым сложным является переход от общих уравнений к каноническим или параметрическим.

Так как плоскости π_1 и π_2, соответствующие отдельным уравнениям из общих уравнений (6.1) прямой, не параллельны, то хотя бы один из *определителей второго порядка* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, представляющих собой координаты *векторного произведения* нормальных векторов этих плоскостей, не равен нулю. Предполагая, что первый из этих определителей является ненулевым: $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, изложим три способа перехода от общих уравнений к каноническим или параметрическим.

Первый способ состоит в том, что в системе (6.1) для z назначают два различных значения и по *формулам Крамера* находят два различных решения системы двух уравнений с двумя неизвестными x и y. Эти два решения системы (6.1) дают координаты двух разных точек M_1

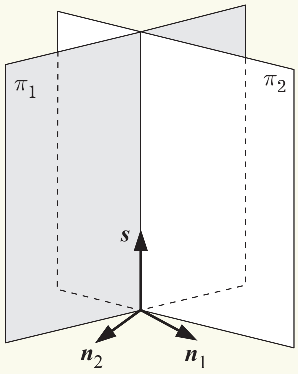


Рис. 6.3

и M_2 на прямой. А две известные точки прямой позволяют найти уравнение прямой, проходящей через две точки, которое фактически совпадает с каноническими уравнениями прямой.

Отметим, что в качестве направляющего вектора $\boldsymbol{s}$ прямой, заданной общими уравнениями (6.1), можно выбрать $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ — векторное произведение двух нормальных векторов плоскостей (рис. 6.3). Действительно, это векторное произведение является вектором, который ортогонален каждому нормальному вектору, а потому он параллелен как одной, так и другой плоскости, т.е. параллелен их линии пересечения. Нахождение одной точки на прямой и ее направляющего вектора можно рассматривать как второй способ перехода от общих уравнений прямой к ее каноническим уравнениям.

Пример 6.3. Найдем канонические уравнения прямой, совпадающей с линией пересечения плоскостей π_1: $x-y+z-2=0$, π_2: $x+y-z=0$.

Чтобы найти координаты некоторой точки на прямой, подставляем в уравнения плоскостей $z=0$ и решаем соответствующую систему двух линейных уравнений относительно x и y

$$\begin{cases} x-y=2,\\ x+y=0. \end{cases}$$

Значения $x=1$ и $y=-1$ единственного решения системы получаются сложением и вычитанием уравнений системы. Итак, точка с координатами $(1;-1;0)$ расположена на прямой.

В качестве направляющего вектора прямой берем векторное произведение $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1=\{1;-1;1\}$ и $\boldsymbol{n}_2=\{1;1;-1\}$ плоскостей π_1 и π_2. По формуле (3.2) для вычисления векторного произведения в координатах находим

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

т.е. направляющим вектором прямой будет $\boldsymbol{s}=\{0;2;2\}$. Найденный вектор $\boldsymbol{s}$ для простоты заменим коллинеарным ему вектором $\{0;1;1\}$.

Проведенные вычисления позволяют написать канонические уравнения искомой прямой

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}. \quad \#$$

Третий способ перехода от общих уравнений прямой к ее каноническим или параметрическим уравнениям состоит в следующем. Решаем систему (6.1) по *правилу Крамера* относительно неизвестных x и y, рассматривая неизвестное z как параметр:

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} C_1z+D_1 & B_1\\ C_2z+D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}=\frac{B_1}{\Delta}(C_2z+D_2)-\frac{B_2}{\Delta}(C_1z+D_1)=\alpha_1z+\beta_1,$$

$$y=-\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1z+D_1\\ A_2 & C_2z+D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}=\frac{A_2}{\Delta}(C_1z+D_1)-\frac{A_1}{\Delta}(C_2z+D_2)=\alpha_2z+\beta_2.$$

Обозначив z через t и добавив уравнение $z=t$, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=\alpha_1t+\beta_1,\\ y=\alpha_2t+\beta_2,\\ z=t. \end{cases}$$

6.2. Взаимное расположение прямой и плоскости

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве допускает три случая. Прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке. Они могут быть параллельны. Наконец, прямая может лежать в плоскости. Выяснение конкретной ситуации для прямой и плоскости зависит от способа их описания.

Предположим, что плоскость π задана общим уравнением $\pi\colon\ Ax+By+Cz+D=0$, а прямая L — каноническими уравнениями $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. Уравнения прямой дают координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на прямой и координаты направляющего вектора $\boldsymbol{s}=\{l;m;n\}$ этой прямой, а уравнение плоскости — координаты ее нормального вектора $\boldsymbol{n}=\{A;B;C\}$.

Если прямая L и плоскость π пересекаются, то направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ прямой не параллелен плоскости π. Значит, нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ плоскости не ортогонален вектору $\boldsymbol{s}$, т.е. их скалярное произведение не равно нулю. Через коэффициенты уравнений прямой и плоскости это условие записывается в виде неравенства $Al+Bm+Cn\ne 0$.

Если прямая и плоскость параллельны или прямая лежит в плоскости, то выполняется условие $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$, которое в координатах сводится к равенству $Al+Bm+Cn=0$. Чтобы разделить случаи „параллельны“ и „прямая принадлежит плоскости“, нужно проверить, принадлежит ли точка прямой данной плоскости.

Таким образом, все три случая взаимного расположения прямой и плоскости разделяются путем проверки соответствующих условий:

$$\begin{array}{lcl}
L \text{ принадлежит } \pi & \Leftrightarrow & \begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\\ Al+Bm+Cn=0;\end{cases}\\
L \text{ параллельна } \pi & \Leftrightarrow & \begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D\ne 0,\\ Al+Bm+Cn=0;\end{cases}\\
L \text{ пересекается с } \pi & \Leftrightarrow & Al+Bm+Cn\ne 0.
\end{array}$$

Если прямая L задана своими общими уравнениями:

$$L\colon\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

то проанализировать взаимное расположение прямой и плоскости π можно следующим образом. Из общих уравнений прямой и общего уравнения плоскости составим *систему трех линейных уравнений* с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ Ax+By+Cz+D=0.\end{cases} \tag{6.6}$$

Если эта система не имеет решений, то прямая параллельна плоскости. Если она имеет единственное решение, то прямая и плоскость пересекаются в единственной точке. Последнее равносильно тому, что *определитель системы* (6.6)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A & B & C\end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Наконец, если система (6.6) имеет бесконечно много решений, то прямая принадлежит плоскости.

Угол между прямой и плоскостью. Угол φ между прямой $L\colon\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $\pi\colon\ Ax+By+Cz+D=0$ находится в пределах от 0° (в случае параллельности) до

$90°$ (в случае перпендикулярности прямой и плоскости). Синус этого угла равен $|\cos\psi|$, где ψ — угол между направляющим вектором прямой $\boldsymbol{s}$ и нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ плоскости (рис. 6.4). Вычислив косинус угла между двумя векторами через их координаты (см. (2.16)), получим

$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Отсюда

$$\varphi = \arcsin\frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{6.7}$$

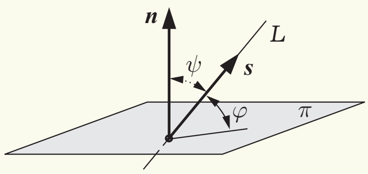


Рис. 6.4

Условие перпендикулярности прямой и плоскости эквивалентно тому, что нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой коллинеарны. Через координаты векторов это условие записывается в виде двойного равенства

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{6.8}$$

6.3. Взаимное расположение прямых

Для двух прямых в пространстве возможны четыре случая:
– прямые совпадают;
– прямые параллельны (но не совпадают);
– прямые пересекаются;
– прямые скрещиваются, т.е. не имеют общих точек и непараллельны.

Рассмотрим два способа описания прямых: *каноническими уравнениями* и *общими уравнениями*. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1\colon\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \qquad L_2\colon\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}. \tag{6.9}$$

Для каждой прямой из ее канонических уравнений сразу определяем точку на ней $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L_1$, $M_2(x_2; y_2; z_2) \in L_2$ и координаты направляющих векторов $\boldsymbol{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ для L_1, $\boldsymbol{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ для L_2.

Если прямые совпадают или параллельны, то их направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ коллинеарны, что равносильно равенству отношений координат этих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{6.10}$$

Если прямые совпадают, то направляющим векторам коллинеарен и вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{n_1}. \tag{6.11}$$

Это двойное равенство также означает, что точка M_2 принадлежит прямой L_1. Следовательно, условием совпадения прямых является выполнение равенств (6.10) и (6.11) одновременно.

Если прямые пересекаются или скрещиваются, то их направляющие векторы неколлинеарны, т.е. условие (6.10) нарушается. Пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и, следовательно, *векторы* $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ являются *компланарными.* Условие компланарности этих векторов можно записать через *смешанное произведение* как равенство нулю *определителя третьего порядка*, составленного из их координат (см. **3.2**):

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.12}$$

Условие (6.12) выполняется в трех случаях из четырех, поскольку при $\Delta \neq 0$ прямые не принадлежат одной плоскости и потому скрещиваются.

Сведем все условия воедино:

L_1 и L_2 совпадают $\Leftrightarrow$ выполнены условия (6.10) и (6.11);
L_1 и L_2 параллельны, но $L_1 \neq L_2$ $\Leftrightarrow$ выполнено (6.10), нарушено (6.11);
L_1 и L_2 пересекаются $\Leftrightarrow$ выполнено (6.12), нарушено (6.10);
L_1 и L_2 скрещиваются $\Leftrightarrow$ нарушено (6.12).

Если две прямые заданы общими уравнениями

$$L_1\colon \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad L_2\colon \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \end{cases}$$

то мы можем рассмотреть систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Взаимное расположение прямых характеризуется количеством решений у системы (6.13). Если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений. Если прямые пересекаются, то эта система имеет единственное решение. В случае параллельных или скрещивающихся прямых решений нет. Последние два случая можно разделить, если найти направляющие векторы прямых. Для этого достаточно вычислить два *векторных произведения* $\boldsymbol{n}_1{\times}\boldsymbol{n}_2$ и $\boldsymbol{n}_3{\times}\boldsymbol{n}_4$, где $\boldsymbol{n}_i = \{A_i; B_i; C_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Если полученные векторы коллинеарны, то данные прямые параллельны. Иначе они скрещивающиеся.

Пример 6.4. Исследуем взаимное расположение прямых

$$L_1\colon\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}, \qquad L_2\colon \begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ x + y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Направляющий вектор $\boldsymbol{s}_1$ прямой L_1 находим по каноническим уравнениям этой прямой: $\boldsymbol{s}_1 = \{1; 3; -2\}$. Направляющий вектор $\boldsymbol{s}_2$ прямой L_2 вычисляем с помощью векторного произведения нормальных векторов плоскостей, пересечением которых она является:

$$\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{n}_1{\times}\boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Поскольку $\boldsymbol{s}_1 = -\boldsymbol{s}_2$, то прямые параллельны или совпадают. Выясним, какая из этих ситуаций реализуется для данных прямых. Для этого подставим координаты точки $M_0(1; 2; -1) \in L_1$ в общие уравнения прямой L_2. Для первого из них получаем $1 = 0$. Следовательно, точка M_0 не принадлежит прямой L_2 и рассматриваемые прямые параллельны.

Угол между прямыми. Угол между двумя прямыми можно найти, используя *направляющие векторы* прямых. Острый угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами (рис. 6.5) или является дополнительным к нему, если угол между направляющими векторами тупой. Таким образом, если для прямых L_1 и L_2 известны их направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$, то острый угол φ между этими прямыми определяется через скалярное произведение:

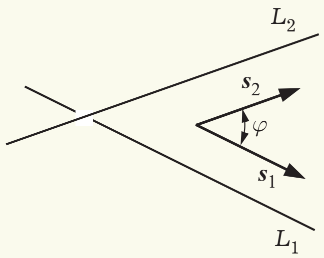


Рис. 6.5

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|}.$$

Например, пусть $\boldsymbol{s}_i = \{l_i; m_i; n_i\}$, $i = 1, 2$. Используя формулы (2.9) и (2.14) для вычисления *длины вектора* и скалярного произведения в координатах, получаем

$$\cos\varphi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

6.4. Расстояние до прямой

Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямой L, *заданной каноническими уравнениями* L: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, может быть вычислено при помощи *векторного произведения*. Действительно, канонические уравнения прямой дают нам точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой и *направляющий вектор* $\boldsymbol{s} = \{l; m; n\}$ этой прямой. Построим параллелограмм на векторах $\boldsymbol{s}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$. Тогда расстояние от точки M_1 до прямой L будет равно высоте h параллелограмма (рис. 6.6). Значит, нужное расстояние может быть вычислено по формуле

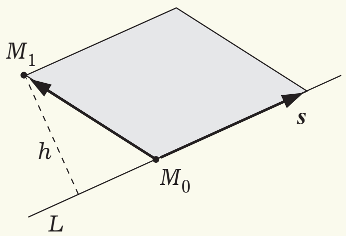


Рис. 6.6

$$\rho(M_1, L) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|},$$

где числитель представляет собой площадь этого параллелограмма. Используя формулы вычисления *длины вектора* и векторного произведения векторов через их координаты, получаем

$$\rho(M_1, L) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (6.14)$$

Расстояние между прямыми. Если прямые пересекаются, то очевидно, что расстояние между ними равно нулю. Случай совпадающих прямых также малосодержателен. Поэтому о расстоянии между прямыми имеет смысл говорить, только если они параллельны или скрещиваются. Два указанных случая с точки зрения вычислений заметно расходятся.

Чтобы найти расстояние между параллельными прямыми, достаточно вычислить расстояние от произвольной точки, например, второй прямой до первой прямой, т.е. можно воспользоваться формулой (6.14). Таким образом, если две параллельные прямые заданы каноническими уравнениями

$$L_1\colon\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \qquad L_2\colon\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

то расстояние между ними вычисляется по формуле

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми можно находить, используя *смешанное произведение*. Пусть, как и выше, прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями. Так как они скрещиваются, их направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ и вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точки на прямых, некомпланарны. Поэтому на них можно построить параллелепипед (рис. 6.7). Тогда расстояние между прямыми равно высоте h этого параллелепипеда. В свою очередь, высоту параллелепипеда можно вычислить как отношение объема параллелепипеда к площади его основания. Объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения трех указанных векторов, а площадь параллелограмма в основании параллелепипеда равна модулю векторного произведения направляющих векторов прямых. В результате получаем формулу для расстояния $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми:

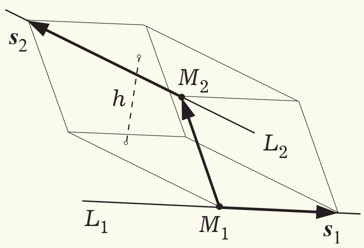


Рис. 6.7

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}.$$

Записывая смешанное и векторное произведения в координатах, окончательно получаем

$$\rho(L_1, L_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.$$

Лекция 7

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА — I

Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Вывод их канонических уравнений. Исследование формы кривых второго порядка. Параметры кривых второго порядка (полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет). Оптическое свойство. Смещенные кривые второго порядка. Исследование неполного уравнения кривой второго порядка.

Кривая второго порядка на плоскости в *прямоугольной системе координат* описывается уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{7.1}$$

в котором коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль.

Здесь мы не ставим себе задачу выявить все кривые, которые могут быть представлены уравнением второй степени, т.е. мы не будем проводить их полную классификацию. Это удобно выполнять при помощи методов линейной алгебры. Здесь же мы опишем известные кривые второго порядка и их свойства, а также покажем, как можно упростить некоторые частные виды уравнения второго порядка при помощи преобразования *параллельного переноса системы координат* и определить вид кривой и ее характеристики.

7.1. Эллипс

Определение 7.1. Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть заданная постоянная величина, называют ***эллипсом***.

Определение эллипса дает следующий способ его геометрического построения. Фиксируем на плоскости две точки F_1 и F_2, а неотрицательную постоянную величину обозначим через $2a$. Пусть расстояние между точками F_1 и F_2 равно $2c$. Представим себе, что нерастяжимая нить длиной $2a$ закреплена в точках F_1 и F_2, например, при помощи двух иголок. Ясно, что это возможно лишь при $a \geqslant c$. Натянув нить карандашом, начертим линию, которая и будет эллипсом (рис. 7.1).

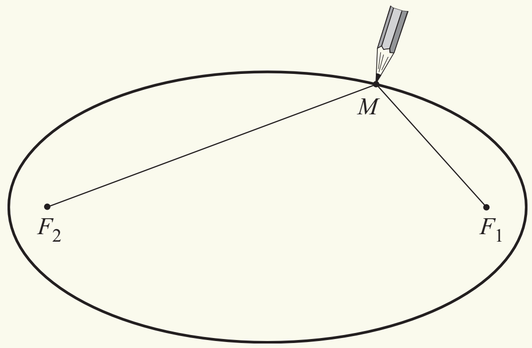


Рис. 7.1

Итак, описываемое множество не пусто, если $a \geqslant c$. При $a = c$ эллипс представляет собой отрезок с концами F_1 и F_2, а при $c = 0$, т.е. если указанные в определении эллипса фиксированные точки совпадают, он является окружностью радиуса a. Отбрасывая эти вырожденные случаи, будем далее предполать, как правило, что $a > c > 0$.

Фиксированные точки F_1 и F_2 в определении 7.1 эллипса (см. рис. 7.1) называют ***фокусами эллипса***, расстояние между ними, обозначенное через $2c$, — ***фокальным расстоянием***, а отрезки F_1M и F_2M, соединяющие произвольную точку M на эллипсе с его фокусами, — ***фокальными радиусами***.

Вид эллипса полностью определяется фокальным расстоянием $|F_1F_2| = 2c$ и параметром a, а его положение на плоскости — парой точек F_1 и F_2.

Из определения эллипса следует, что он симметричен относительно прямой, проходящей через фокусы F_1 и F_2, а также относительно прямой, которая делит отрезок F_1F_2 пополам и перпендикулярна ему (рис. 7.2, *а*). Эти прямые называют ***осями эллипса***. Точка O их пересечения является центром симметрии эллипса, и ее называют ***центром эллипса***, а точки пересечения эллипса с осями симметрии (точки A, B, C и D на рис. 7.2, *а*) — ***вершинами эллипса***.

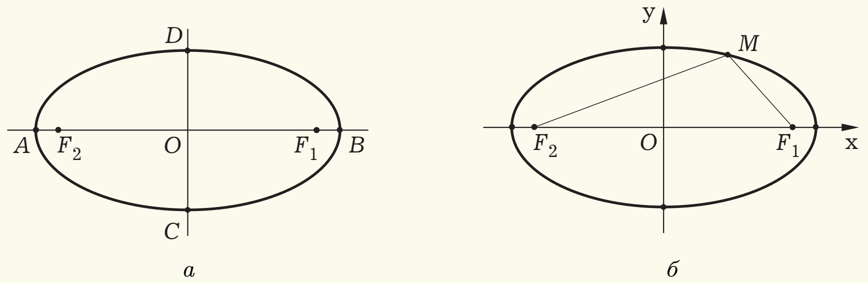


Рис. 7.2

Число a называют ***большой полуосью эллипса***, а $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ — его ***малой полуосью***. Нетрудно заметить, что при $c > 0$ большая полуось a равна расстоянию от центра эллипса до тех его вершин, которые находятся на одной оси с фокусами эллипса (вершины A и B на рис. 7.2, *а*), а малая полуось b равна расстоянию от центра эллипса до двух других его вершин (вершины C и D на рис. 7.2, *а*).

Уравнение эллипса. Рассмотрим на плоскости некоторый эллипс с фокусами в точках F_1 и F_2, большой осью $2a$. Пусть $2c$ — фокальное расстояние, $2c = |F_1F_2| < 2a$. Согласно определению 7.1 эллипса, его образуют те точки M, для которых $|F_1M| + |F_2M| = 2a$.

Выберем прямоугольную систему координат Oxy на плоскости так, чтобы ее начало совпало с центром эллипса, а фокусы находились на *оси абсцисс* (рис. 7.2, *б*). Такую систему координат называют ***канонической*** для рассматриваемого эллипса, а соответствующие переменные — ***каноническими***.

В выбранной системе координат фокусы имеют *координаты* $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. Используя формулу расстояния между точками, запишем условие $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ в координатах:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \qquad (7.2)$$

Это уравнение неудобно, так как в нем присутствуют два квадратных радикала. Поэтому преобразуем его. Перенесем в уравнении (7.2) второй радикал в правую часть и возведем в квадрат:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \varepsilon x, \qquad (7.3)$$

где $\varepsilon = c/a$. Повторяем операцию возведения в квадрат, чтобы убрать и второй радикал: $(x+c)^2+y^2 = a^2+2\varepsilon ax+\varepsilon^2x^2$, или, учитывая значение введенного параметра ε, $(a^2-c^2)\dfrac{x^2}{a^2}+y^2 = a^2-c^2$. Так как $a^2 - c^2 = b^2 > 0$, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0. \qquad (7.4)$$

Уравнению (7.4) удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на эллипсе. Но при выводе этого уравнения использовались неэквивалентные преобразования исходного уравнения (7.2) — два возведения в квадрат, убирающие квадратные радикалы. Возведение уравнения в квадрат является эквивалентным преобразованием, если в обеих его частях стоят величины с одинаковым знаком, но мы этого в своих преобразованиях не проверяли.

Мы можем не проверять эквивалентность преобразований, если учтем следующее. Пара точек F_1 и F_2, $|F_1F_2| = 2c$, на плоскости определяет семейство эллипсов с фокусами в этих точках. Каждая точка плоскости, кроме точек отрезка F_1F_2, принадлежит какому-нибудь эллипсу указанного семейства. При этом никакие два эллипса не пересекаются, так как сумма фокальных радиусов однозначно определяет конкретный эллипс. Итак, описанное семейство эллипсов без пересечений покрывает всю плоскость, кроме точек отрезка F_1F_2. Рассмотрим множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (7.4) с данным значением параметра a. Может ли это множество распределяться между несколькими эллипсами? Часть точек множества принадлежит эллипсу с большой полуосью a. Пусть в этом множестве есть точка, лежащая на эллипсе с большой полуосью $\widetilde{a}$. Тогда координаты этой точки подчиняются уравнению

$$\frac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \frac{y^2}{\widetilde{b}^2} = 1, \qquad \widetilde{b}^2 = \widetilde{a}^2 - c^2, \tag{7.5}$$

т.е. уравнения (7.4) и (7.5) имеют общие решения. Однако легко убедиться, что система

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \frac{y^2}{\widetilde{a}^2 - c^2} = 1$$

при $\widetilde{a} \neq a$ решений не имеет. Для этого достаточно исключить, например, x из первого уравнения:

$$y^2\left(\frac{1}{a^2 - c^2} - \frac{\widetilde{a}^2}{(\widetilde{a}^2 - c^2)a^2}\right) = 1 - \frac{\widetilde{a}^2}{a^2},$$

что после преобразований приводит к уравнению

$$\frac{y^2c^2(\widetilde{a}^2 - a^2)}{(a^2 - c^2)(\widetilde{a}^2 - c^2)} = -(\widetilde{a}^2 - a^2),$$

не имеющему решений при $\widetilde{a} \neq a$, поскольку $(a^2 - c^2)(\widetilde{a}^2 - c^2) = b^2\widetilde{b}^2 > 0$. Итак, (7.4) есть уравнение эллипса с большой полуосью $a > 0$ и малой полуосью $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$. Его называют ***каноническим уравнением эллипса***.

Вид эллипса. Рассмотренный выше геометрический способ построения эллипса дает достаточное представление о внешнем виде эллипса. Но вид эллипса можно исследовать и с помощью его канонического уравнения (7.4). Например, можно, считая $y \geqslant 0$, выразить y через x: $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, и, исследовав эту функцию, построить ее график. Есть еще один способ построения эллипса. Окружность радиуса a с центром в начале канонической системы координат эллипса (7.4) описывается уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. Если ее сжать с коэффициентом $a/b > 1$ вдоль *оси ординат*, то получится кривая, которая описывается уравнением $x^2 + (ya/b)^2 = a^2$, т.е. эллипс.

Замечание 7.1. Если ту же окружность сжать с коэффициентом $a/b < 1$ вдоль оси ординат, т.е. фактически растянуть в этом направлении, то получится кривая, которая описывается уравнением (7.4), в котором $a < b$. Это тоже эллипс, но в системе координат Oxy (рис. 7.3) его фокусы расположены на вертикальной оси симметрии. Каноническую систему координат для этого эллипса можно получить в результате *поворота* системы Oxy на $90°$, что соответствует замене переменных $x' = y$, $y' = -x$.

Эксцентриситет эллипса. Отношение фокального расстояния эллипса к его большой оси называют ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначают через ε. Для эллипса, заданного

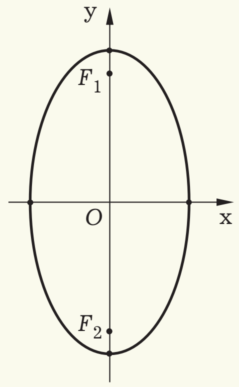


Рис. 7.3

каноническим уравнением (7.4), $\varepsilon = 2c/2a = c/a$. Если же в (7.4) параметры a и b связаны неравенством $a < b$, то фокусы расположены на вертикальной оси симметрии эллипса, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = 2c/2b = c/b$.

При $c = 0$, когда эллипс превращается в окружность, и $\varepsilon = 0$. В остальных случаях $0 < \varepsilon < 1$. Если зафиксировать фокусы эллипса и менять его форму, устремляя эксцентриситет к единице, то в пределе получим отрезок, соединяющий фокусы, который можно назвать вырожденным эллипсом с $a = c$ и $b = 0$. Если же, наоборот, зафиксировать параметр a и устремить ε к нулю, то в пределе мы получим окружность радиуса a. Эта предельная ситуация соответствует равенству параметров a и b уравнения (7.4).

Уравнение (7.3) эквивалентно уравнению (7.4), поскольку эквивалентны уравнения (7.4) и (7.2). Поэтому уравнением эллипса является и (7.3). Кроме того, соотношение (7.3) интересно тем, что дает простую, не содержащую радикалов, формулу для длины $|F_2M|$ одного из фокальных радиусов точки $M(x;y)$ эллипса: $|F_2M| = a + \varepsilon x$.

Аналогичная формула для второго фокального радиуса может быть получена из соображений симметрии либо повторением выкладок, в которых перед возведением в квадрат уравнения (7.2) в правую часть переносится первый радикал, а не второй. Итак, для любой точки $M(x;y)$ на эллипсе (см. рис. 7.2)

$$|F_1M| = a - \varepsilon x, \quad |F_2M| = a + \varepsilon x, \tag{7.6}$$

и каждое из этих уравнений является уравнением эллипса.

Пример 7.1. Найдем каноническое уравнение эллипса с большой полуосью 5 и эксцентриситетом 0,8 и построим его.

Зная большую полуось эллипса $a = 5$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$, найдем его малую полуось b. Поскольку $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, а $c = \varepsilon a = 4$, то $b = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Значит каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$. Для построения эллипса удобно изобразить прямоугольник с центром в начале канонической системы координат, стороны которого параллельны осям симметрии эллипса и равны его соответствующим осям (рис. 7.4). Этот прямоугольник пересекается с

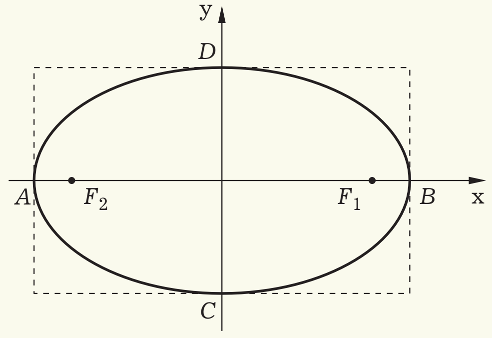


Рис. 7.4

осями эллипса в его вершинах $A(-5;0)$, $B(5;0)$, $C(0;-3)$, $D(0;3)$, причем сам эллипс вписан в него. На рис. 7.4 указаны также фокусы $F_{1,2}(\pm 4;0)$ эллипса.

Геометрические свойства эллипса. Перепишем первое уравнение в (7.6) в виде $|F_1M| = (a/\varepsilon - x)\varepsilon$. Отметим, что величина $a/\varepsilon - x$ при $a > c$ положительна, так как фокус F_1 не принадлежит эллипсу. Эта величина представляет собой расстояние до вертикальной прямой d: $x = a/\varepsilon$ от точки $M(x;y)$, лежащей левее этой прямой. Уравнение эллипса можно записать в виде

$$\frac{|F_1M|}{a/\varepsilon - x} = \varepsilon.$$

Оно означает, что этот эллипс состоит из тех точек $M(x;y)$ плоскости, для которых отношение длины фокального радиуса F_1M к расстоянию до прямой d есть величина постоянная, равная ε (рис. 7.5).

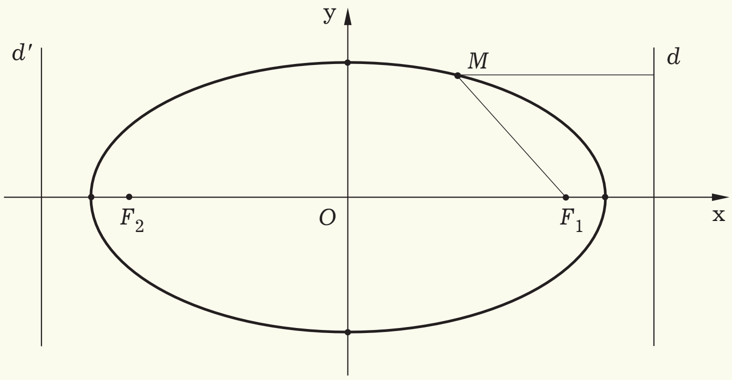


Рис. 7.5

У прямой d есть „двойник“ — вертикальная прямая d', симметричная d относительно центра эллипса, которая задается уравнением $x = -a/\varepsilon$. Относительно d' эллипс описывается так же, как и относительно d. Обе прямые d и d' называют ***директрисами эллипса***. Директрисы эллипса перпендикулярны той оси симметрии эллипса, на которой расположены его фокусы, и отстоят от центра эллипса на расстояние $a/\varepsilon = a^2/c$ (см. рис. 7.5).

Расстояние p от директрисы до ближайшего к ней фокуса называют ***фокальным параметром эллипса***. Этот параметр равен

$$p = \frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

Эллипс обладает еще одним важным геометрическим свойством: фокальные радиусы F_1M и F_2M составляют с касательной к эллипсу в точке M равные углы (рис. 7.6).

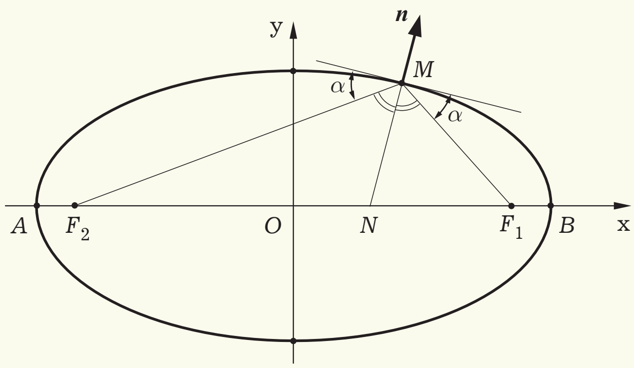


Рис. 7.6

Это свойство имеет наглядный физический смысл. Если в фокусе F_1 расположить источник света, то луч, выходящий из этого фокуса, после отражения от эллипса пойдет по второму фокальному радиусу, так как после отражения он будет находиться под тем же углом к кривой, что и до отражения. Таким образом, все лучи, выходящие из фокуса F_1, сконцентрируются во втором фокусе F_2, и наоборот. Исходя из данной интерпретации указанное свойство называют ***оптическим свойством эллипса***.

7.2. Гипербола

Определение 7.2. Геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют ***гиперболой***.

Замечание 7.2. Говоря о разности расстояний, подразумевают, что из большего расстояния вычитается меньшее. Это значит, что на самом деле для гиперболы постоянным является модуль разности расстояний от любой ее точки до двух фиксированных точек. #

Определение гиперболы аналогично определению *эллипса*. Различие между ними лишь в том, что для гиперболы постоянна разность расстояний до фиксированных точек, а для эллипса — сумма тех же расстояний. Поэтому естественно, что у этих кривых много общего как в свойствах, так и в используемой терминологии.

Фиксированные точки в определении гиперболы (обозначим их F_1 и F_2) называют ***фокусами гиперболы***. Расстояние между ними (обозначим его $2c$) называют ***фокальным расстоянием***, а отрезки F_1M и F_2M, соединяющие произвольную точку M на гиперболе с ее фокусами, — ***фокальными радиусами***.

Вид гиперболы полностью определяется фокальным расстоянием $|F_1F_2| = 2c$ и значением постоянной величины $2a$, равной разности фокальных радиусов, а ее положение на плоскости — положением фокусов F_1 и F_2.

Из определения гиперболы следует, что она, как и эллипс, симметрична относительно прямой, проходящей через фокусы, а также относительно прямой, которая делит отрезок F_1F_2 пополам и перпендикулярна ему (рис. 7.7). Первую из этих осей симметрии называют ***действительной осью гиперболы***, а вторую — ее ***мнимой осью***. Постоянную величину a, участвующую в определении гиперболы, называют ***действительной полуосью гиперболы***.

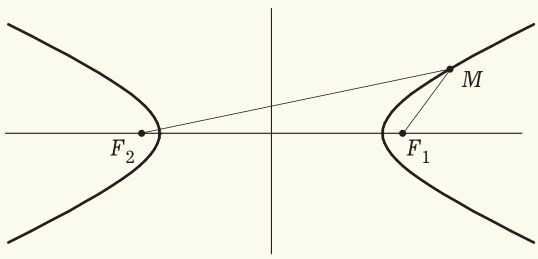


Рис. 7.7

Середина отрезка F_1F_2, соединяющего фокусы гиперболы, лежит на пересечении ее осей симметрии и поэтому является центром симметрии гиперболы, который называют просто ***центром гиперболы***.

Для гиперболы действительная ось $2a$ должна быть не больше, чем фокальное расстояние $2c$, так как для треугольника F_1MF_2 (см. рис. 7.7) справедливо неравенство $\bigl||F_1M| - |F_2M|\bigr| \leqslant |F_1F_2|$. Равенство $a = c$ выполнено только для тех точек M, которые лежат на действительной оси симметрии гиперболы вне интервала F_1F_2. Отбрасывая этот вырожденный случай, далее будем предполагать, что $a < c$. Отметим также, что случай $a = 0$ соответствует геометрическому месту точек, равноудаленных от фиксированных точек F_1 и F_2. Как известно из курса школьной геометрии, это геометрическое место представляет собой прямую, перпендикулярную отрезку F_1F_2 и проходящую через его середину. Этот случай мы также не будем рассматривать.

Уравнение гиперболы. Рассмотрим на плоскости некоторую гиперболу с фокусами в точках F_1 и F_2 и действительной осью $2a$. Пусть $2c$ — фокальное расстояние, $2c = |F_1F_2| > 2a$.

Согласно замечанию 7.2, гипербола состоит из тех точек $M(x;y)$, для которых $\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a$. Выберем *прямоугольную систему координат* Oxy так, чтобы центр гиперболы находился в *начале координат*, а фокусы располагались на *оси абсцисс* (рис. 7.8). Такую систему координат для рассматриваемой гиперболы называют ***канонической***, а соответствующие переменные — ***каноническими***.

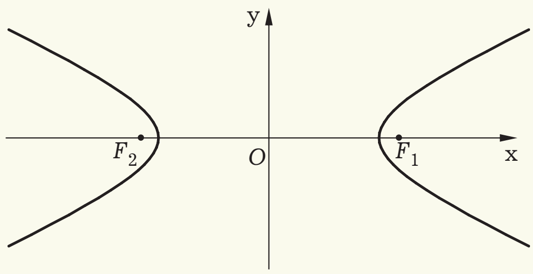


Рис. 7.8

В канонической системе координат фокусы гиперболы имеют *координаты* $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$. Используя формулу расстояния между двумя точками, запишем условие $\big||F_1M|-|F_2M|\big| = 2a$ в координатах $\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$, где $(x;y)$ — координаты точки M. Чтобы упростить это уравнение, избавимся от знака модуля: $\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$, перенесем второй радикал в правую часть и возведем в квадрат: $(x-c)^2+y^2 = (x+c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 4a^2$. После упрощения получим $-\varepsilon x - a = \pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = |\varepsilon x + a|, \tag{7.7}$$

где $\varepsilon = c/a$. Возведем в квадрат вторично и снова приведем подобные члены: $(\varepsilon^2-1)x^2 - y^2 = c^2 - a^2$ или, учитывая равенство $\varepsilon = c/a$ и полагая $b^2 = c^2 - a^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.8}$$

Величину $b > 0$ называют ***мнимой полуосью гиперболы***.

Итак, мы установили, что любая точка на гиперболе с фокусами $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ и действительной полуосью a удовлетворяет уравнению (7.8). Но надо также показать, что координаты точек вне гиперболы этому уравнению не удовлетворяют. Для этого мы рассмотрим семейство всех гипербол с данными фокусами F_1 и F_2. У этого семейства гипербол оси симметрии являются общими. Из геометрических соображений ясно, что каждая точка плоскости (кроме точек, лежащих на действительной оси симметрии вне интервала F_1F_2, и точек, лежащих на мнимой оси симметрии) принадлежит некоторой гиперболе семейства, причем только одной, так как разность расстояний от точки до фокусов F_1 и F_2 меняется от гиперболы к гиперболе. Пусть координаты точки $M(x;y)$ удовлетворяют уравнению (7.8), а сама точка принадлежит гиперболе семейства с некоторым значением $\widetilde{a}$ действительной полуоси. Тогда, как мы доказали, ее координаты удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2} - \dfrac{y^2}{\widetilde{b}^2} = 1$, $\widetilde{b}^2 = c^2 - \widetilde{a}^2$. Следовательно, система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2} - \dfrac{y^2}{c^2-\widetilde{a}^2} = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $\widetilde{a} \neq a$ это невозможно. Действительно, исключив, например, x из первого уравнения:

$$y^2\left(\frac{\widetilde{a}^2}{(c^2-\widetilde{a}^2)a^2}-\frac{1}{c^2-a^2}\right)=1-\frac{\widetilde{a}^2}{a^2}$$

после преобразований получаем уравнение

$$\frac{y^2c^2(\widetilde{a}^2-a^2)}{(c^2-a^2)(c^2-\widetilde{a}^2)}=-(\widetilde{a}^2-a^2),$$

которое при $\widetilde{a} \neq a$ не имеет решений, так как $(c^2-a^2)(c^2-\widetilde{a}^2)=b^2\widetilde{b}^2>0$. Итак, (7.8) есть уравнение гиперболы с действительной полуосью $a>0$ и мнимой полуосью $b=\sqrt{c^2-a^2}>0$. Его называют ***каноническим уравнением гиперболы***.

Вид гиперболы. По своему виду гипербола (7.8) заметно отличается от эллипса. Учитывая наличие двух осей симметрии у гиперболы, достаточно построить ту ее часть, которая находится в первой четверти канонической системы координат. В первой четверти, т.е. при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, каноническое уравнение гиперболы однозначно разрешается относительно y:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{7.9}$$

Исследование этой функции $y(x)$ дает следующие результаты.

Область определения функции — $\{x\colon x \geqslant a\}$ и в этой области определения она непрерывна как сложная функция, причем в точке $x=a$ она непрерывна справа. Единственным нулем функции является точка $x=a$.

Найдем производную функции $y(x)$: $y'(x)=\dfrac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$. Отсюда заключаем, что при $x>a$ функция монотонно возрастает. Кроме того, $\lim\limits_{x\to a+0} y'(x)=+\infty$, а это означает, что в точке $x=a$ пересечения графика функции с осью абсцисс существует вертикальная касательная. Функция $y(x)$ имеет вторую производную $y''=-ab(x^2-a^2)^{-3/2}$ при $x>a$, и эта производная отрицательна. Поэтому график функции является выпуклым вверх, а точек перегиба нет.

Указанная функция имеет наклонную асимптоту, это вытекает из существования двух пределов:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\bigl(y(x)-kx\bigr)=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Наклонная асимптота описывается уравнением $y=(b/a)x$.

Проведенное исследование функции (7.9) позволяет построить ее график (рис. 7.9), который совпадает с частью гиперболы (7.8), содержащейся в первой четверти.

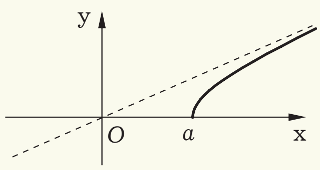


Рис. 7.9

Так как гипербола симметрична относительно своих осей, вся кривая имеет вид, изображенный на рис. 7.10. Гипербола состоит из двух симметричных ветвей, расположенных по разные

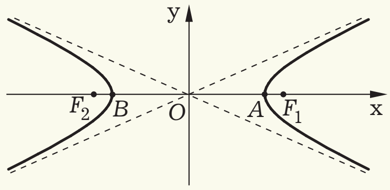


Рис. 7.10

стороны от ее мнимой оси симметрии. Эти ветви не ограничены с обеих сторон, причем прямые $y = \pm(b/a)x$ являются одновременно асимптотами и правой и левой ветвей гиперболы.

Оси симметрии гиперболы различаются тем, что действительная пересекает гиперболу, а мнимая, будучи геометрическим местом точек, равноудаленных от фокусов, — не пересекает (поэтому ее и называют мнимой). Две точки пересечения действительной оси симметрии с гиперболой называют ***вершинами гиперболы*** (точки $A(a;0)$ и $B(-a;0)$ на рис. 7.10).

Построение гиперболы по ее действительной ($2a$) и мнимой ($2b$) осям следует начинать с прямоугольника с центром в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными, соответственно, действительной и мнимой осям симметрии гиперболы (рис. 7.11). Асимптоты гиперболы являются продолжениями диагоналей этого прямоугольника, а вершины гиперболы — точками пересечения сторон прямоугольника с действительной осью симметрии. Отметим, что прямоугольник и его положение на плоскости однозначно определяют форму и положение гиперболы. Отношение b/a сторон прямоугольника определяет степень сжатости гиперболы, но вместо этого параметра обычно используют эксцентриситет гиперболы. ***Эксцентриситетом гиперболы*** называют отношение ее фокального расстояния к действительной оси. Эксцентриситет обозначают через ε. Для гиперболы, описываемой уравнением (7.8), $\varepsilon = c/a$. Отметим, что если *эксцентриситет эллипса* может принимать значения из полуинтервала $[0, 1)$ (значение 0 соответствует предельному варианту эллипса — окружности), то эксцентриситет гиперболы всегда попадает в интервал $(1, +\infty)$.

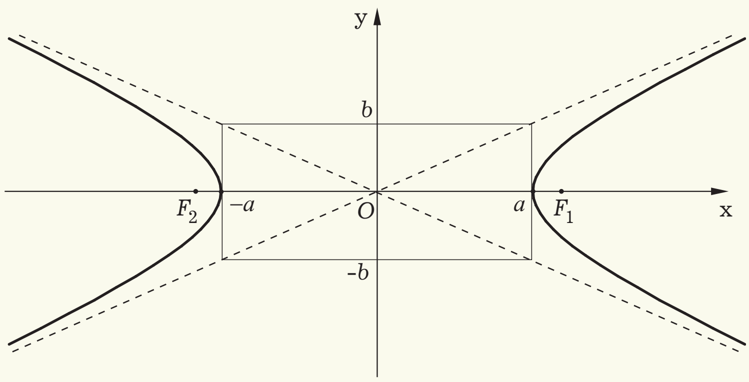


Рис. 7.11

Построим прямоугольник с центром в начале системы координат Oxy и сторонами $2a$, $2b$, параллельными осям абсцисс и ординат соответственно. Проведем прямые $y = (b/a)x$ и $y = -(b/a)x$, на которых лежат диагонали прямоугольника. Существует две гиперболы, соответствующие построенному прямоугольнику (рис. 7.12). Первая из них описывается каноническим уравнением (7.8), а вторая — уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \qquad (7.10)$$

Вторую гиперболу называют ***сопряженной*** по отношению к первой, а уравнение (7.10) — ***каноническим уравнением сопряженной гиперболы***. Действительная и мнимая оси первой гиперболы являются соответственно мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы, а асимптоты у них общие.

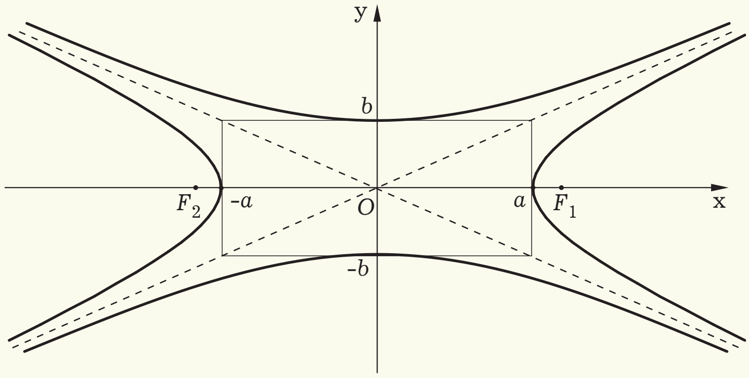


Рис. 7.12

Пример 7.2. Найдем каноническое уравнение гиперболы по ее действительной полуоси $a = 4$ и фокальному расстоянию $2c = 10$. Построим гиперболу и определим координаты ее вершин, фокусов и уравнения асимптот.

Так как действительная полуось a гиперболы известна, то, чтобы найти каноническое уравнение гиперболы, достаточно определить мнимую полуось b. Поскольку $c = 5$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, то $b = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Итак, искомое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$. Построим прямоугольник, соответствующий заданной гиперболе (рис. 7.13). Продолжим его диагонали до асимптот гиперболы и построим саму гиперболу. Уравнениями асимптот являются $y = \pm 3x/4$, вершины находятся в точках $(\pm 4; 0)$, а фокусы совпадают с точками $(\pm 5; 0)$.

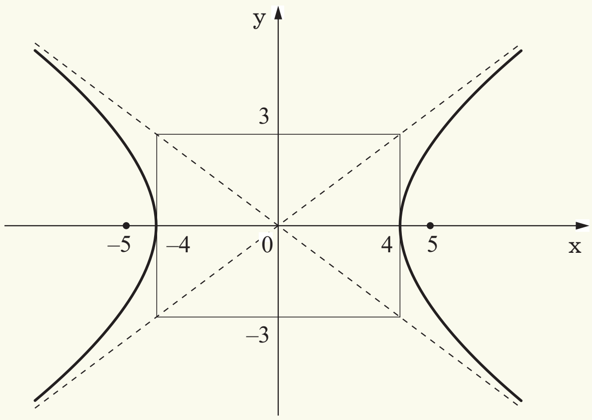


Рис. 7.13

Геометрические свойства. Геометрические свойства гиперболы во многом повторяют свойства эллипса. Вернемся к формуле (7.7). Она эквивалентна каноническому уравнению гиперболы и дает выражение для длины фокального радиуса F_2M ее точки $M(x; y)$:

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm(\varepsilon x + a), \tag{7.11}$$

где знак плюс соответствует правой ветви гиперболы, а знак минус — левой.

Аналогично можно получить формулу для длины другого фокального радиуса, если при выводе канонического уравнения гиперболы перед первым возведением в квадрат в правую часть равенства перенести не второй, а первый квадратный радикал. При этом вместо (7.7) получим $\varepsilon x - a = \pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, откуда

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm(\varepsilon x - a), \tag{7.12}$$

где, как и в (7.11), знак плюс соответствует правой ветви гиперболы, а знак минус — левой. Каждое из уравнений (7.11), (7.12) является уравнением гиперболы.

Гипербола не проходит через свои фокусы (при $0 < a < c$). Поэтому фокальные радиусы любой ее точки M имеют ненулевую длину, т.е. $|F_1M| \neq 0$ и $|F_2M| \neq 0$. Но тогда в (7.11) и (7.12) правые части тоже отличны от нуля, и эти уравнения гиперболы можно переписать в следующем виде:

$$\frac{|F_2M|}{|x+a/\varepsilon|} = \varepsilon, \qquad \frac{|F_1M|}{|x-a/\varepsilon|} = \varepsilon. \tag{7.13}$$

Рассмотрим прямую d': $x = -a/\varepsilon$ (рис. 7.14). Выражение $|x + a/\varepsilon|$ представляет собой расстояние от точки $M(x; y)$ до прямой d'. Аналогично выражение $\pm(x - a/\varepsilon)$ равно расстоянию $|x - a/\varepsilon|$ от точки M гиперболы до прямой d: $x = a/\varepsilon$. Поэтому из уравнений (7.13) следует, что гипербола состоит из таких точек, для которых отношение расстояния до фокуса F_2 (фокуса F_1) к расстоянию до прямой d' (прямой d) есть величина постоянная, равная ее эксцентриситету ε. Эти две прямые d и d' называют ***директрисами гиперболы***.

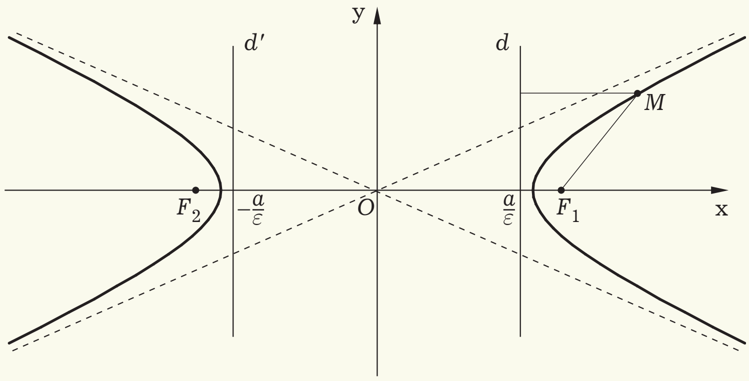


Рис. 7.14

Геометрически директрисы определяются как прямые, перпендикулярные действительной оси симметрии гиперболы и удаленные от ее центра на расстояние, равное отношению действительной полуоси к эксцентриситету.

Расстояние p от директрисы гиперболы до ближайшего к директрисе фокуса, как и у эллипса, называют ***фокальным параметром гиперболы***. Отметим, что

$$p = c - \frac{a}{\varepsilon} = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

Гипербола также имеет и ***оптическое свойство***, аналогичное *оптическому свойству эллипса*. Оно состоит в том, что лучи, вышедшие из одного фокуса, после отражения от ближайшей ветви гиперболы распространяются так, будто вышли из другого фокуса (рис. 7.15).

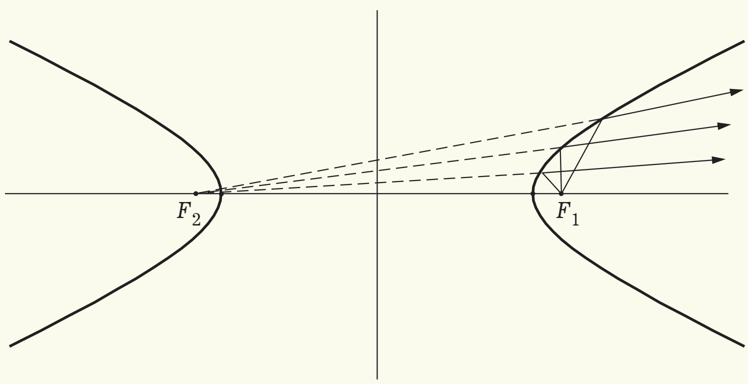


Рис. 7.15

Лекция 8
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА — II

8.1. Гипербола, приведенная к асимптотам

Если у гиперболы совпадают действительная и мнимая полуоси, т.е. $a = b$, то угол между асимптотами равен $2\operatorname{arctg}(b/a) = 2\operatorname{arctg} 1 = \pi/2$, т.е. является прямым. Такую гиперболу называют ***равнобочной***. Для нее кроме канонической системы координат, в которой *оси координат* совпадают с осями симметрии гиперболы, рассматривают также и другую, осями которой являются асимптоты. Выведем уравнение гиперболы в этой системе координат, которую обозначим Oxy. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ — ее *репер*, а $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$ — репер канонической системы координат Ox$'$y$'$ (рис. 8.1).

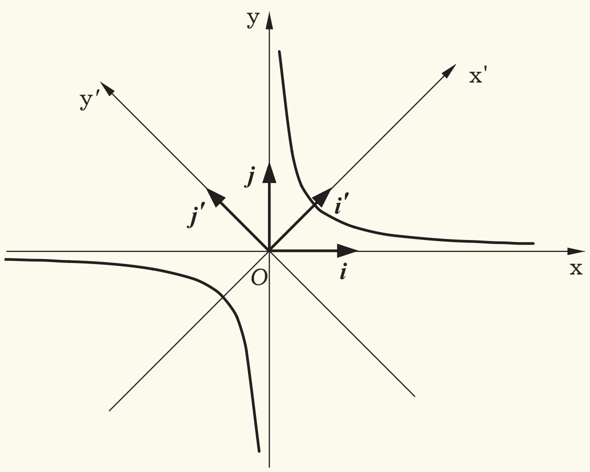


Рис. 8.1

Каноническая система координат повернута относительно системы Oxy на угол $\pi/4$. Поэтому (см. **4.2**) $\boldsymbol{i}' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$. Значит, координаты x', y' канонической системы координат выражаются через координаты x, y с теми же коэффициентами: $x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$, $y' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$.

Уравнение равнобочной гиперболы в канонической системе координат имеет вид $(x')^2 - (y')^2 = a^2$, где a — действительная (она же мнимая) полуось гиперболы. Заменив в этом уравнении канонические переменные на x, y, получим $\dfrac{1}{2}(x+y)^2 - \dfrac{1}{2}(x-y)^2 = a^2$, или

$$xy = \frac{a^2}{2}. \tag{8.1}$$

Уравнение (8.1) называют ***уравнением гиперболы в асимптотах***.

Замечание 8.1. Уравнение $xy = -\dfrac{a^2}{2}$ задает сопряженную гиперболу для равнобочной гиперболы (8.1).

Пример 8.1. Найдем координаты вершин, фокусов и уравнения асимптот гиперболы $xy = -8$ и построим ее.

Данное уравнение является уравнением в асимптотах для сопряженной равнобочной гиперболы. Поэтому оси координат, т.е. прямые $x = 0$, $y = 0$, являются ее асимптотами. Для этой гиперболы $-a^2/2 = -8$, поэтому $a^2 = 16$ и $a = b = 4$. Но тогда $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, и, учитывая обозначения вершин и фокусов, находим: $A\bigl(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\bigr)$, $B\bigl(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\bigr)$, $F_1(-4; 4)$, $F_2(4; -4)$ (рис. 8.2).

8.2. Парабола

Рассмотрим на плоскости прямую и точку, не лежащую на этой прямой. И *эллипс*, и *гипербола* могут быть определены единым образом как геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до данной точки к расстоянию до данной прямой есть постоянная вели-

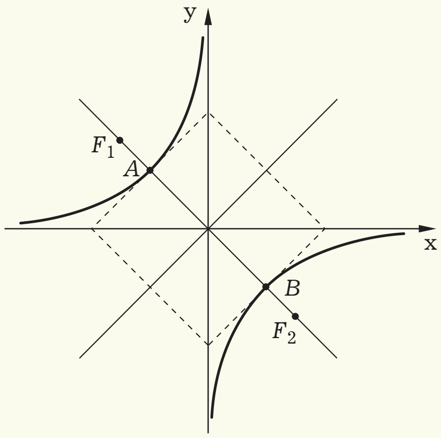


Рис. 8.2

чина ε. При $0 < \varepsilon < 1$ получается эллипс, а при $\varepsilon > 1$ — гипербола. Параметр ε является *эксцентриситетом* как *эллипса*, так и *гиперболы*. Из возможных положительных значений параметра ε одно, а именно $\varepsilon = 1$, оказывается незадействованным. Этому значению соответствует геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и от данной прямой.

Определение 8.1. Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки и от фиксированной прямой, называют ***параболой***.

Фиксированную точку называют ***фокусом параболы***, а прямую — ***директрисой параболы***. При этом полагают, что ***эксцентриситет параболы*** равен единице.

Из геометрических соображений вытекает, что парабола симметрична относительно прямой, перпендикулярной директрисе и проходящей через фокус параболы. Эту прямую называют осью симметрии параболы или просто ***осью параболы***. Парабола пересекается со своей осью симметрии в единственной точке. Эту точку называют ***вершиной параболы***. Она расположена в середине отрезка, соединяющего фокус параболы с точкой пересечения ее оси с директрисой (рис. 8.3).

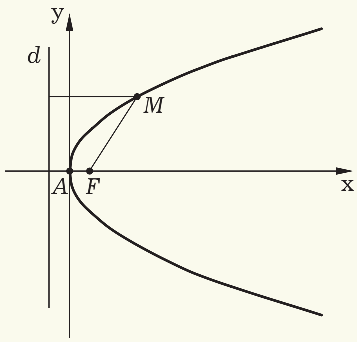


Рис. 8.3

Уравнение параболы. Для вывода уравнения параболы выберем на плоскости *начало координат* в вершине параболы, в качестве *оси абсцисс* — ось параболы, положительное направление на которой задается положением фокуса (см. рис. 8.3). Эту систему координат называют ***канонической*** для рассматриваемой параболы, а соответствующие переменные — ***каноническими***.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p. Его называют ***фокальным параметром параболы***.

Тогда фокус имеет координаты $F(p/2; 0)$, а директриса d описывается уравнением $x = -p/2$. Геометрическое место точек $M(x; y)$, равноудаленных от точки F и от прямой d, задается уравнением

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{8.2}$$

Возведем уравнение (8.2) в квадрат и приведем подобные. Получим уравнение

$$y^2 = 2px, \tag{8.3}$$

которое называют ***каноническим уравнением параболы***.

Отметим, что возведение в квадрат в данном случае — эквивалентное преобразование уравнения (8.2), так как обе части уравнения неотрицательны, как и выражение под радикалом.

Вид параболы. Если параболу $y^2 = x$, вид которой считаем известным, сжать с коэффициентом $1/(2p)$ вдоль оси абсцисс, то получится парабола общего вида, которая описывается уравнением (8.3).

Пример 8.2. Найдем координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, если она проходит через точку, канонические координаты которой $(25; 10)$.

В канонических координатах уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. Поскольку точка $(25; 10)$ находится на параболе, то $100 = 50p$ и поэтому $p = 2$. Следовательно, $y^2 = 4x$ является каноническим уравнением параболы, $x = -1$ — уравнением ее директрисы, а фокус находится в точке $(1; 0)$.

Оптическое свойство параболы. Парабола имеет следующее ***оптическое свойство***. Если в фокус параболы поместить источник света, то все световые лучи после отражения от параболы будут параллельны оси параболы (рис. 8.4). Оптическое свойство означает, что в любой точке M параболы *нормальный вектор* касательной составляет с фокальным радиусом MF и осью абсцисс одинаковые углы.

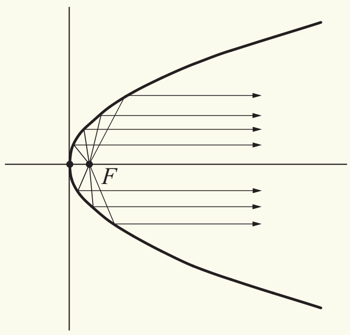


Рис. 8.4

8.3. Неполные уравнения кривой второго порядка

Если в уравнении

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \tag{8.4}$$

кривой второго порядка на плоскости либо $B = 0$ (нет слагаемого с произведением переменных), либо $A = C = 0$ (нет слагаемых с квадратами переменных), то такое уравнение называют ***неполным***.

Неполное уравнение второго порядка при помощи *параллельного переноса системы координат* и, возможно, дополнительного *поворота системы координат на плоскости* на угол $\pi/2$, $-\pi/2$ или π можно преобразовать либо в *каноническое уравнение эллипса*, либо в *каноническое уравнение гиперболы*, либо в *каноническое уравнение параболы*, либо в *уравнение гиперболы в асимптотах*. Кроме того, есть особые случаи, когда уравнение не сводится ни к одному из вышеперечисленных (случаи вырождения кривой второго порядка).

Замечание 8.2. Поворот системы координат на плоскости xOy соответствует введению новых переменных $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$. При этом в случае поворота на угол $\pi/2$ $\widetilde{x} = y$, $\widetilde{y} = -x$; на угол $-\pi/2$ $\widetilde{x} = -y$, $\widetilde{y} = x$; на угол π $\widetilde{x} = -x$, $\widetilde{y} = -y$. Такие замены переменных удобно называть ***переобозначениями переменных***.

Рассмотрим преобразование неполного уравнения кривой второго порядка. Если уравнение второго порядка не содержит слагаемого с произведением переменных ($B = 0$), то для его преобразования используют выделение полного квадрата по каждому из переменных, которые входят в уравнение во второй и в первой степени. Напомним, что для квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, выделением полного квадрата по x называют следующее его тождественное преобразование:

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x\Big) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a(x - x_0)^2 + d,$$

где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $d = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

При $B = 0$ возможны три варианта.

1. В первом варианте при $A \neq 0$ и $C \neq 0$ уравнение (8.4) путем выделения полного квадрата по x (при $D \neq 0$) и по y (при $E \neq 0$) приводится к виду

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = F', \tag{8.5}$$

где $x_0 = -\dfrac{D}{2A}$, $y_0 = -\dfrac{E}{2C}$, $F' = -F + \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C}$.

Если в (8.5) $F' \neq 0$, то, введя обозначения $a^2 = |F'|\,/\,|A|$, $b^2 = |F'|\,/\,|C|$ и учитывая знаки коэффициентов в (8.5), приходим к одному из следующих четырех уравнений:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1,$$
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1.$$

Геометрическим образом последнего *уравнения* является пустое множество, которое иногда называют ***мнимым эллипсом***. Первое (второе, третье) из этих уравнений называют ***смещенным уравнением гиперболы*** (***сопряженной гиперболы***, ***эллипса***), поскольку после параллельного переноса системы координат $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ в новых переменных эти уравнения примут соответственно вид

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = -1, \quad \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Отметим, что среди последних трех уравнений канонический вид всегда имеют первые два уравнения, а третье — лишь при $a \geqslant b$. Если в последнем уравнении a и b удовлетворяют неравенству $a < b$, то это уравнение примет канонический вид после переобозначения переменных $\widetilde{x} = y'$, $\widetilde{y} = -x'$.

Если в уравнении (8.5) $F' = 0$, то оно имеет вид $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = 0$. Геометрическим образом этого уравнения при $AC > 0$ будет точка с координатами $(x_0; y_0)$, а при $AC < 0$ — пара пересекающихся прямых $\sqrt{|A|}(x - x_0) \pm \sqrt{|C|}(y - y_0) = 0$.

2. Второй вариант соответствует $A \neq 0$, $C = 0$. При $E \neq 0$, т.е. когда в уравнении присутствует слагаемое с y в первой степени, выделяем полный квадрат по переменному x (при $D \neq 0$). Перенеся затем остальные слагаемые в правую часть, получим $A(x - x_0)^2 = -Ey + F'$,

где $x_0 = -D/(2A)$; $F' = D^2/(4A) - F$. В результате приходим к уравнению $A(x - x_0)^2 = -E(y - y_0)$, где $y_0 = F'/E$. Полагая $p = |E|/(2|A|)$, найдем ***смещенное уравнение параболы*** $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ (при $AE < 0$) или $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$ (при $AE > 0$). После параллельного переноса системы координат $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ эти уравнения сводятся к $(x')^2 = 2py'$ и $(x')^2 = -2py'$ соответственно. Наконец, полученные уравнения преобразуются в каноническое уравнение параболы $\widetilde{y}^2 = 2p\widetilde{x}$ после переобозначения переменных $\widetilde{x} = y'$, $\widetilde{y} = -x'$ и $\widetilde{x} = -y'$, $\widetilde{y} = x'$ соответственно.

Если в этом варианте слагаемое с y в первой степени в уравнении отсутствует ($E = 0$), то уравнение имеет вид $Ax^2 + Dx + F = 0$, $\quad A \neq 0$, т.е. является квадратным относительно x. Это один из вырожденных случаев, поскольку (8.4) является уравнением относительно одного переменного. Выделение полного квадрата в этом случае сводит уравнение к одному из трех видов:

$$(x - x_0)^2 = a^2, \qquad (x - x_0)^2 = 0, \qquad (x - x_0)^2 = -a^2,$$

где $x_0 = -D/(2A)$, $a = \sqrt{|-F + D^2/(4A)|} \neq 0$. Первое из этих уравнений описывает на плоскости пару параллельных прямых $x = x_0 \pm a$, которые во втором случае сливаются в одну прямую $x = x_0$. Третье уравнение задает на плоскости пустое множество (уравнение пары мнимых параллельных прямых).

3. Третий вариант $A = 0$, $C \neq 0$ аналогичен второму (сводится к нему переобозначением переменных $\widetilde{x} = y$, $\widetilde{y} = -x$). Поэтому при $D \neq 0$, т.е. когда в уравнении присутствует слагаемое с x в первой степени, выделяя полный квадрат по переменному y (при $E \neq 0$) и перенося остальные слагаемые в правую часть, находим $C(y - y_0)^2 = -Dx + F'$, где $y_0 = -E/(2C)$; $F' = E^2/(4C) - F$. В результате приходим к уравнению $C(y - y_0)^2 = -D(x - x_0)$, где $x_0 = F'/D$. Полагая $p = |D|/(2|C|)$, мы опять получим ***смещенное уравнение параболы*** $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ (при $CD < 0$) или $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ (при $CD > 0$). После параллельного переноса системы координат $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ первое из этих уравнений преобразуется в каноническое уравнение параболы $(y')^2 = 2px'$, а второе сведется к уравнению $(y')^2 = -2px'$. Последнее уравнение преобразуется в каноническое уравнение параболы $\widetilde{y}^2 = 2p\widetilde{x}$ после переобозначения переменных $\widetilde{x} = -x'$, $\widetilde{y} = -y'$.

Если в этом варианте слагаемое с x в первой степени в уравнении отсутствует ($D = 0$), то уравнение имеет вид $Cy^2 + Ey + F = 0$, $C \neq 0$, т.е. является квадратным относительно y. Это тоже один из вырожденных случаев, в котором выделение полного квадрата по y дает уравнение одного из трех видов:

$$(y - y_0)^2 = a^2, \qquad (y - y_0)^2 = 0, \qquad (y - y_0)^2 = -a^2,$$

где $y_0 = -E/(2C)$; $a = \sqrt{|-F + E^2/(4C)|} \neq 0$. Так что и в этом случае получаем пару параллельных (различных, совпадающих, мнимых) прямых, параллельных оси Ox.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (8.4) отсутствуют квадраты переменных, т.е. оно имеет вид

$$Bxy + Dx + Ey + F = 0, \quad B \neq 0. \tag{8.6}$$

Такое уравнение можно привести к виду $(x - x_0)(y - y_0) + F' = 0$, где $x_0 = -E/B$; $y_0 = -D/B$; $F' = F/B - x_0y_0$. Полагая $|F'| = a^2/2$, в зависимости от знака F' приходим к одному из уравнений

$$(x - x_0)(y - y_0) = \frac{a^2}{2}, \qquad (x - x_0)(y - y_0) = -\frac{a^2}{2}. \tag{8.7}$$

Если $a \neq 0$, мы получаем ***смещенное уравнение гиперболы в асимптотах***. Название отражает то, что после параллельного переноса системы координат $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ уравнение превратится в уравнение гиперболы в асимптотах $x'y' = a^2/2$ или в уравнение сопряженной гиперболы в асимптотах $x'y' = -a^2/2$.

Если $a = 0$, оба уравнения (8.7) будут одинаковы, их геометрическим образом будет пара пересекающихся прямых $x = x_0$ и $y = y_0$.

Несложный анализ приведенных преобразований неполного уравнения кривой второго порядка показывает, что при $AC > 0$, $B = 0$ геометрическим образом уравнения могут быть лишь эллипс (окружность при $A = C$), точка или мнимый эллипс. Поэтому случай $AC > 0$, $B = 0$ называют эллиптическим.

В то же время в случае $AC < 0$, $B = 0$ геометрическим образом уравнения могут быть лишь гипербола или пара пересекающихся прямых, которую можно рассматривать как вырожденный случай гиперболы. Аналогична ситуация и в случае $A = C = 0$, $B \neq 0$. Эти случаи называют гиперболическими.

Наконец, если в уравнении из трех коэффициентов при слагаемых второго порядка отличен от нуля только один, A или C, то геометрическим образом может быть или парабола, или пара параллельных прямых (включая случаи совпадающих и мнимых прямых). Этот случай называют параболическим.

В задачах на исследование кривых второго порядка, заданных в прямоугольной системе координат неполными уравнениями, обычно требуется определить каноническое уравнение и в системе координат Oxy найти: для параболы — координаты вершины и *фокуса*, уравнение *директрисы*; для эллипса — координаты *центра*, вершин и фокусов, *полуоси* и *эксцентриситет*, уравнения директрис, а для гиперболы — еще и уравнения *асимптот*.

Пример 8.3. Исследуем кривую второго порядка, заданную своим уравнением $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$.

В этом неполном уравнении второго порядка коэффициенты при квадратах переменных имеют одинаковый знак. Значит уравнение относится к эллиптическому типу. Выделяя полные квадраты по обеим переменным, получаем $9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 11 = 0$, $9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$, $\dfrac{(x-1)^2}{2^2} + \dfrac{(y+2)^2}{3^2} = 1$. Следовательно, после параллельного переноса системы координат $x' = x - 1$, $y' = y + 2$ получим уравнение

$$\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{3^2} = 1,$$

которое задает эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$. Так как $a < b$, то фокусы лежат на вертикальной оси симметрии. Поэтому $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = c/b = \sqrt{5}/3$. Центр эллипса находится в точке O' с координатами $(1; -2)$ (рис. 8.5). Отметим, что полученное уравнение эллипса не является каноническим, для перехода в каноническую систему координат требуется дополнительный поворот системы координат O'x$'$y$'$ на угол $90°$.

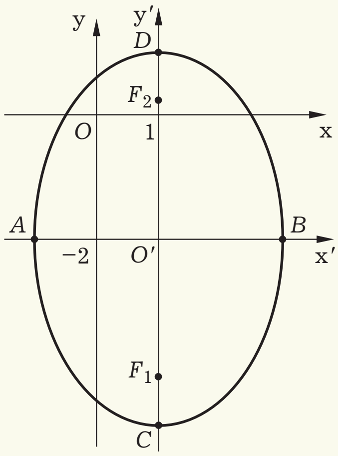


Рис. 8.5

Приведем остальные характеристики кривой:

Система координат	$O'x'y'$	Oxy
Координаты вершин	$A(-2;0)$	$A(1-2;-2)$
	$B(2;0)$	$B(1+2;-2)$
	$C(0;-3)$	$C(1;-2-3)$
	$D(0;3)$	$D(1;-2+3)$
Координаты фокусов	$F_1(0;-\sqrt{5})$	$F_1(1;-2-\sqrt{5})$
	$F_2(0;\sqrt{5})$	$F_2(1;-2+\sqrt{5})$
Уравнения директрис	$y'=\pm 9/\sqrt{5}$	$y+2=\pm 9/\sqrt{5}$

Пример 8.4. Неполное уравнение $4x^2+16y^2+8x-64y+4=0$ кривой второго порядка тоже относится к эллиптическому типу. Выделяя полные квадраты по обеим переменным, получаем $4(x^2+2x+1-1)+16(y^2-4y+4-4)+4=0$, $4(x+1)^2+16(y-2)^2=64$, $\dfrac{(x+1)^2}{4^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=1$. Выполнив параллельный перенос системы координат $x'=x+1$, $y'=y-2$, запишем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{(x')^2}{4^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1$$

с полуосями $a=4$, $b=2$. Так как $a>b$, то фокусы лежат на горизонтальной оси симметрии. Поэтому $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}$, а эксцентриситет $\varepsilon=c/a=\sqrt{3}/2$. Центр эллипса находится в точке O' с координатами $(-1;2)$ (рис. 8.6). Приведем остальные характеристики кривой:

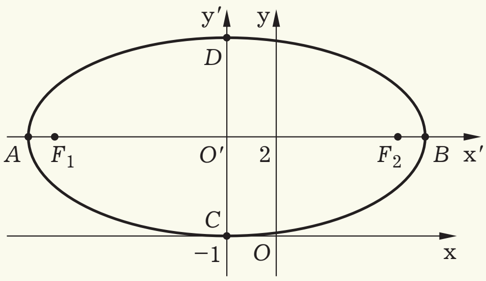


Рис. 8.6

Система координат	$O'x'y'$	Oxy
Координаты вершин	$A(-4;0)$	$A(-1-4;2)$
	$B(4;0)$	$B(-1+4;2)$
	$C(0;-2)$	$C(-1;2-2)$
	$D(0;2)$	$D(-1;2+2)$
Координаты фокусов	$F_1(-2\sqrt{3};0)$	$F_1(-1-2\sqrt{3};2)$
	$F_2(2\sqrt{3};0)$	$F_2(-1+2\sqrt{3};2)$
Уравнения директрис	$x'=\pm 8/\sqrt{3}$	$x+1=\pm 8/\sqrt{3}$

Пример 8.5. В неполном уравнении кривой второго порядка $4x^2-9y^2-24x+18y-9=0$ коэффициенты при квадратах переменных имеют противоположные знаки. Поэтому уравнение относится к гиперболическому типу. Выделяя полные квадраты по обеим переменным, получаем $4(x^2-6x+9-9)-9(y^2-2y+1-1)-9=0$, $4(x-3)^2-9(y-1)^2=36$, $\dfrac{(x-3)^2}{3^2}-\dfrac{(y-1)^2}{2^2}=1$. В канонических координатах $x'=x-3$, $y'=y-1$ уравнение имеет вид

$$\frac{(x')^2}{3^2}-\frac{(y')^2}{2^2}=1.$$

Оно задает гиперболу с центром в точке $O'(3;1)$, действительной полуосью $a=3$, мнимой полуосью $b=2$. При этом $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$, $\varepsilon=c/a=\sqrt{13}/3$ (рис. 8.7).

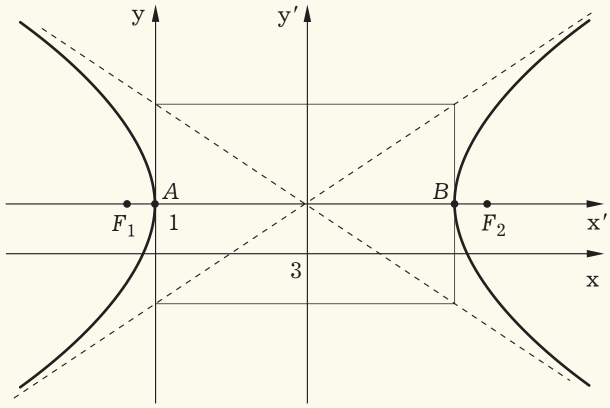


Рис. 8.7

Приведем сводку остальных характеристик по этой гиперболе:

Система координат	$O'\mathrm{x}'\mathrm{y}'$	$O\mathrm{xy}$
Координаты вершин	$A(-3;0)$	$A(3-3;1)$
	$B(3;0)$	$B(3+3;1)$
Координаты фокусов	$F_1\big(-\sqrt{13};0\big)$	$F_1\big(3-\sqrt{13};1\big)$
	$F_2\big(\sqrt{13};0\big)$	$F_2\big(3+\sqrt{13};1\big)$
Уравнения директрис	$x' = \pm 9/\sqrt{13}$	$x-3 = \pm 9/\sqrt{13}$
Уравнения асимптот	$y' = \pm 2/3x'$	$y-1 = \pm 2(x-3)/3$

Пример 8.6. Неполное уравнение кривой второго порядка $x^2+2x-6y+7=0$ относится к параболическому типу, поскольку содержит только одно слагаемое с переменным в квадрате. Выделяя полный квадрат по x, получаем $(x^2+2x+1-1)-6y+7=0$, $(x+1)^2=6(y-1)$. В координатах $x'=x+1$, $y'=y-1$ уравнение имеет вид $(x')^2 = 2\cdot 3y'$. Это парабола с вертикальной осью симметрии, для которой $p=3$, а $p/2=1{,}5$. Вершина параболы находится в точке $O'(-1;1)$ (рис. 8.8). Укажем остальные характеристики кривой:

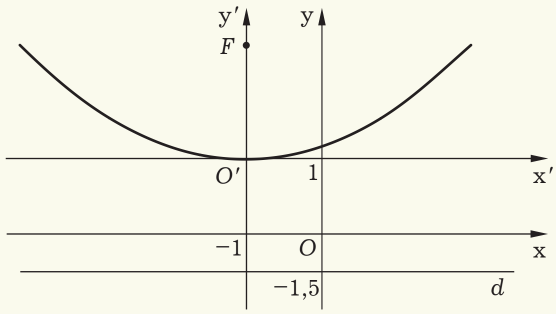


Рис. 8.8

Система координат	$O'\mathrm{x}'\mathrm{y}'$	$O\mathrm{xy}$
Координаты фокуса	$F(0;1{,}5)$	$F(-1;1+1{,}5)$
Уравнение директрисы	$x'=-1{,}5$	$x+1=-1{,}5$

Пример 8.7. Неполное уравнение $xy-x-2y+6=0$ кривой второго порядка относится к гиперболическому типу, поскольку оно не содержит слагаемых с квадратами переменных, но имеет слагаемое с их произведением. Преобразуем уравнение. В канонических переменных $x'=x-2$, $y'=y-1$ уравнение имеет вид $x'y' = -(2\sqrt{2})^2/2$, т.е. представляет собой уравнение сопряженной гиперболы в асимптотах с полуосями $a=b=2\sqrt{2}$. Далее находим $c=\sqrt{a^2+b^2} = 4$, $\varepsilon = c/a = 4/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Центр гиперболы находится в точке $O'(2;1)$ (рис. 8.9).

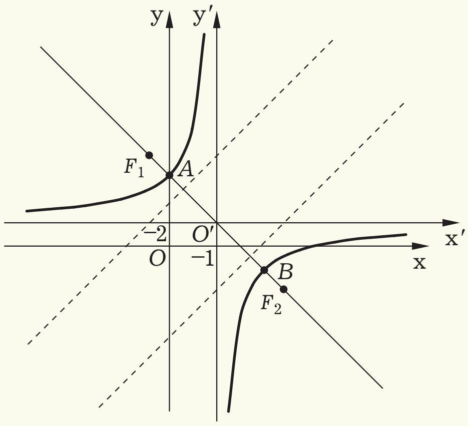


Рис. 8.9

Даем сводку остальных характеристик по этой кривой:

Система координат	$\boldsymbol{O'}$**x′y′**	$\boldsymbol{O}$**xy**
Координаты вершин	$A(-2;2)$	$A(2-2;1+2)$
	$B(2;-2)$	$B(2+2;1-2)$
Координаты фокусов	$F_1\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$	$F_1\left(2-2\sqrt{2};1+2\sqrt{2}\right)$
	$F_2\left(2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$	$F_2\left(2+2\sqrt{2};1-2\sqrt{2}\right)$
Уравнения директрис	$y'=x'\pm 2\sqrt{2}$	$y-1=\pm 2\sqrt{2}(x-2)$
Уравнения асимптот	$y'=0$	$y-1=0$
	$x'=0$	$x-2=0$

Лекция 9

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Эллипсоид. Конус. Гиперболоиды. Параболоиды. Их канонические уравнения. Исследование поверхностей второго порядка методом сечений.

9.1. Поверхность вращения и преобразование сжатия

Поверхность вращения. Простейшие поверхности в пространстве — это плоскости. Они являются *геометрическими образами уравнений первой степени* от трех переменных. Другой достаточно простой тип поверхностей составляют поверхности вращения.

Определение 9.1. Поверхность Ω называют ***поверхностью вращения***, если она образована окружностями с центрами на некоторой прямой L (оси вращения), которые расположены в плоскостях, перпендикулярных L (рис. 9.1).

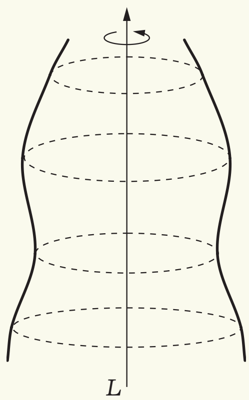


Рис. 9.1

Уравнение поверхности вращения Ω имеет наиболее простой вид, когда *начало O прямоугольной системы координат* лежит на оси вращения, а *ось Oz* совпадает с ней. Пересечение поверхности Ω с *координатной плоскостью* xOz — это некоторое множество S (рис. 9.2), вращение которого образует Ω.

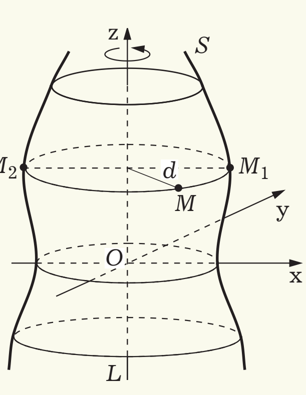


Рис. 9.2

Предположим, что множество S в плоскости xOz описывается уравнением $\varphi(x,z)=0$. Рассмотрим произвольную точку $M(x;y;z)$. Она удалена от оси Oz на расстояние $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Если точка M лежит на поверхности вращения Ω, то точки $M_1(x_1;0;z)$, $M_2(x_2;0;z)$ с той же аппликатой z, что и M, и абсциссами $x_1=d$, $x_2=-d$ принадлежат множеству S. Поэтому

$$0=\varphi(x_1,z)=\varphi(d,z)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2},z),\quad 0=\varphi(x_2,z)=\varphi(-d,z)=\varphi(-\sqrt{x^2+y^2},z)$$

и условие $M\in\Omega$ сводится к тому, что *координаты* точки M удовлетворяют равенству

$$\varphi(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{9.1}$$

Уравнение (9.1) и есть уравнение поверхности Ω, которая образована вращением подмножества $S=\{(x;z)\colon \varphi(x,z)=0\}$, расположенного в координатной плоскости xOz. Из уравнения множества S уравнение (9.1) соответствующей поверхности вращения получается заменой x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Преобразование сжатия. Под ***преобразованием сжатия*** к координатной плоскости xOz мы понимаем такое преобразование, при котором точка $M(x;y;z)$ смещается в точку $M'(x;y/k;z)$, $k>0$. Параметр k называют ***коэффициентом сжатия***. При $k>1$ точки пространства, расположенные на одной прямой, перпендикулярной плоскости xOz, в результате такого преобразования сближаются, т.е. преобразование — действительно сжатие. При $0<k<1$ преобразование фактически является растяжением.

Пусть в пространстве в прямоугольной системе координат Oxyz некоторое множество Q задано своим уравнением $F(x,y,z)=0$. При преобразовании сжатия к координатной плоскости xOz с коэффициентом k это множество превратится в новое множество Q' с уравнением $F(x,ky,z)=0$. Это следует из того, что точка $(x;y;z)$ тогда и только тогда принадлежит множеству Q', когда точка $(x;ky;z)$ принадлежит множеству Q.

9.2. Эллипсоиды

Поверхность, которая получается при вращении *эллипса* вокруг одной из его *осей симметрии*, называют ***эллипсоидом вращения*** (рис. 9.3).

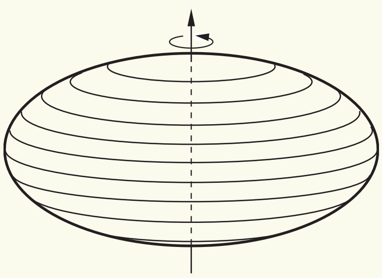


Рис. 9.3

Уравнение эллипсоида вращения выведем, расположив *начало прямоугольной системы координат* в *центре эллипса* и совместив *ось аппликат* Oz с осью вращения, а *координатную плоскость* xOz — с плоскостью эллипса (рис. 9.4). Тогда уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. Если в этом уравнении заменить x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**), то получится уравнение $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ соответствующей *поверхности вращения*. Итак, эллипсоид вращения с осью вращения Oz описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{9.2}$$

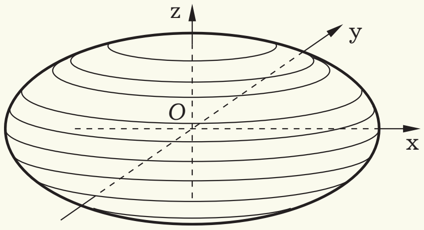


Рис. 9.4

Применив к эллипсоиду вращения *преобразование сжатия* к координатной плоскости xOz, получим ***эллипсоид*** общего вида. Если k — *коэффициент сжатия*, то уравнение эллипсоида будет иметь вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, или, после переобозначения параметров,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (9.3)$$

Уравнение (9.3) задает поверхность *второго порядка*. Его называют ***каноническим уравнением эллипсоида***. Три параметра a, b и c, входящие в него — это ***полуоси эллипсоида*** (рис. 9.5). Если все три полуоси эллипсоида попарно различны, то эллипсоид называют ***трехосным***.

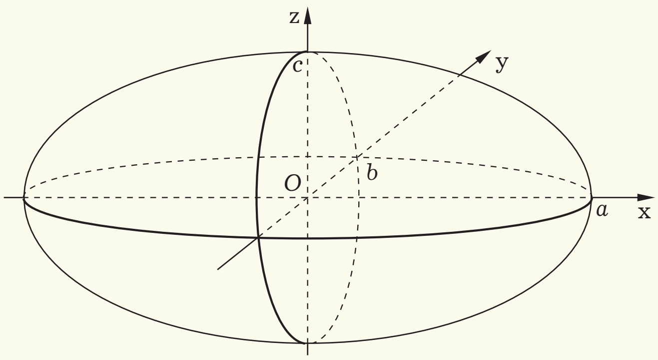


Рис. 9.5

При совпадении каких-либо двух полуосей (как, например, в уравнении (9.2)) эллипсоид является поверхностью вращения (эллипсоидом вращения). Если равны все три полуоси ($a = b = c = r$), то эллипсоид превращается в сферу радиуса r, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

9.3. Гиперболоиды

При вращении *гиперболы* вокруг одной из ее *осей симметрии* получается поверхность, называемая ***гиперболоидом вращения***. Выбор оси вращения влияет на тип гиперболоида. Если осью вращения является *действительная ось симметрии гиперболы*, то поверхность вращения будет состоять из двух частей (полостей). Это ***двуполостный гиперболоид вращения*** (рис. 9.6). При вращении гиперболы вокруг ее *мнимой оси симметрии* поверхность будет состоять из одной полости (рис. 9.7). Такую поверхность называют ***однополостным гиперболоидом вращения***.

Для вывода уравнений гиперболоидов вращения расположим *прямоугольную систему координат* так, чтобы ось вращения, являющаяся осью симметрии гиперболы, совпадала с *осью аппликат* Oz, а сама гипербола располагалась в *координатной плоскости* xOz с *центром* в *начале системы координат*.

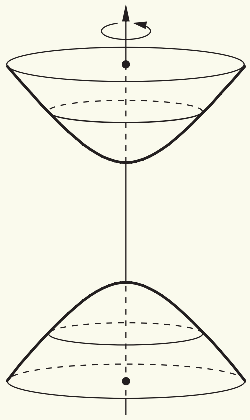


Рис. 9.6

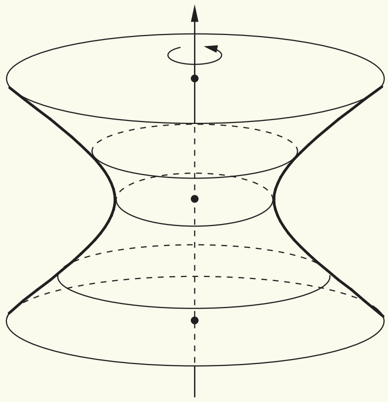


Рис. 9.7

Для случая двуполостного гиперболоида вращения уравнение гиперболы будет иметь вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$. Заменив в нем x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1. \tag{9.4}$$

В случае однополостного гиперболоида вращения гипербола будет описываться уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. Опять меняем x на радикал $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad — \tag{9.5}$$

уравнение однополостного гиперболоида вращения.

Гиперболоиды вращения *преобразованием сжатия* к координатной плоскости xOz превращаются в ***двуполостный*** и ***однополостный гиперболоиды*** общего вида. При *коэффициенте сжатия* k их уравнениями будут соответственно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1 \qquad \text{и} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

После переобозначений параметров эти уравнения преобразуются в ***каноническое уравнение двуполостного*** (рис. 9.8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{9.6}$$

и ***однополостного*** (рис. 9.9) ***гиперболоидов***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{9.7}$$

Как видно из уравнений (9.6), (9.7), оба гиперболоида являются *поверхностями второго порядка.*

9.4. Эллиптические параболоиды

При вращении *параболы* вокруг ее *оси* получаем ***параболоид вращения*** (рис. 9.10). Чтобы найти его уравнение, выберем *прямоугольную систему координат*, направив *ось* Oz по оси вращения и совместив *координатную плоскость* xOz с плоскостью параболы. Пусть при этом парабола описывается уравнением $x^2 = 2pz$, $p > 0$. Тогда для получения уравнения *поверхности вращения* нужно заменить в этом уравнении x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**): $2pz = x^2 + y^2$.

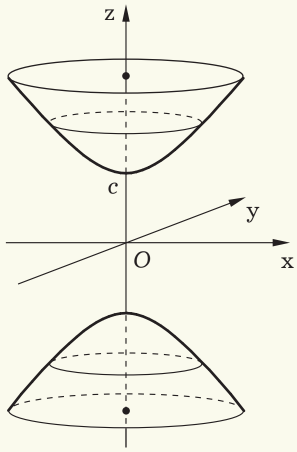


Рис. 9.8

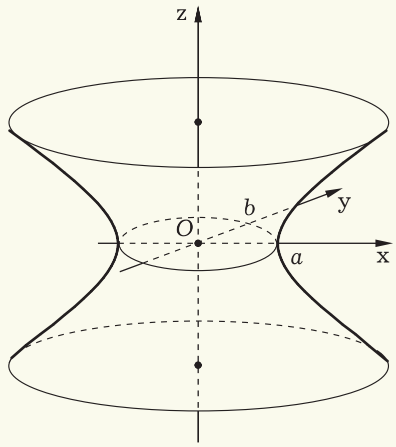


Рис. 9.9

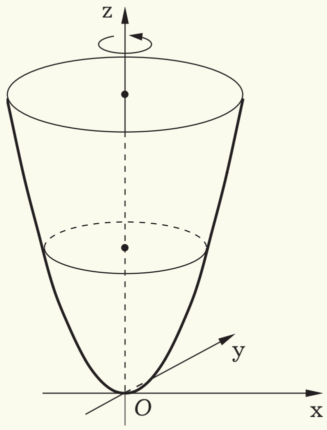


Рис. 9.10

Преобразование сжатия параболоида вращения к координатной плоскости xOz с *коэффициентом* k дает поверхность более общего вида — ***эллиптический параболоид***, уравнением которого будет $2pz = x^2 + k^2y^2$. После переобозначения параметров получаем ***каноническое уравнение эллиптического параболоида***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{9.8}$$

Видим, что эллиптический параболоид является *поверхностью второго порядка*. При $a = b$ он превращается в параболоид вращения.

9.5. Конусы

При вращении прямой L, пересекающейся с осью вращения, образуется ***прямой круговой конус*** (рис. 9.11). Точка пересечения вращающейся прямой с осью вращения остается неподвижной, ее называют ***вершиной конуса***.

Как и ранее, уравнение будем выводить в *прямоугольной системе координат*, *ось* Oz которой совпадает с осью вращения, а *начало системы координат* — с вершиной конуса. Ось Ox расположим так, чтобы прямая L находилась в *координатной плоскости* xOz и описывалась уравнением $z = k_1x$. В этой системе координат уравнение *поверхности вращения* получается из уравнения прямой заменой x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**). В результате такой замены получаем $z = \pm k_1\sqrt{x^2+y^2}$. Возведя уравнение в квадрат, придем к соотношению $z^2 = k_1^2(x^2+y^2)$, а разделив его на $c^2 = k_1^2a^2$, получим ***каноническое уравнение прямого кругового конуса*** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$.

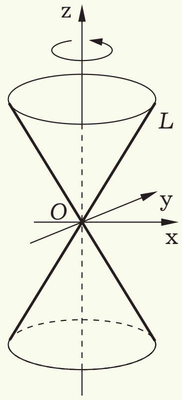


Рис. 9.11

Преобразование сжатия прямого кругового конуса к координатной плоскости xOz с *коэффициентом* k дает ***эллиптический конус***. Его уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$, или, после переобозначения параметров,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}. \tag{9.9}$$

Уравнение (9.9) называют ***каноническим уравнением эллиптического конуса***. Эллиптический конус при $a=b$ совпадает с прямым круговым конусом, и оба они являются *поверхностями второго порядка.*

9.6. Цилиндрические поверхности

При вращении прямой вокруг некоторой оси, параллельной этой прямой, образуется поверхность, которую называют ***круговым цилиндром*** (рис. 9.12). Эта поверхность является частным случаем ***цилиндрической поверхности***, получающейся при движении прямой в пространстве, которая остается параллельной своему исходному положению (рис. 9.13). Если на движущейся прямой фиксировать точку, то она опишет кривую, которую называют ***направляющей цилиндрической поверхности*** (см. рис. 9.13). Можно также сказать, что цилиндрическая поверхность представляет собой множество точек прямых, параллельных фиксированной прямой. Эти параллельные прямые называют ***образующими цилиндрической поверхности***.

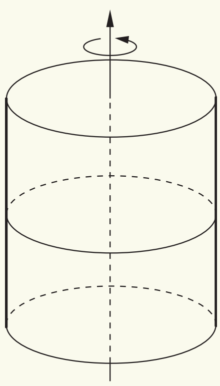


Рис. 9.12

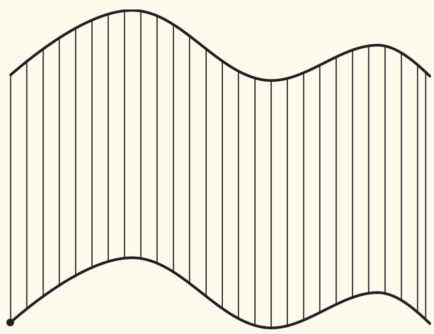


Рис. 9.13

В качестве направляющей цилиндра можно взять любую кривую, образованную пересечением цилиндрической поверхности с плоскостью, не параллельной образующим. Выберем *прямоугольную систему координат* так, чтобы образующие цилиндрической поверхности были параллельны *оси* Oz. В качестве направляющей выберем кривую, являющуюся пересечением цилиндрической поверхности с *координатной плоскостью* xOy (рис. 9.14).

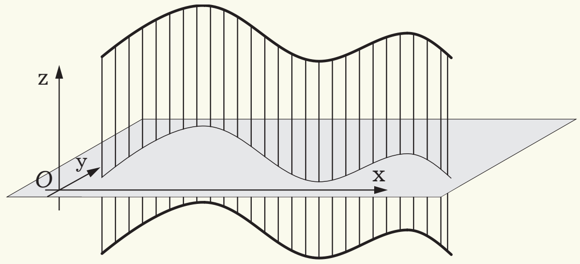


Рис. 9.14

Направляющая в плоскости xOy описывается некоторым уравнением $\varphi(x, y) = 0$ двух переменных. Точка $M(x; y; z)$ лежит на цилиндрической поверхности тогда и только тогда, когда ее *абсцисса* и *ордината* (фактически *координаты точки* $N(x; y; 0)$ на плоскости xOy) подчиняются уравнению направляющей. Поэтому в выбранной системе координат цилиндрическая поверхность описывается уравнением $\varphi(x, y) = 0$ — уравнением своей направляющей, которое трактуется как уравнение трех переменных x, y и z. Верно и обратное утверждение: если в некоторой прямоугольной системе координат в пространстве поверхность описывается уравнением, не содержащим одного из переменных, то эта поверхность является цилиндрической. Итак, критерием для цилиндрической поверхности является отсутствие в ее уравнении в подходящей системе координат одного из переменных.

Цилиндр второго порядка — это цилиндрическая поверхность, направляющая которой в плоскости, перпендикулярной образующим, представляет собой *кривую второго порядка*. В выбранной выше прямоугольной системе координат цилиндр второго порядка описывается *уравнением второй степени* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

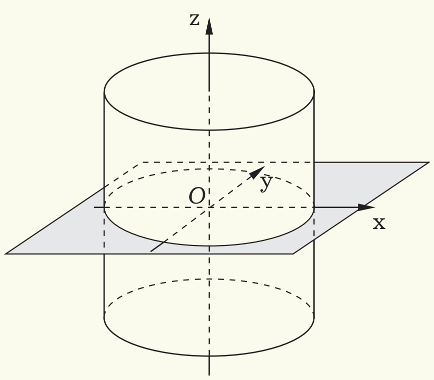
Это уравнение можно упростить подходящим выбором системы координат. Фактически речь идет о приведении к каноническому виду уравнений второго порядка от двух переменных (см. **8.3**). *Канонические уравнения* кривых второго порядка приводят к трем видам цилиндров второго порядка:

– ***эллиптическому*** (рис. 9.15, *а*) с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

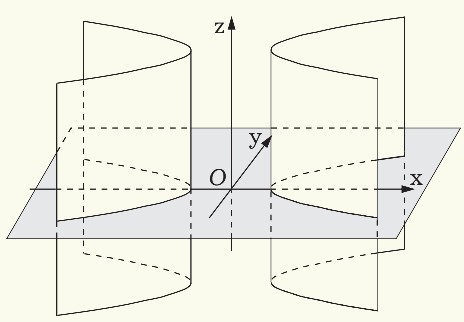
– ***гиперболическому*** (рис. 9.15, *б*) с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

– ***параболическому*** с каноническим уравнением $y^2 = 2px$ (рис. 9.15, *в*).

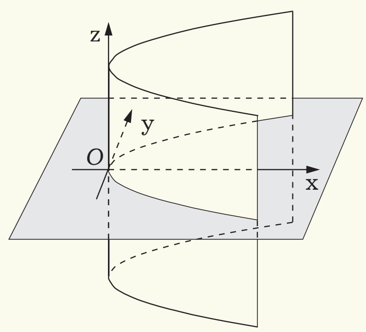
Отметим, что если направляющей является пара пересекающихся (параллельных, совпадающих) прямых, то соответствующая им цилиндрическая поверхность представляют собой пару пересекающихся (параллельных, совпадающих) плоскостей.



а



б



в

Рис. 9.15

9.7. Метод сечений

Для выяснения формы поверхности в пространстве по ее уравнению

$$\Psi(x, y, z) = 0 \tag{9.10}$$

часто используют так называемый ***метод сечений***. Он состоит в анализе пересечений поверхности с плоскостями, параллельными *координатным плоскостям*, например с плоскостями вида $z = c$, где параметр c пробегает все действительные значения. Для каждого значения c система уравнений

$$\begin{cases} \Psi(x, y, z) = 0, \\ z = c \end{cases} \tag{9.11}$$

задает соответствующее пересечение. Критерием принадлежности точки $M(x; y; z)$ этому пересечению являются следующие условия: а) $z = c$; б) координаты x и y ее проекции на координатную плоскость xOy, т.е. координаты точки $N(x; y; 0)$, удовлетворяют уравнению

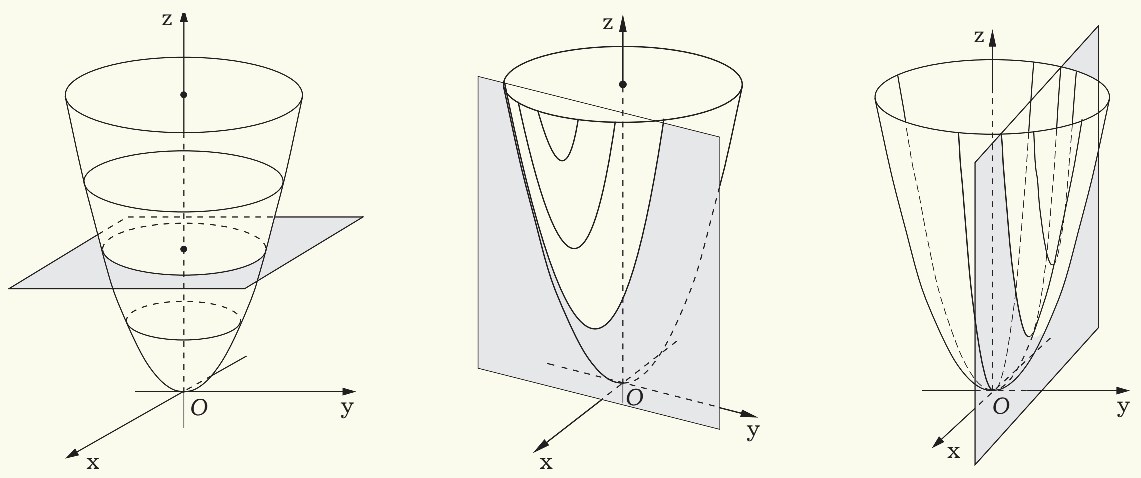
$$\Psi(x, y, c) = 0. \tag{9.12}$$

Зная эти пересечения, т.е. кривые (9.12), можно представить форму поверхности. Отметим, что указанный „рентген" поверхности можно проводить другими плоскостями, но они должны быть параллельными между собой.

Обычно при исследовании формы поверхности методом сечений используют две точки зрения на уравнение (9.12). Первая состоит в том, что его интерпретируют как уравнение проекции на координатную плоскость xOy сечения (9.11). Согласно второй точке зрения предполагают, что в секущей плоскости имеется *прямоугольная система координат* с *началом* в точке O' пересечения секущей плоскости с *осью* Oz и осями, O'x и O'y, которые проектируются на соответствующие оси Ox и Oy системы координат Oxyz. Это позволяет говорить о (9.12) как об уравнении сечения (9.11) в секущей плоскости.

Пример 9.1. В качестве примера рассмотрим уравнение *эллиптического параболоида* (9.8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ и исследуем его форму методом сечений.

Пересечение этой поверхности с плоскостью $z = c$ описывается уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2c$. При $c < 0$ пересечение пусто, при $c = 0$ оно совпадает с *началом системы координат* Oxyz, а при $c > 0$ представляет собой *эллипс* $\dfrac{x^2}{(a\sqrt{2c})^2} + \dfrac{y^2}{(b\sqrt{2c})^2} = 1$. *Оси* этого эллипса с ростом параметра c увеличиваются, и можно представить форму поверхности (рис. 9.16, *а*). Кстати,



а *б* *в*

Рис. 9.16

слово „эллиптический“ в названии поверхности и указывает на то, что среди ее сечений имеются эллипсы.

Пересечения этой же поверхности как с плоскостью $x = c$ (рис. 9.16, *б*), так и с плоскостью $y = c$ (рис. 9.16, *в*) представляют собой *параболы* $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = 2z$ соответственно. Параболы в каждом из этих семейств сечений имеют равные параметры (они не зависят от значения c). Эти сечения позволяют дать еще одно геометрическое построение эллиптического параболоида. Рассмотрим параболу P_1, находящуюся в плоскости $y = 0$, и аналогичную параболу P_2 в плоскости $x = 0$ (рис. 9.17, *а*). Пусть вторая парабола P_2 перемещается в пространстве так, что:

– вершина параболы P_2 все время находится на параболе P_1;
– ось параболы P_2 параллельна оси параболы P_1;
– плоскость параболы P_2 перпендикулярна плоскости параболы P_1.

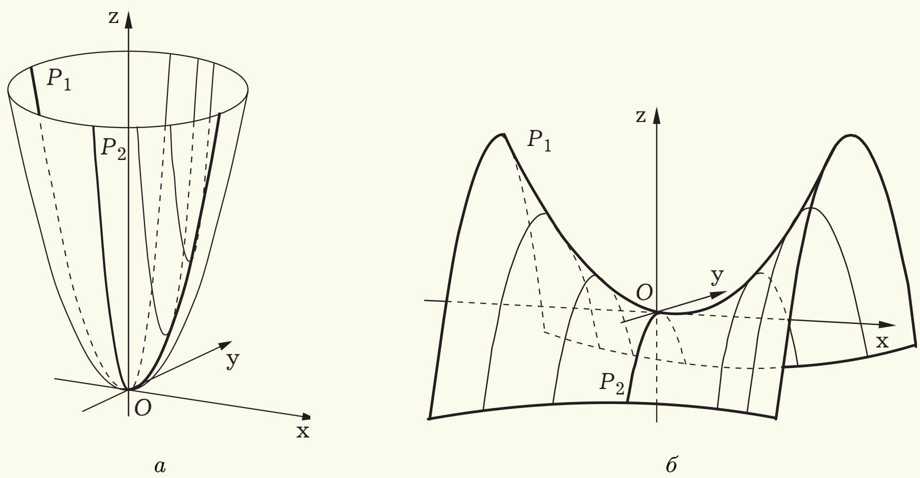


Рис. 9.17

Тогда в результате такого перемещения и образуется эллиптический параболоид. При этом роли парабол P_1 и P_2 можно поменять, т.е. перемещать параболу P_1, используя параболу P_2 как направляющую. #

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad (9.13)$$

отличается от уравнения (9.8) эллиптического параболоида лишь знаком одного слагаемого и тоже задает поверхность второго порядка. Ее называют ***гиперболическим параболоидом***, а само уравнение (9.13) — ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.

Исследуем вид гиперболического параболоида методом сечений. Его пересечения с плоскостями $y = c$ при любом значении c являются параболами:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2z.$$

Пересечения с плоскостями $x = c$ тоже при всех значениях c являются параболами:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Обозначим через P_1 параболу, находящуюся в сечении $y = 0$, а через P_2 — аналогичную параболу в сечении $x = 0$. Перемещая, как и выше, параболу P_2 по параболе P_1 (см. рис. 9.17, *б*), получаем седлообразную поверхность гиперболического параболоида.

Пересечения гиперболического параболоида с плоскостями $z = c$ при $c \neq 0$ являются гиперболами

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2c,$$

а при $c = 0$ — парой пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Выбор названия поверхности объясняется характером сечений: горизонтальные сечения гиперболического параболоида — это гиперболы, а два других семейства рассмотренных сечений — параболы.

9.8. Неполные уравнения поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка в пространстве в заданной *прямоугольной системе координат* описывается уравнением с десятью коэффициентами:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

причем среди первых шести коэффициентов, от A до F, должен быть хотя бы один ненулевой.

Мы, как и в случае кривых второго порядка, не будем проводить полную классификацию поверхностей второго порядка, отложив ее до изучения курса линейной алгебры.

В этом разделе мы рассмотрим случай неполного уравнения поверхности второго порядка, т.е. когда в уравнении отсутствуют попарные произведения переменных:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0. \tag{9.14}$$

Такое уравнение второго порядка при помощи *параллельного переноса системы координат* и, возможно, *переобозначения переменных* можно преобразовать в одно из канонических уравнений поверхности второго порядка или в уравнение вырожденной поверхности второго порядка, хотя в некоторых особых случаях для упрощения уравнения параллельного переноса недостаточно.

Для преобразования уравнения (9.14) используют выделение полного квадрата по каждому из переменных, входящих в уравнение во второй и первой степени (см. **8.3**). При этом возможны три варианта.

1. В первом варианте уравнение (9.14) содержит квадраты всех трех переменных. Выделение полного квадрата по x (при $G \neq 0$), по y (при $H \neq 0$) и по z (при $K \neq 0$) преобразует уравнение (9.14) к виду

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + C(z - z_0)^2 = L', \tag{9.15}$$

где

$$x_0 = -\frac{G}{2A}, \quad y_0 = -\frac{H}{2B}, \quad z_0 = -\frac{K}{2C}, \quad L' = -L + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B} + \frac{K^2}{4C}.$$

Пусть в полученном уравнении (9.15) $L' \neq 0$. Тогда, введя обозначения $a^2 = |L'|\,/\,|A|$, $b^2 = |L'|\,/\,|B|$, $c^2 = |L'|\,/\,|C|$, придем к ***смещенному уравнению поверхности второго порядка***. В зависимости от знаков коэффициентов уравнения (9.15) это могут быть уравнения *эллипсоида*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1, \tag{9.16}$$

однополостного гиперболоида

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1, \tag{9.17}$$

двуполостного гиперболоида

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1 \tag{9.18}$$

или ***мнимого эллипсоида***

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1,$$

называемого так потому, что уравнение напоминает уравнение эллипсоида, но в отличие от последнего описывает пустое множество.

Если $L'=0$, то, вводя обозначения $a^2=1/|A|$, $b^2=1/|B|$, $c^2=1/|C|$, также приходим к смещенному уравнению поверхности второго порядка. В зависимости от знаков коэффициентов уравнения (9.15) это могут быть уравнения *конуса*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0,$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0 \tag{9.19}$$

или точки $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0.$

Замечание 9.1. После параллельного переноса системы координат

$$x'=x-x_0, \quad y'=y-y_0, \quad z'=z-z_0$$

в точку $O'(x_0;y_0;z_0)$ уравнение (9.16) и первые в тройках уравнений (9.17)–(9.19) в новых переменных примут канонический вид, в то время как остальные уравнения в (9.17)–(9.19) преобразуются к каноническому виду дополнительным переобозначением переменных в соответствующей *координатной плоскости.* Это переобозначение переменных важно с теоретической точки зрения, так как позволяет определить тип поверхности, хотя положение этой поверхности в системе координат $O'\mathrm{x}'\mathrm{y}'\mathrm{z}'$ принципиально иное, нежели в канонической системе координат (на рис. 9.18 приведены три варианта положения однополостного гиперболоида). На практике дополнительное изменение системы координат не реализуют и изображают поверхность в системе координат $O'\mathrm{x}'\mathrm{y}'\mathrm{z}'$, получающейся параллельным переносом. Переобозначение переменных рассматривают как чисто алгебраическую операцию, позволяющую выяснить положение поверхности относительно системы координат.

2. Во втором варианте уравнение (9.14) содержит квадраты двух переменных. Здесь выделяются три подварианта:
а) $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C=0$;
б) $A\neq 0$, $B=0$, $C\neq 0$;
в) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$.

Эти подварианты сводятся друг к другу переобозначением переменных. Поэтому они дают одни и те же результаты, и нам достаточно рассмотреть лишь один из них, например первый.

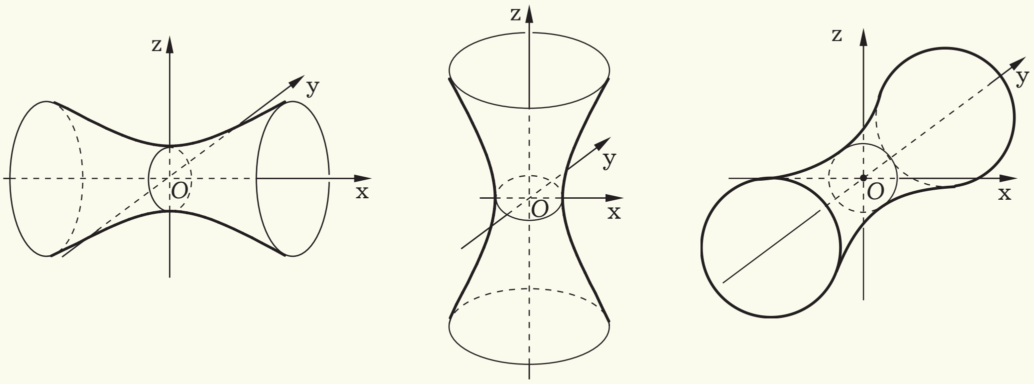


Рис. 9.18

Если $A \neq 0$, $B \neq 0$, а $C = 0$, то в случае $K = 0$ третье переменное z вообще не входит в уравнение (9.14), которое в этом случае является уравнением *цилиндра второго порядка*. Все возникающие ситуации и тип поверхности полностью характеризуются *направляющей цилиндра* в плоскости xOy (см. **8.3**).

В случае $K \neq 0$ выделение полного квадрата по x (при $G \neq 0$) и по y (при $H \neq 0$) преобразует уравнение (9.14) к виду

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = -K(z - z_0), \tag{9.20}$$

где

$$x_0 = -\frac{G}{2A}, \quad y_0 = -\frac{H}{2B}, \quad z_0 = \frac{L'}{K}, \quad L' = -L + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B}.$$

Введя обозначения $a^2 = 1/|A|$, $b^2 = 1/|B|$, $p = |K|/2$, придем к смещенным уравнениям поверхности второго порядка. В зависимости от знаков коэффициентов в (9.20), это могут быть уравнения или *эллиптического параболоида*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 2p(z - z_0), \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -2p(z - z_0), \tag{9.21}$$

или *гиперболического параболоида*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 2p(z - z_0), \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -2p(z - z_0). \tag{9.22}$$

3. В третьем варианте уравнение (9.14) содержит квадрат только одного переменного. Здесь также возникают три симметричных подварианта (квадрат x, квадрат y, квадрат z). Остановимся на случае $A \neq 0$. Если уравнение не содержит или слагаемого с y в первой степени, или такого же слагаемого с z, то реализуется случай цилиндра второго порядка, который сводится к исследованию направляющей цилиндра. Если же в уравнении присутствуют оба указанных слагаемых первой степени, как, например, в уравнении $x^2 + y + 2z = 0$, то приведение уравнения к каноническому виду требует поворота системы координат в пространстве.

Пример 9.2. Упростим уравнение $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 36y + 72z + 40 = 0$ поверхности второго порядка с помощью параллельного переноса прямоугольной системы координат.

Уравнение содержит каждое из трех переменных в первой и во второй степени. Поэтому по каждому переменному выделяем полный квадрат:

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 36(z^2 + 2z + 1 - 1) + 40 = 0,$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 + 36(z + 1)^2 = 36, \quad \frac{(x - 1)^2}{3^2} + \frac{(y - 2)^2}{2^2} + (z + 1)^2 = 1.$$

Приходим к смещенному уравнению эллипсоида с центром в точке $O'(1; 2; -1)$ и полуосями $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$. Соответствующее каноническое уравнение получается после параллельного переноса системы координат $x' = x - 1$, $y' = y - 2$, $z' = z + 1$ и имеет вид

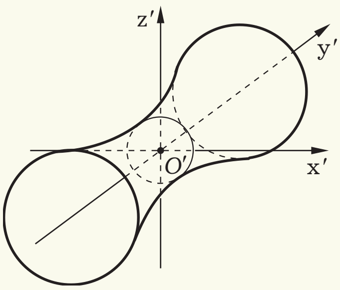
$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} + (z')^2 = 1.$$

Пример 9.3. Выясним, какая поверхность является *геометрическим образом* уравнения $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$.

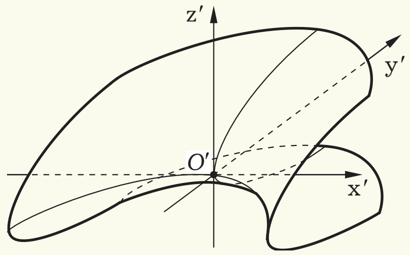
Как и в примере 9.2, по каждому переменному выделяем полный квадрат:

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 - 4y + 4 - 4) + (z^2 - 2z + 1 - 1) - 3 = 0,$$

Приходим к смещенному уравнению однополостного гиперболоида вращения с центром в точке $O'(1;2;1)$. После параллельного переноса системы координат в эту точку $x' = x - 1$, $y' = y - 2$, $z' = z - 1$ уравнение принимает вид $(x')^2 - (y')^2 + (z')^2 = 1$. Это уравнение не является каноническим из-за несоответствия знаков. Осью вращения гиперболоида является ось $O'y'$ новой системы координат (рис. 9.19, *а*).



а



б

Рис. 9.19

Пример 9.4. Выясним, какую поверхность определяет уравнение второго порядка $x^2 - 4z^2 + 8y + 8z - 12 = 0$. В уравнении нет слагаемого x первой степени и слагаемого y второй степени. Полный квадрат выделяем только по переменному z:

$$x^2 - 4(z^2 - 2z + 1 - 1) + 8y - 12 = 0, \quad x^2 - 4(z-1)^2 + 8y - 8 = 0,$$

$$x^2 - 4(z-1)^2 = -8(y-1), \quad \frac{x^2}{2^2} - (z-1)^2 = -2(y-1).$$

Приходим к смещенному уравнению гиперболического параболоида. Выполнив параллельный перенос системы координат $x' = x$, $y' = y - 1$, $z' = z - 1$ в точку $O'(0;1;1)$, получим уравнение

$$\frac{(x')^2}{2^2} - (z')^2 = -2y',$$

которое может быть преобразовано в каноническое дополнительным переобозначением переменных (рис. 9.19, *б*).

Замечание 9.2. Для определения вида поверхности и построения ее в новой системе координат (после параллельного переноса) можно использовать *метод сечений*. Конечно, если, как в примере 9.2, уравнение поверхности имеет канонический вид, то можно воспользоваться приведенным выше выводом канонических уравнений поверхностей второго порядка. Однако в примерах 9.3, 9.4 (см. рис. 9.19, *а*, *б*) ситуация сложнее, и использование метода сечений представляется целесообразным для исключения ошибок.

Лекция 10

МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Матрицы. Виды матриц. Равенство матриц. Линейные операции с матрицами и их свойства. Транспонирование матриц. Операция умножения и ее свойства. Элементарные преобразования матриц, приведение матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Блочные матрицы и операции с ними. *Прямая сумма матриц и ее свойства.

10.1. Виды матриц

Определение 10.1. ***Матрицей типа*** (или ***размера***) $m\times n$ называют прямоугольную числовую таблицу, состоящую из mn чисел, которые расположены в m строках и n столбцах. Составляющие матрицу числа называют ***элементами*** этой ***матрицы***. Как правило, их обозначают строчной буквой с двумя индексами, например a_{ij}, где i — номер строки ($i=\overline{1,\,m}$), j — номер столбца ($j=\overline{1,\,n}$), в которых расположен этот элемент.

Матрицы обозначают

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Используют и другие сокращенные обозначения: $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m}^{1\leqslant j\leqslant n}$ или просто (a_{ij}), если по тексту ясно, в каких пределах изменяются индексы i и j. Матрицу как единый объект обозначают прописной буквой: A, B и т.д. Элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце, мы будем также записывать в виде $[A]_{ij}$, что удобно при проведении доказательств.

Элементами матриц могут быть не только действительные числа, но и *комплексные*, и даже другие математические объекты. Например, мы будем встречаться с матрицами, элементами которых будут многочлены или матрицы.

Множество всех числовых матриц типа $m\times n$, элементами которых являются действительные числа, будем обозначать $M_{mn}(\mathbb{R})$.

Если матрица имеет тип $1\times n$, т.е. если у матрицы всего одна строка, $A=(a_{11},\,a_{12},\,\dots,\,a_{1n})$, то матрицу называют ***матрицей-строкой***. В обозначениях элементов матрицы индекс строки можно опустить: $A=(a_1,\,a_2,\,\dots,\,a_n)$. Число элементов в матрице-строке называют ее ***длиной***.

Если матрица имеет тип $m\times 1$, т.е. у матрицы один столбец:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

то ее называют ***матрицей-столбцом***. Число элементов в матрице-столбце называют ее ***высотой***. Индекс столбца можно опустить:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

При $m = n$, т.е. когда матрица имеет столько же столбцов, сколько и строк, ее называют ***квадратной порядка n***:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а при $m \neq n$ — ***прямоугольной***. Множество всех квадратных матриц порядка n, элементами которых являются действительные числа, обозначают $M_n(\mathbb{R})$. У квадратных матриц выделяют последовательности элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ — ***главную диагональ***, и $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$ — ***побочную диагональ***. Элементы главной диагонали называют ***диагональными***. Понятия диагонального элемента и главной диагонали распространяют и на прямоугольные матрицы.

Если в квадратной матрице порядка n все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, т.е. если матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то ее называют ***диагональной*** и обозначают $\mathrm{diag}\,(a_{11}, \ \ldots, \ a_{nn})$. Если в диагональной матрице порядка n на диагонали стоят единицы, то ее называют ***единичной*** и обозначают обычно E или I:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу типа $m \times n$, все элементы которой равны нулю, называют ***нулевой матрицей*** соответствующего типа и обозначают буквой Θ или цифрой 0.

Часто используют матрицы и других видов, например ***верхние треугольные матрицы***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которых элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, и ***нижние треугольные матрицы***, у которых, наоборот, элементы над главной диагональю равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что диагональные матрицы являются частным случаем как верхних, так и нижних треугольных матриц. Более того, множество диагональных матриц совпадает с *пересечением* множества верхних треугольных матриц и множества нижних треугольных матриц.

К ***трехдиагональным матрицам*** относят такие квадратные матрицы, у которых ненулевыми элементами могут быть лишь диагональные элементы и соседние с ними в строке или столбце:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Прямоугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3m} & \ldots & a_{3n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

у которых элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, называют ***верхними трапециевидными***.

Важную роль в дальнейшем изложении играют ***ступенчатые матрицы*** (матрицы ступенчатого вида). Так называют матрицу типа $m\times n$, если для любой ее строки выполнено следующее условие: под первым слева ненулевым элементом строки и предшествующими ему нулевыми элементами строки все элементы матрицы равны нулю. Следующие матрицы имеют ступенчатый вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.2. Линейные операции над матрицами

Прежде чем обсуждать какие бы то ни было операции над *матрицами*, договоримся, какие матрицы мы будем считать равными.

Определение 10.2. Две матрицы называют ***равными***, если они имеют один и тот же *тип* и если у них совпадают соответствующие *элементы*.

Определение 10.3. ***Суммой матриц*** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ типа $m\times n$ называют матрицу $C=(c_{ij})$ того же типа с элементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,\,m}$, $j=\overline{1,\,n}$.

Для суммы матриц используют обозначение: $C=A+B$. В подробной записи

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=C.$$

Замечание 10.1. Сумма определена только для матриц одного типа.

Пример 10.1. Найдем сумму двух матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 10.4. ***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij})$ типа $m{\times}n$ ***на число*** $\alpha \in \mathbb{R}$ называют матрицу $C = (c_{ij})$ типа $m{\times}n$ с элементами $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Подробно это произведение выглядит так:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Замечание 10.2. Операции сложения и умножения на число для матриц аналогичны одноименным операциям над *векторами*. Эти операции также называют ***линейными***.

Для любых матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ из $M_{mn}(\mathbb{R})$ верны следующие свойства линейных операций.

1°. Сложение матриц коммутативно: $A + B = B + A$.

◀ Доказательства равенств матриц часто проводят, основываясь на определении 10.2, т.е. доказывают, что матрицы, стоящие в левой и правой частях равенства, имеют на одинаковых местах равные элементы. Так, свойство коммутативности суммы матриц следует из равенств

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B + A]_{ij},$$

среди которых первое и третье следуют из определения 10.3 суммы двух матриц, а второе верно в силу коммутативности сложения действительных чисел. ▶

2°. Сложение матриц ассоциативно: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

◀ Как и в случае коммутативности, свойство ассоциативности вытекает из равенств

$$[(A + B) + C]_{ij} = [A + B]_{ij} + [C]_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = \\ = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = [A]_{ij} + [B + C]_{ij} = [A + (B + C)]_{ij},$$

которые имеют место в силу определения 10.3 суммы двух матриц и ассоциативности сложения действительных чисел. ▶

Свойства 1° и 2° позволяют не заботиться о порядке операций сложения матриц и порядке слагаемых в матричных выражениях.

3°. Существует такая матрица $O \in M_{mn}(\mathbb{R})$, что для любой матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполнено равенство $A + O = A$.

◀ Матрица O — это *нулевая матрица* Θ типа $m{\times}n$. Действительно, $[A + \Theta]_{ij} = [A]_{ij} + [\Theta]_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij} = [A]_{ij}$. ▶

4°. Для любой матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ существует такая единственная матрица $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$, для которой выполнено равенство $A + B = \Theta$, где Θ — нулевая матрица.

◀ Если $A + B = \Theta$, то $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [\Theta]_{ij} = 0$ и, следовательно, $a_{ij} + b_{ij} = 0$. Значит, элементами b_{ij} матрицы B являются $b_{ij} = -a_{ij}$, и это доказывает как единственность, так и существование матрицы B. ▶

Матрицу B, о которой говорится в свойстве 4°, называют ***противоположной*** A и обозначают через $-A$. Эта матрица получается из матрицы A умножением на число -1.

Свойства 3° и 4° позволяют ввести операцию вычитания матриц. ***Разностью*** $\boldsymbol{P-Q}$ ***матриц*** P и Q одного типа называют матрицу $P+(-Q)$.

5°. Умножение матрицы на число ассоциативно: $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$.

◀ $[(\lambda\mu)A]_{ij}=(\lambda\mu)a_{ij}=\lambda(\mu a_{ij})=\lambda[\mu A]_{ij}$. ▶

6°. Умножение матрицы на число дистрибутивно относительно суммы действительных чисел: $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

◀ $[(\lambda+\mu)A]_{ij}=(\lambda+\mu)a_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}=[\lambda A]_{ij}+[\mu A]_{ij}=[\lambda A+\mu A]_{ij}$. ▶

7°. Умножение матрицы на число дистрибутивно относительно суммы матриц: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

◀ $[\lambda(A+B)]_{ij}=\lambda[A+B]_{ij}=\lambda(a_{ij}+b_{ij})=\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}=[\lambda A]_{ij}+[\lambda B]_{ij}=[\lambda A+\lambda B]_{ij}$. ▶

8°. Умножение матрицы на 1 не меняет ее: $1\cdot A=A$.

◀ $[1\cdot A]_{ij}=1\cdot[A]_{ij}=[A]_{ij}$. ▶

10.3. Транспонирование матриц

Определение 10.5. Для *матрицы* $A=(a_{ij})$ *типа* $m\times n$ ее ***транспонированной матрицей*** называют матрицу $A^{\mathrm{т}}=(c_{ij})$ типа $n\times m$ с *элементами* $c_{ij}=a_{ji}$.

При транспонировании матрицы ее *строки* становятся *столбцами* новой матрицы с сохранением их порядка. Точно так же столбцы исходной матрицы превращаются в строки транспонированной. Поэтому транспонирование можно рассматривать как преобразование симметрии матрицы относительно ее *главной диагонали*. Подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 10.2. Транспонируем следующие три матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}^{\mathrm{т}} = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m). \quad \#$$

Обсудим свойства операции транспонирования.

1°. $(A^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}=A$.

◀ Отметим, что матрицы $(A^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$ и A имеют одинаковые *размеры*. Кроме того, $[(A^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}]_{ij}=[(A^{\mathrm{т}})]_{ji}=[A]_{ij}$. ▶

2°. $(A+B)^{\mathrm{т}}=A^{\mathrm{т}}+B^{\mathrm{т}}$.

◀ $[(A+B)^{\mathrm{т}}]_{ij}=[(A+B)]_{ji}=[A]_{ji}+[B]_{ji}=[A^{\mathrm{т}}]_{ij}+[B^{\mathrm{т}}]_{ij}=[A^{\mathrm{т}}+B^{\mathrm{т}}]_{ij}$. ▶

3°. $(\lambda A)^{\mathrm{т}}=\lambda A^{\mathrm{т}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

◀ $[(\lambda A)^{\mathrm{т}}]_{ij}=[\lambda A]_{ji}=\lambda[A]_{ji}=\lambda[A^{\mathrm{т}}]_{ij}=[\lambda A^{\mathrm{т}}]_{ij}$. ▶

Если $A^{\mathrm{T}} = A$, то матрицу A называют ***симметрической***, а если $A^{\mathrm{T}} = -A$ — ***кососимметрической***. И в том и в другом случае матрица должна быть *квадратной*. Элементы симметрической матрицы, расположенные на местах, симметричных относительно главной диагонали, равны между собой. Действительно, $[A^{\mathrm{T}}]_{ij} = [A]_{ji}$ и из равенства $A^{\mathrm{T}} = A$ следует, что $[A]_{ji} = [A]_{ij}$. *Элементы* же кососимметрической матрицы, расположенные на местах, симметричных относительно главной диагонали, отличаются знаком, а *диагональные* — равны нулю. Действительно, $[A^{\mathrm{T}}]_{ij} = [A]_{ji}$ и из равенства $A^{\mathrm{T}} = -A$ следует, что $[A]_{ji} = -[A]_{ij}$. В частности, при $i = j$ выполняются равенства $[A]_{jj} = -[A]_{jj} = 0$.

Пример 10.3. Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ симметрические, а матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ кососимметрические.

10.4. Умножение матриц

Определение 10.6. Пусть даны *матрица* $A = (a_{ij})$ *типа* $m\times n$ и матрица $B = (b_{ij})$ типа $n\times p$. ***Произведением матриц*** A и B называют матрицу $C = (c_{ij})$ типа $m\times p$ с *элементами*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

которую обозначают $C = AB$.

Произведение определено лишь в том случае, когда количество *столбцов* первого сомножителя равно количеству *строк* второго. В формировании элемента c_{ij} произведения AB участвуют элементы i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Поэтому правило умножения матриц называют также правилом умножения „строка на столбец“:

$$i\begin{pmatrix} \rule[0.5ex]{4em}{3pt} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \rule{3pt}{5em} \end{pmatrix} \end{array} = i\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \blacksquare & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}.$$

Пример 10.4. Найдем произведение двух матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot 0 - 2\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Пример 10.5. Произведением *прямоугольной матрицы* и *матрицы-столбца* является матрица-столбец:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Пример 10.6. Найдем произведение трех *квадратных матриц второго порядка*, перемножив сначала первые две матрицы, а затем результат их произведения и третью матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & 0-6 \\ -3+8 & 0-12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -24 & -8 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Умножение *матрицы-строки* X *типа* $1\times n$ на матрицу-столбец Y типа $n\times 1$ дает матрицу типа 1×1, которую отождествляют с числом:

$$XY = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k.$$

Таким образом, произведение любой матрицы-строки и любой матрицы-столбца, имеющих одинаковое количество элементов, есть число, равное сумме произведений их элементов с одинаковыми индексами. Если матрица-строка и матрица-столбец имеют разное количество элементов, то их перемножить нельзя.

Замечание 10.3. Для числовых матриц типа 1×1 матричные операции суммы, разности, умножения и умножения матриц на действительные числа совпадают с соответствующими арифметическими операциями суммы, разности и умножения, выполняемыми с действительными числами. Вот почему матрицы типа 1×1 отождествляют с числами.

Существование произведения AB двух матриц не означает существования их произведения BA. Например, матрицы из примера 10.4 нельзя умножить в другом порядке.

Чтобы матрицу A типа $m\times n$ можно было умножить на матрицу B и слева, и справа (т.е. чтобы были определены оба произведения BA и AB), матрица B должна иметь тип $n\times m$. Квадратные матрицы A и B можно перемножить, если они имеют одинаковый порядок, причем в этом случае определены оба произведения (AB и BA), хотя равенство $AB = BA$ обычно нарушается.

Пример 10.7. Найдем произведения двух пар матриц A, B и C, D в одном и другом порядке:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix};$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что $CD = C$, $DC = \Theta$, хотя ни одна из этих двух матриц не является *нулевой*. #

Если определены оба произведения AB и BA и выполнено равенство $AB = BA$, то матрицы A и B называют ***коммутирующими*** или ***перестановочными***. Коммутирующие матрицы всегда квадратные и одного порядка.

Пример 10.8. Произведение *диагональных матриц* одного порядка есть диагональная матрица, элементами которой являются произведения соответствующих элементов перемножаемых матриц. Диагональные матрицы одного порядка являются перестановочными. Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & b_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2b_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_nb_n\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & b_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_n\end{pmatrix}. \quad \#$$

Операция умножения матриц имеет следующие свойства.

1°. Умножение матриц ассоциативно, т.е. $(AB)C = A(BC)$.

◄ Если матрицы A, B, C имеют типы $m\times n$, $n\times k$, $k\times l$ соответственно, то

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{r=1}^{k}[AB]_{ir}[C]_{rj} = \sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[B]_{sr}\right)[C]_{rj} = \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[B]_{sr}[C]_{rj} =$$

$$= \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{n}[A]_{is}\big([B]_{sr}[C]_{rj}\big) = \sum_{s=1}^{n}[A]_{is}\sum_{r=1}^{k}[B]_{sr}[C]_{rj} = \sum_{s=1}^{n}[A]_{is}[BC]_{sj} = [A(BC)]_{ij}.$$ ►

2°. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения матриц, т.е. $(A+B)C = AC + BC$.

◄ Если матрицы A, B имеют тип $m\times n$, а матрица C — тип $n\times k$, то

$$[(A+B)C]_{ij} = \sum_{r=1}^{n}[A+B]_{ir}[C]_{rj} = \sum_{r=1}^{n}\big([A]_{ir}+[B]_{ir}\big)[C]_{rj} = \sum_{r=1}^{n}([A]_{ir}[C]_{rj} + [B]_{ir}[C]_{rj}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}[A]_{ir}[C]_{rj} + \sum_{r=1}^{n}[B]_{ir}[C]_{rj} = [AC]_{ij} + [BC]_{ij} = [AC+BC]_{ij}.$$ ►

3°. Существует такая матрица $E \in M_n(\mathbb{R})$, что для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ выполнены равенства $AE = EA = A$.

◄ В качестве *матрицы* E можно взять *единичную* порядка n. ►

4°. Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ и *нулевой матрицы* $\Theta \in M_n(\mathbb{R})$ выполнено равенство $A\Theta = \Theta$.

◄ Вычислим элементы произведения $A\Theta$: $[A\Theta]_{ij} = \sum_{r=1}^{n}[A]_{ir}[\Theta]_{rj} = \sum_{r=1}^{n}[A]_{ir}0 = 0$. Видим, что все элементы матрицы $A\Theta$ равны нулю. ►

5°. Для любых матриц A и B типов $m\times n$ и $n\times k$ выполнено равенство $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, т.е. транспонированное произведение двух матриц равно произведению в обратном порядке *транспонированных матриц*.

◄ $$[(AB)^{\mathrm{T}}]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{r=1}^{n}[A]_{jr}[B]_{ri} = \sum_{r=1}^{n}[A^{\mathrm{T}}]_{rj}[B^{\mathrm{T}}]_{ir} = \sum_{r=1}^{n}[B^{\mathrm{T}}]_{ir}[A^{\mathrm{T}}]_{rj} = [B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}]_{ij}.$$ ►

Операция умножения матриц позволяет ввести операцию возведения квадратной матрицы в натуральную степень. Положим $A^1 = A$, $A^{n+1} = AA^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Отметим, что две степени A^n и A^m одной и той же матрицы являются матрицами одного порядка и перестановочны: $A^nA^m = A^mA^n = A^{n+m}$. Введем также нулевую степень квадратной матрицы, полагая $A^0 = E$, где E — единичная матрица того же порядка.

Введенная степень матрицы позволяет для квадратной матрицы вычислять выражения вида

$$a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0A^0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n},$$

т.е. *многочлены* от одного матричного аргумента.

Пример 10.9. Вычислим значение *квадратного трехчлена* $p(x) = 3x^2 - 4x + 5$ для квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Поскольку $p(x) = 3x^2 - 4x + 5x^0$, то $p(A) = 3A^2 - 4A + 5A^0$, где $A^0 = E$ — единичная матрица второго порядка. Вычислив $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, находим

$$p(A) = 3\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

10.5. Элементарные преобразования матриц

Следующие три операции называют ***элементарными преобразованиями строк матрицы***:

1) Умножение i-й строки матрицы на число $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которое будем записывать в виде $(i) \to \lambda(i)$.

2) Перестановка двух строк в матрице, например i-й и k-й строк:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую будем записывать в виде $(i) \leftrightarrow (k)$.

3) Добавление к i-й строке матрицы ее k-й строки с коэффициентом λ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i2}+\lambda a_{k2} & \ldots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

что будем записывать в виде $(i) \to (i) + \lambda(k)$.

Аналогичные операции над столбцами матрицы называют ***элементарными преобразованиями столбцов***.

Каждое элементарное преобразование строк или столбцов матрицы имеет ***обратное элементарное преобразование***, которое преобразованную матрицу превращает в исходную. Например, обратным преобразованием для перестановки двух строк является перестановка тех же строк.

Каждое элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы A можно трактовать как умножение A слева (справа) на матрицу специального вида. Эта матрица получается, если то же преобразование выполнить над *единичной матрицей*. Рассмотрим подробнее элементарные преобразования строк.

Пусть матрица B получается в результате умножения i-й строки матрицы A типа $m\times n$ на число $\lambda \neq 0$. Тогда $B = E_i(\lambda)A$, где матрица $E_i(\lambda)$ получается из единичной матрицы E порядка m умножением ее i-й строки на число λ.

Пусть матрица B получается в результате перестановки i-й и k-й строк матрицы A типа $m\times n$. Тогда $B = F_{ik}A$, где матрица F_{ik} получается из единичной матрицы E порядка m перестановкой ее i-й и k-й строк.

Пусть матрица B получается в результате добавления к i-й строке матрицы A типа $m\times n$ ее k-й строки с коэффициентом λ. Тогда $B = G_{ik}(\lambda)A$, где матрица G_{ik} получается из единичной матрицы E порядка m в результате добавления к i-й строке k-й строки с коэффициентом λ, т.е. на пересечении i-й строки и k-го столбца матрицы E нулевой элемент заменен на число λ.

Точно так же реализуются элементарные преобразования столбцов матрицы A, но при этом она умножается на матрицы специального вида не слева, а справа.

С помощью алгоритмов, которые основаны на элементарных преобразованиях строк и столбцов, матрицы можно преобразовывать к различному виду. Один из важнейших таких алгоритмов составляет основу доказательства следующей теоремы.

Теорема 10.1. С помощью элементарных преобразований строк любую *матрицу* можно привести к *ступенчатому виду.*

◀ Доказательство теоремы состоит в построении конкретного алгоритма приведения матрицы к ступенчатому виду. Этот алгоритм состоит в многократном повторении в определенном порядке трех операций, связанных с некоторым текущим элементом матрицы, который выбирается исходя из расположения в матрице. На первом шаге алгоритма в качестве текущего элемента матрицы выбираем верхний левый, т.е. $[A]_{11}$.

1^*. Если текущий элемент равен нулю, переходим к операции 2^*. Если же он не равен нулю, то строку, в которой расположен текущий элемент (текущую строку), добавляем с соответствующими коэффициентами к строкам, расположенным ниже, так, чтобы все элементы матрицы, стоящие в столбце под текущим элементом, обратились в нуль. Например, если текущий элемент есть $[A]_{ij}$, то в качестве коэффициента для k-й строки, $k = i+1, \ldots$, нам следует взять число $-[A]_{kj}/[A]_{ij}$. Выбираем новый текущий элемент, смещаясь в матрице на один столбец вправо и на одну строку вниз, и переходим к следующему шагу, повторяя операцию 1^*. Если такое смещение невозможно, т.е. достигнут последний столбец или строка, преобразования прекращаем.

2^*. Если текущий элемент в некоторой строке матрицы равен нулю, то просматриваем элементы матрицы, расположенные в столбце под текущим элементом. Если среди них нет ненулевых, переходим к операции 3^*. Пусть в k-й строке под текущим элементом находится ненулевой элемент. Меняем местами текущую и k-ю строки и возвращаемся к операции 1^*.

3^*. Если текущий элемент и все элементы под ним (в том же столбце) равны нулю, меняем текущий элемент, смещаясь в матрице на один столбец вправо. Если такое смещение возможно, т.е. текущий элемент находится не в самом правом столбце матрицы, то повторяем операцию 1^*. Если же мы уже достигли правого края матрицы и смена текущего элемента невозможна, то матрица имеет ступенчатый вид, и мы можем прекратить преобразования.

Так как матрица имеет конечные *размеры*, а за один шаг алгоритма положение текущего элемента смещается вправо хотя бы на один столбец, процесс преобразований закончится, причем не более чем за n шагов (n — количество столбцов в матрице). Значит, наступит момент, когда матрица будет иметь ступенчатый вид. ▶

Пример 10.10. Преобразуем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

Используя алгоритм из доказательства теоремы 10.1 и записывая матрицы после окончания выполнения его операций, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{matrix} (2) \to (2) - 2(1) \\ (3) \to (3) - 4(1) \end{matrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \boxed{(3) \to (3) - 3(2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

10.6. Блочные матрицы

Если разделить некоторую *матрицу* A на части вертикальными и горизонтальными прямыми, то получаются прямоугольные ячейки, являющиеся сами по себе матрицами. Эти ячейки называют ***блоками матрицы***. Сама матрица A может рассматриваться как таблица, *элементами* которой являются более мелкие матрицы $M_{\alpha\beta}$: $A = (M_{\alpha\beta})$. При таком построении матрица A составляется из блоков, и поэтому ее называют ***блочной***. Например, матрицу A разобьем на блоки

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right)$$

и обозначим их

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу A можно записать в виде блочной матрицы, элементами которой будут эти матрицы $M_{\alpha\beta}$: $A = \big(M_{\alpha\beta}\big) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$.

Для составления блочной матрицы из серии матриц $M_{\alpha\beta}$ необходимо, чтобы подмножества матриц из серии с одинаковым значением индекса α имели одинаковое количество строк, а подмножества матриц с одинаковым значением индекса β — одинаковое количество столбцов. Эти подмножества образуют соответственно „блочные“ строки и „блочные“ столбцы (соответствующие нескольким строкам или столбцам обычной записи матрицы).

Пример 10.11. Указанным требованиям удовлетворяют следующие четыре матрицы:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}.$$

Поэтому из них можно составить блочную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} \\ \hline c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & d_{21} & d_{22} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & d_{31} & d_{32} \end{array}\right). \quad \#$$

Основное свойство блочных матриц состоит в том, что операции над блочными матрицами совершаются по тем же правилам, что и операции над обычными матрицами. В самом деле, это в достаточной степени очевидно для *суммы матриц* и *произведения матрицы на число*. Однако относительно суммы это можно утверждать лишь в том случае, когда размеры слагаемых блочных матриц, равно как и размеры отдельных блоков с равными индексами у слагаемых, совпадают.

Подробнее рассмотрим ситуацию с *умножением* блочных *матриц*. Пусть блочные матрицы $A = (A_{\alpha\beta})$ и $B = (B_{\beta\gamma})$ удовлетворяют двум условиям.

1. Число „блочных“ столбцов матрицы A совпадает с числом „блочных“ строк матрицы B (т.е. индекс β для A и B изменяется в одинаковых пределах).

2. Для любых индексов α, β, γ число столбцов у матрицы $A_{\alpha\beta}$ совпадает с числом строк у матрицы $B_{\beta\gamma}$.

Тогда $AB = (C_{\alpha\gamma})$, $C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}$. Для доказательства этого равенства достаточно расписать обе его части через элементы матриц.

Указанные два условия довольно сложны, но все упрощается, если блоки матриц — это *квадратные матрицы* одного *порядка*. В этом случае условия близки к обычным: число „блочных“ столбцов множимого должно совпадать с числом „блочных“ строк множителя.

Представление матриц в блочном виде часто оказывается удобным при нахождении суммы и произведения, если матрицы имеют достаточно большие размеры, а их согласованные разбиения на блоки содержат *нулевые*, *единичные*, *диагональные*, *треугольные матрицы*.

Пример 10.12. Найдем произведения следующих блочных матриц предполагая, что все операции определены:

$$\begin{pmatrix} \Theta & E \\ E & \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & 3E \\ -E & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC+3D \\ -C+BD \end{pmatrix}. \quad \#$$

При *транспонировании* блочной *матрицы* транспонированию подлежат и ее элементы. Например, $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} M_{11}^{\mathrm{T}} & M_{21}^{\mathrm{T}} \\ M_{12}^{\mathrm{T}} & M_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

Пример 10.13. Транспонируем блочную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \end{array}\right).$$

10.7. Прямая сумма матриц

Определение 10.7. Пусть даны *квадратные матрицы* A *порядка* m и B порядка n. ***Прямой суммой матриц*** A и B называют квадратную *блочную матрицу* $C = A \oplus B$ порядка $m+n$, равную $C = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{pmatrix}$, где Θ обозначает нулевой блок (*нулевую матрицу* типа $m{\times}n$ вверху справа и $n{\times}m$ внизу слева).

Укажем основные свойства прямой суммы матриц.

1°. Прямая сумма ассоциативна: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

◀ В результате выполнения операций в левой и правой частях равенства получается одна и та же ***блочно-диагональная матрица*** $\begin{pmatrix} A & \Theta & \Theta \\ \Theta & B & \Theta \\ \Theta & \Theta & C \end{pmatrix}$, где нулевые матрицы имеют соответствующий *тип*. ▶

2°. Пусть квадратные матрицы A_1 и A_2 имеют порядок m, а квадратные матрицы B_1 и B_2 — порядок n. Тогда $(A_1 \oplus B_1) + (A_2 \oplus B_2) = (A_1 + A_2) \oplus (B_1 + B_2)$, $(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = A_1A_2 \oplus B_1B_2$.

◀ Действительно, эти записи означают следующее:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ \Theta & B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & \Theta \\ \Theta & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1+A_2 & \Theta \\ \Theta & B_1+B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ \Theta & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & \Theta \\ \Theta & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 & \Theta \\ \Theta & B_1B_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует операциям над блочными матрицами. ▶

Лекция 11
ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратная матрица. Теорема о ее единственности. Критерий существования обратной матрицы. Присоединенная матрица. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований. Матрица, обратная произведению двух обратимых матриц. Решение матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$ с невырожденной матрицей A. Формулы Крамера.

11.1. Обратная матрица и ее свойства

Определение 11.1. Пусть A — *квадратная матрица порядка* n. Квадратную матрицу B того же порядка называют ***обратной*** к A, если $AB = BA = E$, где E — *единичная матрица* порядка n.

Обратную матрицу обозначают A^{-1}. Она позволяет определить целую отрицательную степень матрицы A. А именно, для $n > 0$ полагают $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Теорема 11.1. Если квадратная матрица A имеет обратную матрицу, то обратная матрица единственная.

◄ Предположим, что матрица A имеет две обратные матрицы B и B'. Тогда, согласно определению 11.1 обратной матрицы, выполнены, в частности, равенства $AB' = E$ и $BA = E$. Используя ассоциативность умножения матриц, получаем $B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B'$, т.е. матрицы B и B' совпадают. ►

Квадратная матрица не всегда имеет обратную. Установить, имеет ли данная матрица обратную, позволяет следующий критерий.

Теорема 11.2. Для того чтобы квадратная матрица A порядка n имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

◄ Необходимость. Пусть A^{-1} — матрица, обратная к A. Тогда $\det(AA^{-1}) = \det E = 1$, но, согласно свойству *определителей*, $\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$. Поэтому $\det A \det A^{-1} = 1$ и, следовательно, $\det A \neq 0$.

Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$. Обозначим через A_{ij} *алгебраическое дополнение* матрицы A, соответствующее элементу a_{ij}, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} — *минор* этого же элемента.

Раскрывая определитель матрицы A по i-й строке, получаем равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \det A, \quad i = \overline{1,\, n}.$$

По свойствам определителей, для любых индексов $k \neq i$ выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0.$$

Рассмотрим теперь квадратную матрицу B порядка n с элементами $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$. Матрица $C = AB$ имеет *элементы*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{A_{kj}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

т.е. C — единичная матрица.

Аналогично матрица $C' = BA$ имеет элементы

$$c'_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{A_{ik}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

следовательно, матрица C' также является единичной.

Согласно определению 11.1, матрица B является обратной для A: $B = A^{-1}$. ►

Следствие 11.1. Если квадратная матрица A имеет обратную, то $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

◄ Действительно, $\det A^{-1} \det A = \det(A^{-1}A) = \det E = 1$. ►

Квадратную матрицу с ненулевым определителем называют ***невырожденной*** или ***неособой***. В противном случае, когда определитель матрицы равен нулю, ее называют ***вырожденной***. Итак, для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Теорема 11.3. Если квадратные матрицы A и B порядка n имеют обратные матрицы, то и их *произведение* имеет обратную матрицу, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

◄ В соответствии с определением 11.1 обратной матрицы достаточно доказать два равенства: $(AB)B^{-1}A^{-1} = E$, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$. Используя ассоциативность умножения матриц (см. **10.4**), получаем

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E. \qquad ►$$

Теорема 11.4. Если матрица A порядка n имеет обратную, то и *транспонированная матрица* A^{T} имеет обратную, причем $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

◄ Нужно убедиться, что $A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = E$ и $(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = E$. Используя свойство произведения матриц относительно операции транспонирования, имеем

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E, \quad (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} = E. \qquad ►$$

11.2. Вычисление обратной матрицы

Применяют два основных метода вычисления *обратной матрицы*. Первый вытекает из теоремы 11.2 и состоит в следующем. Пусть дана *квадратная матрица A порядка n*. *Матрицу A^*, транспонированную* к матрице (A_{ij}) *алгебраических дополнений*, называют ***присоединенной***. Как следует из доказательства теоремы 11.2, если A — *невырожденная матрица*, то обратная к ней имеет вид $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Таким образом, чтобы для квадратной матрицы порядка n найти обратную матрицу, надо вычислить один *определитель порядка n* и составить присоединенную матрицу, т.е. вычислить n^2 определителей порядка $n-1$. Метод присоединенной матрицы эффективен при $n = 2$ или $n = 3$, но при росте n становится слишком трудоемким.

Пример 11.1. Выясним, имеет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ обратную и если имеет найдем ее.

Поскольку $\det A = -2$, матрица A является невырожденной и, согласно теореме 11.2, имеет обратную. Для ее вычисления последовательно находим

$$A^{*\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для квадратной матрицы A второго порядка присоединенная матрица A^* получается перестановкой в A *диагональных элементов* и изменением знака двух других.

Проверка ответа выполняется в соответствии с определением 11.1 обратной матрицы:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Второй метод вычисления обратной матрицы состоит в преобразовании исходной матрицы к более простому виду с помощью *элементарных преобразований строк*. Чтобы найти матрицу A^{-1}, обратную к A, фактически надо решить *матричное уравнение* $AX = E$. Отметим, что если над матрицей A выполняется какое-либо элементарное преобразование строк, то это же преобразование осуществляется и над матрицей AX, поскольку любое элементарное преобразование строк матрицы эквивалентно умножению ее слева на соответствующую матрицу специального вида (см. **10.5**). Таким образом, если в уравнении $AX = E$ над матрицами A и E одновременно выполнить какое-либо элементарное преобразование строк, т.е. домножить это равенство слева на некоторую матрицу специального вида, то в результате получится новое матричное уравнение $A_1X = B_1$. Оба эти матричные уравнения имеют одно и то же решение, так как любое элементарное преобразование строк имеет *обратное элементарное преобразование* строк. Последовательность элементарных преобразований строк надо подобрать так, чтобы на s-м шаге матрица A превратилась в *единичную матрицу*. В результате этих s шагов получается уравнение $A_sX = B_s$, где $A_s = E$, т.е. $X = B_s$. Итак, поскольку A^{-1} является решением уравнения $AX = E$, которое эквивалентно $X = B_s$, то $A^{-1} = B_s$.

Чтобы синхронно выполнять преобразования над матрицами в левой и правой частях матричного уравнения $AX = E$, записывают *блочную матрицу* $(A \,|\, E)$ и выполняют такие элементарные преобразования строк этой матрицы, чтобы вместо A получить единичную матрицу E.

Пример 11.2. Продемонстрируем изложенный метод нахождения обратной матрицы для матрицы из примера 11.1. Для этого записываем матрицу $(A|E)$ и выполняем элементарные преобразования ее строк в следующем порядке:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \boxed{(2) \to (2) - 3(1)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \boxed{(1) \to (1) + (2)} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \boxed{(2) \to -0{,}5(2)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

11.3. Решение матричных уравнений

Мы рассмотрим два вида ***матричных уравнений*** относительно неизвестной *матрицы* X: $AX = B$ и $XA = B$, где A и B — известные матрицы, причем *матрица A квадратная* и *невырожденная*. Некоторую матрицу называют ***решением матричного уравнения*** относительно неизвестной матрицы X, если при ее подстановке вместо X матричное уравнение превращается в тождество.

Начнем с уравнения $AX = B$ и изложим два метода его решения.

Первый метод предполагает вычисление *обратной матрицы* A^{-1} (например, при помощи *присоединенной матрицы*) и дает запись решения матричного уравнения в виде $X = A^{-1}B$. Действительно, подставляя $X = A^{-1}B$ в уравнение $AX = B$, получаем $A(A^{-1}B) = B$, т.е. $B = B$, и $X = A^{-1}B$ является решением матричного уравнения $AX = B$. Более того, это решение единственно, так как для любого другого решения X' выполнено тождество $AX' = B$, после умножения которого слева на A^{-1} оказывается, что $A^{-1}(AX') = A^{-1}B$, т.е. $(A^{-1}A)X' = X$ и, следовательно, $X' = X$.

Второй метод основан на *элементарных преобразованиях строк* блочной матрицы $(A\,|\,B)$ и имеет своей целью преобразование ее к виду $(E\,|\,B_1)$, в котором вместо матрицы A стоит *единичная матрица* E. Тогда матрица B_1 и будет решением уравнения. Если матрица B совпадает с единичной, то в этом частном случае получается метод элементарных преобразований вычисления обратной матрицы.

Пример 11.3. Найдем решение матричного уравнения $AX = B$, имеющего вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся методом элементарных преобразований. Для этого запишем матрицу $(A|B)$ и выполним те же элементарные преобразования ее строк, что и в примере 11.2 (так как матрицы A и цели преобразований совпадают):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка ответа выполняется подстановкой найденного решения в исходное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Матричное уравнение $XA = B$ также можно решить двумя способами. Если известна матрица A^{-1}, то умножаем справа на A^{-1} матричное уравнение $XA = B$ и после очевидных преобразований $(XA)A^{-1} = BA^{-1}$, $X(AA^{-1}) = BA^{-1}$, $XE = BA^{-1}$ получаем ответ в виде произведения двух матриц $X = BA^{-1}$.

Пример 11.4. Найдем решение матричного уравнения $XA = B$, имеющего вид

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку обратная матрица A^{-1} известна (см. пример 11.2), то

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Другой метод решения матричного уравнения $XA = B$ состоит в транспонировании его левой и правой частей $(XA)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}$, $A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}$. После введения новой неизвестной матрицы $Y = X^{\mathrm{T}}$ получаем уравнение вида $A^{\mathrm{T}}Y = B^{\mathrm{T}}$, которое решается методом элементарных преобразований.

Пример 11.5. Чтобы решить матричное уравнение из примера 11.4, транспонируем его $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. После элементарных преобразований строк блочной матрицы получаем

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim \boxed{(2) \to (2) - 2(1)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \boxed{(2) \to -0{,}5(2)} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \boxed{(1) \to (1) - 3(2)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Итак, $X^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, что, конечно же, совпадает с решением этого уравнения, найденным в примере 11.4.

11.4. Формулы Крамера

Рассмотрим *СЛАУ* с *квадратной невырожденной матрицей* A в *матричной записи* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. В такой форме СЛАУ представляет собой частный случай *матричного уравнения* $AX = B$ при $B = \boldsymbol{b}$ и $X = \boldsymbol{x}$ (см. **11.3**). Поэтому она имеет единственное решение $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$, где A^{-1} — *матрица, обратная* к A.

Чтобы выразить это единственное решение через *коэффициенты СЛАУ*, запишем A^{-1} в виде: $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, где $\alpha_{ij} = A_{ji}/\det A$, а A_{ji} — *алгебраическое дополнение элемента* a_{ji} *матрицы* A. Перейдем от матричного равенства $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ к его координатной записи. Тогда для первых элементов в столбцах левой и правой частей последнего равенства имеем

$$x_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \ldots + \alpha_{1n}b_n = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\det A}.$$

Числитель представляет собой *разложение по* 1-му *столбцу определителя*

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

получающегося, если в матрице A заменить 1-й столбец на столбец *свободных членов*. Аналогично находим, что

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}, \quad j = \overline{1,\, n}, \qquad (11.1)$$

где Δ_j — *определитель матрицы*, получающейся из матрицы A заменой j-го столбца на столбец свободных членов. Таким образом, установлено следующее ***правило Крамера***.

Теорема 11.5. СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей имеет решение, и притом единственное, которое определяется по ***формулам Крамера*** (11.1).

Следствие 11.2. *Однородная СЛАУ* с квадратной невырожденной матрицей имеет единственное решение — нулевое.

Если матрица СЛАУ не является квадратной невырожденной, то формулы Крамера не работают и приходится использовать другие методы нахождения решений.

Лекция 12
РАНГ МАТРИЦЫ

Минор матрицы. Ранг матрицы. Базисный минор. Линейная зависимость и линейная независимость строк и столбцов матрицы. Критерий линейной зависимости. Теорема о базисном миноре и ее следствия. Инвариантность ранга матрицы относительно ее элементарных преобразований. Способы вычисления ранга матрицы.

Определение 12.1. ***Минором порядка k*** *матрицы* A *типа* $m\times n$ называют *определитель*, который составлен из *элементов* этой матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.

Если выбранные строки имеют номера i_1, i_2, …, i_k, а столбцы — j_1, j_2, …, j_k, то соответствующий минор будем обозначать $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

О миноре $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}$ говорят, что:
– строки i_1, i_2, …, i_k и столбцы j_1, j_2, …, j_k матрицы входят в него;
– он образован этими строками и столбцами;
– он располагается на пересечении этих строк и столбцов;
– он располагается в этих строках и столбцах матрицы.

Строки, входящие в минор, попарно различны, и в обозначении минора естественно упорядочить их по возрастанию номеров. Это же относится и к столбцам. Правило возрастания номеров означает, что, например, $M_{1,3,4}^{3,5,6}$ является минором некоторой матрицы, расположенным на пересечении 1-й, 3-й и 4-й строк с 3-м, 5-м и 6-м столбцами, в то время как $M_{1,3,4}^{5,3,6}$ минором не является, потому что нарушен порядок столбцов (5-й столбец указан в верхних индексах перед 3-м). Это просто определитель третьего порядка, который получается из минора $M_{1,3,4}^{3,5,6}$ матрицы при перестановке в нем первых двух столбцов. Поэтому, согласно свойствам определителей, $M_{1,3,4}^{5,3,6} = -M_{1,3,4}^{3,5,6}$.

Итак, мы следуем соглашению, что обозначение $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}$ соответствует минору матрицы, если верхние и нижние индексы в нем строго возрастают. В противном случае, если индексы расположены в ином порядке, это обозначение соответствует определителю, который получается из соответствующего минора перестановкой строк и столбцов.

Пример 12.1. У квадратной матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ девять миноров первого порядка, девять миноров второго порядка и один минор третьего порядка.

Определение 12.2. ***Рангом матрицы*** называют число, которое равно максимальному порядку среди ее ненулевых миноров.

Для ранга матрицы A используют обозначение $\mathrm{Rg}\,A$.

Если *квадратная матрица порядка* n *невырождена*, то ее ранг равен ее порядку n: ненулевым является единственный минор максимального порядка n, совпадающий с *определителем матрицы*. В частности, ранг *единичной матрицы* E порядка n равен n.

Если квадратная матрица *вырождена*, то ее ранг меньше ее порядка: единственный минор максимального порядка, равного порядку матрицы, является нулевым, и в этом случае ненулевые миноры имеют меньший порядок. Ранг *нулевой матрицы* полагают равным нулю.

Ранг *диагональной матрицы* равен количеству ее ненулевых *диагональных элементов*.

Непосредственно из определения ранга матрицы следует, что ранг имеет следующее свойство, полностью его характеризующее.

Свойство 12.1. Если ранг матрицы равен r, то матрица имеет хотя бы один минор порядка r, не равный нулю, а все ее миноры больших порядков равны нулю.

Теорема 12.1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется, т.е. $\operatorname{Rg} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{Rg} A$.

◀ Если мы покажем, что при транспонировании матрицы A ее ранг r не убывает, т.е. $\operatorname{Rg} A^{\mathrm{T}} \geqslant r$, то сможем прийти к следующему заключению. Поскольку $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$, то $r = \operatorname{Rg} A \leqslant \operatorname{Rg} A^{\mathrm{T}} \leqslant \operatorname{Rg}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \operatorname{Rg} A = r$, и поэтому $\operatorname{Rg} A^{\mathrm{T}} = r$.

Итак, докажем, что $\operatorname{Rg} A^{\mathrm{T}} \geqslant r$. Согласно определению 12.2 ранга матрицы, существует ее минор порядка r, отличный от нуля. Пусть это будет минор $M = M^{j_1 j_2 \ldots j_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$. При транспонировании строки и столбцы меняются местами. Поэтому минору M, образованному строками i_1, i_2, ..., i_r и столбцами j_1, j_2, ..., j_r матрицы A, соответствует минор $N = N^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ матрицы A^{T}, образованный строками j_1, j_2, ..., j_r и столбцами i_1, i_2, ..., i_r. Ясно, что эти миноры получаются один из другого операцией транспонирования. Согласно свойствам определителей, они равны. Таким образом, найден минор r-го порядка в матрице A^{T}, а именно минор N, который не равен нулю. Следовательно, $\operatorname{Rg} A^{\mathrm{T}} \geqslant r$. ▶

Теорема 12.2. Ранг матрицы не меняется при *элементарных преобразованиях* ее *строк* и *столбцов*. #

12.1. Линейная зависимость строк и столбцов

Строки и столбцы *матриц* можно рассматривать как *матрицы-строки* и, соответственно, *матрицы-столбцы*. Поэтому над ними, как и над любыми другими матрицами, можно выполнять *линейные операции*. Ограничение на операцию сложения состоит в том, что строки (столбцы) должны быть одинаковой *длины* (*высоты*), но это условие всегда выполнено для строк (столбцов) одной матрицы.

Линейные операции над строками (столбцами) дают возможность составлять строки (столбцы) в виде выражений $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \boldsymbol{a}_s$, где $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_s$ — произвольный набор строк (столбцов) одинаковой длины (высоты), а α_1, ..., α_s — действительные числа. Такие выражения называют ***линейными комбинациями строк*** (***столбцов***).

Определение 12.3. ***Строки*** (***столбцы***) $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_s$ называют ***линейно независимыми***, если равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}, \tag{12.1}$$

где $\boldsymbol{0}$ в правой части — нулевая строка (столбец), возможно лишь при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$. В противном случае, когда существуют такие действительные числа α_1, ..., α_s, не равные нулю одновременно, что выполняется равенство (12.1), эти строки (столбцы) называют ***линейно зависимыми***.

Следующее утверждение известно как критерий линейной зависимости.

Теорема 12.3. Строки (столбцы) $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_s$, $s > 1$, линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна (один) из них является линейной комбинацией остальных.

◀ Доказательство проведем для строк, а для столбцов оно аналогично.

Необходимость. Если строки $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_s$ линейно зависимы, то, согласно определению 12.3, существуют такие действительные числа α_1, ..., α_s, не равные нулю одновременно, что $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}$. Выберем ненулевой коэффициент α_i. Для определенности пусть это будет α_1. Тогда $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 = (-\alpha_2)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (-\alpha_s)\boldsymbol{a}_s$ и, следовательно, $\boldsymbol{a}_1 = \left(-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \left(-\dfrac{\alpha_s}{\alpha_1}\right)\boldsymbol{a}_s$, т.е. строка $\boldsymbol{a}_1$ представляется в виде линейной комбинации остальных строк.

Достаточность. Пусть, например, $\boldsymbol{a}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{a}_s$. Тогда $1\boldsymbol{a}_1 + (-\lambda_2)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (-\lambda_s)\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}$. Первый коэффициент линейной комбинации равен единице, т.е. он ненулевой. Согласно определению 12.3, строки $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_s$ линейно зависимы. ▶

Теорема 12.4. Пусть строки (столбцы) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ линейно независимы, а хотя бы одна из строк (столбцов) $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ является их линейной комбинацией. Тогда все строки (столбцы) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ линейно зависимы.

◀ Пусть, например, $\boldsymbol{b}_1$ есть линейная комбинация $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$, т.е. $\boldsymbol{b}_1 = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s\boldsymbol{a}_s$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, s}$. В эту линейную комбинацию добавим строки (столбцы) $\boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ (при $l > 1$) с нулевыми коэффициентами: $\boldsymbol{b}_1 = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s\boldsymbol{a}_s + 0\boldsymbol{b}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{b}_l$. Согласно теореме 12.3, строки (столбцы) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ линейно зависимы. ▶

12.2. Теорема о базисном миноре

Среди *миноров матрицы* могут быть как равные нулю, так и отличные от нуля.

Определение 12.4. Минор M матрицы A называют ***базисным***, если выполнены два условия:

а) он не равен нулю;

б) его порядок равен *рангу матрицы* A.

Матрица A может иметь несколько базисных миноров. *Строки* и *столбцы* матрицы A, в которых расположен выбранный базисный минор, называют ***базисными***.

Следующую теорему, занимающую одно из центральных мест в теории матриц и ее приложениях, называют ***теоремой о базисном миноре***.

Теорема 12.5. Базисные строки (столбцы) матрицы A, соответствующие любому ее базисному минору M, *линейно независимы*. Любые строки (столбцы) матрицы A, не входящие в M, являются *линейными комбинациями* базисных строк (столбцов).

◀ Доказательство проведем для строк. Пусть ранг матрицы $A = (a_{ij})$ *типа* $m\times n$ равен r. Фиксируем какой-либо ее базисный минор M и соответствующие ему базисные строки матрицы A.

Докажем, что базисные строки линейно независимы. Предположим, что они *линейно зависимы*. Тогда по теореме 12.3 одна из них является линейной комбинацией остальных базисных строк. Согласно свойствам определителей, минор M равен нулю. Это противоречит тому, что минор M базисный.

Теперь докажем, что любая строка матрицы A, не входящая в базисный минор, является линейной комбинацией базисных строк. Предположим, не ограничивая общности доказательства, что базисный минор M расположен в верхнем левом углу матрицы. Пусть i — номер строки, не являющейся базисной, т.е. $r+1 \leqslant i \leqslant m$. Покажем, что *определитель порядка* $r+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

полученный добавлением к минору M элементов i-й строки и произвольного j-го столбца матрицы A, $j = \overline{1, n}$, равен нулю. При $j \leqslant r$ определитель равен нулю, так как он содержит два одинаковых столбца. Если же $j > r$, то $\Delta = 0$, так как в этом случае Δ является минором матрицы A, порядок которого равен $r+1$ и больше ранга матрицы. Итак, $\Delta = 0$.

Раскладывая определитель Δ по последнему столбцу, получаем равенство

$$A_{1,r+1}a_{1j} + A_{2,r+1}a_{2j} + \ldots + A_{r,r+1}a_{rj} + A_{r+1,r+1}a_{ij} = 0,$$

в котором через $A_{1,r+1}, A_{2,r+1}, \ldots, A_{r,r+1}, A_{r+1,r+1}$ обозначены *алгебраические дополнения* соответствующих *элементов* рассматриваемого *определителя*. Отметим, что эти алгебраические дополнения не зависят от номера j, т.е. не зависят от того, элементы какого из столбцов матрицы A взяты в качестве последнего столбца определителя Δ. Кроме того, $A_{r+1,r+1} = M \neq 0$. Поэтому из последнего равенства следует, что для всех $j = \overline{1,\ n}$

$$a_{ij} = b_1 a_{1j} + b_2 a_{2j} + \ldots + b_r a_{rj},$$

где коэффициенты $b_k = -A_{k,r+1}/A_{r+1,r+1}$, $k = \overline{1,\ r}$, не зависят от j, а это означает, что i-я строка $(r + 1 \leqslant i \leqslant m)$ матрицы A является линейной комбинацией первых r ее строк, т.е. линейной комбинацией ее базисных строк. ►

Следствие 12.1. Для того чтобы *квадратная матрица* была *невырожденной*, необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно независимы.

◄ Необходимость. Если квадратная матрица A невырождена, то ее ранг равен ее порядку, а ее определитель является базисным минором. Поэтому все строки (столбцы) являются базисными и по теореме 12.5 о базисном миноре они линейно независимы.

Достаточность. Если все строки (столбцы) квадратной матрицы A являются линейно независимыми, то они являются базисными. Действительно, если бы только некоторые из них были базисными, то, согласно теореме 12.5 о базисном миноре, оставшиеся были бы линейными комбинациями базисных и, следовательно, строки (столбцы) матрицы A, согласно теореме 12.4, были бы линейно зависимыми. Так как все строки и столбцы квадратной матрицы A являются базисными, а им соответствует определитель матрицы, то он является базисным минором и, следовательно, согласно определению 12.4, отличен от нуля, т.е. квадратная матрица A невырождена. ►

Теорема 12.6. Линейно независимые строки (столбцы) матрицы, количество которых равно рангу матрицы, являются базисными строками (столбцами).

◄ Докажем теорему для строк. Зафиксируем произвольный набор из r линейно независимых строк матрицы, где r — это ранг матрицы. Нам достаточно показать, что хотя бы один из базисных миноров расположен в фиксированных строках. Отбросим остальные строки матрицы и докажем, что ранг новой матрицы, содержащей r строк, равен r. Так как новая матрица не имеет миноров порядка больше чем r, то ее ранг не может превосходить r. Если бы он был меньше r, то только часть этих r фиксированных строк были бы базисными в новой матрице, а остальные, согласно теореме 12.5 о базисном миноре, являлись бы их линейными комбинациями. Согласно теореме 12.4, последнее означало бы линейную зависимость фиксированных r строк, что противоречит условию теоремы.

Итак, ранг новой матрицы равен r. Ее базисный минор имеет порядок r и является ненулевым минором порядка r исходной матрицы, расположенным в рассмотренных фиксированных r строках. ►

Теорема 12.7 (Теорема о ранге матрицы). Для любой матрицы ее ранг равен максимальному количеству ее линейно независимых строк (столбцов).

◄ Доказательство теоремы проведем для строк. Согласно теореме 12.5 о базисном миноре, базисные строки линейно независимы. Следовательно, максимальное количество k линейно независимых строк матрицы не может быть меньше ранга r матрицы. Итак, $k \geqslant r$.

Остается доказать, что $k \leqslant r$. Отбросим те строки матрицы, которые не входят в число рассматриваемых k линейно независмых строк. Получим матрицу, в которой все k строк линейно независимы. Согласно теореме 12.6, все k строк этой матрицы являются базисными, а ее ранг равен k. Базисный минор матрицы из k строк имеет порядок k и является ненулевым минором порядка k исходной матрицы. Следовательно, $k \leqslant r$. ►

Следствие 12.2. Для любой матрицы максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

12.3. Вычисление ранга матрицы

Для вычисления *ранга матрицы* применяют два метода: метод окаймляющих миноров и метод элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров. *Минор* M' матрицы A называют ***окаймляющим*** для минора M, если он получается из последнего добавлением одной новой строки и одного нового столбца матрицы A. Ясно, что порядок окаймляющего минора M' на единицу больше, чем порядок минора M.

Метод окаймляющих миноров. Метод окаймляющих миноров, позволяющий найти один из *базисных миноров* матрицы, состоит в следующем. Выбирается ненулевой минор первого порядка (ненулевой *элемент матрицы*). К очередному ненулевому минору последовательно добавляются такие строка и столбец, чтобы новый окаймляющий минор оказался ненулевым. Если этого сделать нельзя, то последний ненулевой минор является базисным (что утверждает следующая ниже теорема). Этот процесс рано или поздно закончится из-за ограниченных размеров матрицы.

Теорема 12.8. Если для некоторого минора матрицы все окаймляющие его миноры равны нулю, то он является базисным. #

Пример 12.2. Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге выбираем любой ненулевой элемент матрицы, например левый верхний элемент, т.е. 2. Это ненулевой минор первого порядка.

На втором шаге строим окаймляющий минор второго порядка. Добавляем 2-ю строку и 2-й столбец и вычисляем получающийся окаймляющий минор

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это окаймление не подходит.

Меняем 2-й столбец на 3-й. Получаем минор второго порядка

$$M_{1,2}^{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Это окаймление подходит.

Третий шаг: добавляем к этому минору 3-ю строку и можно снова попытаться использовать 2-й столбец. Оказывается, что

$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 4 - 2 = 1 \neq 0,$$

значит, выбранный минор третьего порядка подходит.

Четвертый шаг: добавляем 4-ю строку (других нет) и 4-й столбец и вычисляем определитель четвертого порядка

$$M_{1,2,3,4}^{1,2,3,4} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Выбранный окаймляющий минор не подходит. Меняем 4-й столбец на 5-й:

$$M_{1,2,3,4}^{1,2,3,5} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, ненулевой минор третьего порядка $M_{1,2,3}^{1,2,3}$ имеет два окаймляющих минора четвертого порядка и оба они равны нулю. Других окаймляющих миноров четвертого порядка нет. Поэтому делаем вывод, что $M_{1,2,3}^{1,2,3}$ — базисный минор, а ранг матрицы равен трем.

Метод элементарных преобразований. При *элементарных преобразованиях строк (столбцов)* матрицы ее ранг, согласно теореме 12.2, не меняется. С помощью этих преобразований можно так упростить матрицу, чтобы ранг новой матрицы легко вычислялся.

Например, согласно теореме 10.1, с помощью элементарных преобразований строк любую матрицу можно привести к ступенчатому виду. Ранг же *ступенчатой матрицы* равен количеству ненулевых строк. Базисным в ней является минор, расположенный на пересечении ненулевых строк со столбцами, соответствующими первым слева ненулевым элементам в каждой из строк. Действительно, этот минор ненулевой, так как соответствующая матрица является *верхней треугольной*, а любое его окаймление содержит нулевую строку. Поэтому приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк позволяет вычислить ранг матрицы.

Пример 12.3. Найдем ранг матрицы методом элементарных преобразований. Для этого достаточно привести матрицу к ступенчатому виду, воспользовавшись, например, алгоритмом из доказательства теоремы 10.1. Отметим, что вычисления удобно проводить, если текущий элемент равен единице. Поэтому операцию 2^* алгоритма (перестановка строк) будем выполнять не только для замены нулевого текущего элемента (так было заложено в алгоритме), но также и для того, чтобы в качестве текущего элемента получить единицу или другое небольшое целое число. Отметим также, что можно в любое время умножать ту или иную строку матрицы на ненулевое число, в частности сокращать элементы строки на общий множитель, хотя это и не предусматривается алгоритмом. Эта дополнительная операция позволяет упростить вычисления:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \boxed{(1) \leftrightarrow (2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{matrix} (2) \to (2) - 2(1) \\ (4) \to (4) - 4(1) \end{matrix}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \boxed{(2) \leftrightarrow (3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \boxed{(4) \to (4) - (2)} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \sim \boxed{(4) \to (4) - (3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица ступенчатого вида имеет три ненулевые строки, поэтому ранг этой матрицы и, следовательно, матрицы A равен трем. Базисным минором в последней матрице является $M_{1,2,3}^{1,2,4}$.

Замечание 12.1. Приведенные два метода существенно отличаются друг от друга. При нахождении ранга конкретной матрицы методом окаймляющих миноров может потребоваться большое количество вычислений. Это связано с тем, что метод требует вычисления определителей, порядок которых может возрасти до минимального из размеров матрицы. Однако в результате будет найден не только ранг матрицы, но и один из ее базисных миноров.

При нахождении ранга матрицы методом элементарных преобразований требуется гораздо меньше вычислений. Причем разница в объемах вычислений возрастает с ростом размеров матрицы и усложнением ее вида. Но этот метод позволяет найти базисный минор лишь для матрицы ступенчатого вида, полученной в результате элементарных преобразований. Чтобы найти базисный минор исходной матрицы, нужны дополнительные вычисления с учетом уже известного ранга матрицы. В примере 12.3, вычислив наудачу минор третьего порядка, стоящий в тех же строках и столбцах, что и в преобразованной матрице ступенчатого вида, получим

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, он является одним из базисных миноров матрицы A.

Лекция 13

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Координатная, матричная и векторная формы записи. Критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ. Однородные СЛАУ. Критерий существования ненулевого решения однородной СЛАУ.

13.1. Основные определения

Система m ***линейных алгебраических уравнений*** с n неизвестными (сокращенно ***СЛАУ***) представляет собой систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{13.1}$$

Уравнения системы (13.1) называют алгебраическими потому, что левая часть каждого из них есть *многочлен от* n *переменных* $x_1, \ldots, x_n$, а линейными потому, что эти многочлены имеют первую *степень*.

Числа $a_{ij} \in \mathbb{R}$ называют ***коэффициентами СЛАУ***. Их нумеруют двумя индексами: номером уравнения i и номером неизвестного j. Действительные числа $b_1, \ldots, b_m$ называют ***свободными членами уравнений***.

Запись СЛАУ в виде (13.1) будем называть ***координатной***.

СЛАУ называют ***однородной***, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. В противном случае ее называют ***неоднородной***.

Решением СЛАУ, да и вообще всякой системы уравнений, называют такой набор значений неизвестных $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$, при подстановке которых каждое уравнение системы превращается в тождество. Любое конкретное решение СЛАУ также называют ее ***частным решением***.

Решить СЛАУ — значит решить две задачи:

– выяснить, имеет ли СЛАУ решения;

– найти все решения, если они существуют.

СЛАУ называют ***совместной***, если она имеет какие-либо решения. В противном случае ее называют ***несовместной***. Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку нулевой набор значений ее неизвестных всегда является решением. Как показывает следующий пример, для неоднородных СЛАУ возможны различные случаи.

Пример 13.1. Рассмотрим три системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 4; \end{cases} \qquad \text{в) } \begin{cases} x_1 + \ x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения уравнения каждой из этих СЛАУ задают прямые на плоскости $\mathrm{x}_1O\mathrm{x}_2$ (рис. 13.1). Решениям СЛАУ соответствуют точки пересечения указанных прямых. Складывая почленно уравнения в первой системе, получаем $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ — единственное ее

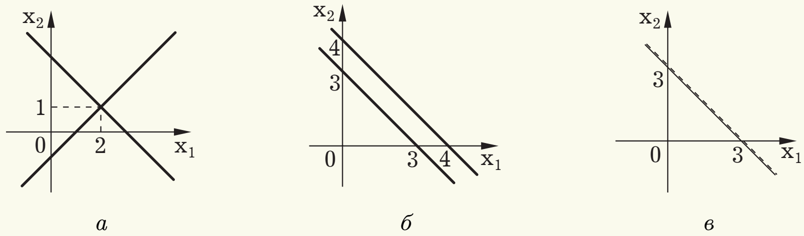


Рис. 13.1

решение. Геометрически это подтверждается тем, что соответствующие прямые пересекаются в единственной точке $(2;1)$ (рис. 13.1, *а*). Из уравнений второй системы следует, что $3 = 4$. Следовательно, эта СЛАУ несовместна, и геометрически это соответствует двум параллельным несовпадающим прямым (рис. 13.1, *б*). Наконец, третья СЛАУ такова, что второе ее уравнение является следствием первого: оно получается из первого умножением на 2. Геометрически это означает, что уравнения задают одну и ту же прямую (рис. 13.1, *в*). Следовательно, координаты любой точки этой прямой удовлетворяют каждому из уравнений системы, т.е. третья СЛАУ совместна и имеет бесконечно много решений. #

Если СЛАУ (13.1) имеет решение, и притом единственное, то ее называют ***определенной***, а если решение неединственное — то ***неопределенной***. При $m = n$, т.е. когда в (13.1) количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, СЛАУ называют ***квадратной***.

13.2. Формы записи СЛАУ

Кроме *координатной формы* (13.1) *записи СЛАУ* часто используют и другие ее представления.

Рассматривая *коэффициенты* a_{ij} *СЛАУ* при одном неизвестном x_j как элементы столбца, а x_j как коэффициент, на который умножается столбец, из (13.1) получаем новую форму записи СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

или, обозначая столбцы соответственно $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$,

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}. \tag{13.2}$$

Таким образом, решение СЛАУ (13.1) можно трактовать как представление столбца $\boldsymbol{b}$ в виде *линейной комбинации* столбцов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Соотношение (13.2) называют ***векторной записью СЛАУ***.

Обратим внимание на то, что слева в каждом уравнении системы (13.1) стоит сумма попарных произведений — так же, как и в *произведении* двух *матриц*. Если взять за основу произведение матриц, то СЛАУ (13.1) можно записать так (см. пример 10.5):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где A — *матрица типа* $m\times n$; $\boldsymbol{x}$ — столбец неизвестных; $\boldsymbol{b}$ — столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют ***матрицей*** (*коэффициентов*) ***СЛАУ*** (13.1) Поскольку A, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{b}$ являются матрицами, то запись СЛАУ (13.1) в виде $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ называют ***матричной***. Если $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, то СЛАУ является однородной и в матричной записи имеет вид $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Приведенные рассуждения показывают, что задачи:

а) решения СЛАУ (13.1);

б) представления столбца в виде линейной комбинации данных столбцов;

в) решения матричных уравнений вида $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

являются просто различной формой записи одной и той же задачи.

13.3. Критерий совместности СЛАУ

Векторная запись СЛАУ позволяет легко получить критерий совместности СЛАУ. Напомним, что содержательный смысл это понятие имеет для *неоднородных СЛАУ* (*однородные СЛАУ* всегда *совместны*).

Матрицу

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называют ***расширенной матрицей СЛАУ*** (13.1). Расширенная матрица полностью характеризует СЛАУ. Это означает, что по этой матрице однозначно (если сохранить обозначения для неизвестных) восстанавливается сама СЛАУ.

Критерий совместности СЛАУ дает следующая ***теорема Кронекера — Капелли***.

Теорема 13.1. Для совместности СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ необходимо и достаточно, чтобы *ранг* ее *матрицы* A был равен рангу ее расширенной матрицы $(A|\boldsymbol{b})$.

◄ Необходимость. Отметим, что ранг матрицы A СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ не превышает ранга расширенной матрицы $(A\,|\,\boldsymbol{b})$. Поэтому нам достаточно показать, что ранг матрицы системы не меньше ранга ее расширенной матрицы. Если система совместна, то, записывая ее в векторной форме, делаем вывод, что существуют такие значения неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, для которых $\boldsymbol{a}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_n x_n = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}_i$ — столбцы матрицы A, $\boldsymbol{b}$ — столбец свободных членов. Это означает, что последний столбец $\boldsymbol{b}$ в расширенной матрице системы является *линейной комбинацией* остальных столбцов. Выберем какой-либо *базисный минор* матрицы A. Для простоты пусть он содержит строки с номерами 1, 2, ..., k и столбцы с теми же номерами, т.е.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме 12.5 о базисном миноре, *базисные столбцы линейно независимы*, в то время как для каждого $j > k$ существуют такие $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\,k}$, что $\boldsymbol{a}_j = \lambda_{1j}\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_{kj}\boldsymbol{a}_k$. Поэтому столбец

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_k x_k + \boldsymbol{a}_{k+1} x_{k+1} + \ldots + \boldsymbol{a}_n x_n =$$
$$= \boldsymbol{a}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_k x_k + (\lambda_{1,k+1}\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_{k,k+1}\boldsymbol{a}_k) x_{k+1} + \ldots + (\lambda_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_{kn}\boldsymbol{a}_k) x_n$$

является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A. Это означает, что M является также базисным минором и в расширенной матрице (во-первых, он ненулевой; во-вторых, если взять какой-либо *окаймляющий минор* M', то либо он будет минором матрицы A, т.е. нулевым, либо он будет содержать столбец $\boldsymbol{b}$ и, следовательно, не может быть ненулевым, так как его столбцы линейно зависимы). Поэтому $\operatorname{Rg}(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \operatorname{Rg} A$.

Достаточность. Пусть $\operatorname{Rg}(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \operatorname{Rg} A$. Выберем в A базисный минор M (как и выше). Тогда он будет базисным и в матрице $(A\,|\,\boldsymbol{b})$. Значит, столбец $\boldsymbol{b}$ можно представить как линейную комбинацию базисных столбцов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$: $\boldsymbol{b} = x_1^\circ \boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k^\circ \boldsymbol{a}_k$. Полагая $x_{k+1}^\circ = x_{k+2}^\circ = \ldots = x_n^\circ = 0$, получаем *решение* $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ исходной *СЛАУ*, поскольку

$$\boldsymbol{b} = x_1^\circ \boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k^\circ \boldsymbol{a}_k = x_1^\circ \boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k^\circ \boldsymbol{a}_k + 0\boldsymbol{a}_{k+1} + \ldots + 0\boldsymbol{a}_n.$$

Это означает, что СЛАУ совместна. ►

Из векторной записи СЛАУ вытекает также следующий критерий существования ненулевых решений у квадратной однородной СЛАУ.

Теорема 13.2. Для существования ненулевого решения у однородной *квадратной СЛАУ* необходимо и достаточно, чтобы ее матрица была *вырождена*.

◄ Из векторной записи СЛАУ (13.2) вытекает, что существование ненулевого решения однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ равносильно существованию равной нулю линейной комбинации столбцов матрицы A, в которой не все коэффициентами нулевые. Другими словами однородная СЛАУ имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда столбцы ее матрицы линейно зависимы. Согласно следствию 12.1 из теоремы о базисном миноре линейная зависимость столбцов квадратной матрицы равносильная ее невырожденности, что и доказывает теорему. ►

Замечание 13.1. Из теоремы 12.7 вытекает, что столбцы матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы меньше количества столбцов. Сопоставляя этот факт с доказательством последней теоремы, приходим к следующему критерию существования ненулевых решений однородной СЛАУ: однородная СЛАУ имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше количества неизвестных.

Лекция 14

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СЛАУ

Свойства решений однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ, теорема о ее существовании. Нормальная фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения однородной СЛАУ. Теорема о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

14.1. Однородные системы

Следующая теорема описывает важнейшее свойство множества *решений однородной системы m линейных алгебраических уравнений* с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{14.1}$$

Теорема 14.1. Если столбцы $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$, ..., $\boldsymbol{x}^{(s)}$ — решения однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, то любая их *линейная комбинация* также является решением этой системы.

◀ Рассмотрим любую линейную комбинацию данных решений: $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \boldsymbol{x}^{(k)}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогда $A\boldsymbol{x} = A\Bigl(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \boldsymbol{x}^{(k)}\Bigr) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k A\boldsymbol{x}^{(k)} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mathbf{0} = \mathbf{0}$, т.е. столбец $\boldsymbol{x}$ является решением однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ▶

Следствие 14.1. Если однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, то она имеет бесконечно много решений.

◀ Если $\boldsymbol{x}$ — ненулевое решение однородной СЛАУ, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ решением однородной СЛАУ является и $\lambda\boldsymbol{x}$, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ решения $\lambda_1\boldsymbol{x}$ и $\lambda_2\boldsymbol{x}$ различаются. ▶

Естественно попытаться найти такие решения $\boldsymbol{x}^{(1)}$, ..., $\boldsymbol{x}^{(s)}$ системы $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, чтобы любое другое решение этой системы представлялось в виде их линейной комбинации и притом единственным образом. Оказывается, что это всегда возможно и приводит к следующему определению.

Определение 14.1. Любой набор из $k = n - r$ *линейно независимых столбцов*, являющихся решениями однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где n — количество неизвестных в системе, а r — *ранг ее матрицы* A, называют ***фундаментальной системой решений*** этой однородной СЛАУ.

При исследовании и решении однородных систем линейных алгебраических уравнений будем использовать следующую терминологию. Если в матрице A однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ фиксировать *базисный минор*, то ему соответствуют *базисные столбцы* и, следовательно, набор неизвестных, отвечающих этим столбцам. Указанные неизвестные называют ***базисными***, или ***зависимыми***, а остальные неизвестные — ***свободными***, или ***независимыми***.

Теорема 14.2. Пусть дана однородная СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ с n неизвестными и $\mathrm{Rg}\, A = r$. Тогда существует набор из $k = n - r$ решений $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ этой СЛАУ, образующих фундаментальную систему решений.

◀ Не ограничивая общности, можно считать, что базисный минор матрицы A сосредоточен в верхнем левом углу, т.е. расположен в строках 1, 2, …, r и столбцах 1, 2, …, r. Тогда остальные строки матрицы A, согласно теореме 12.5 о базисном миноре, являются линейными комбинациями *базисных строк*. Для системы $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ это означает, что если значения $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнениям, соответствующим строкам базисного минора, т.е. первым r уравнениям, то они удовлетворяют и остальным уравнениям. Следовательно, множество решений системы не изменится, если отбросить все уравнения начиная с $(r+1)$-го. Сделав это, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

Разделим неизвестные на базисные $x_1, \ldots, x_r$ и свободные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, перенеся последние в правую часть, а в левой оставив базисные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{14.2}$$

Если мы зададим произвольные значения свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, то относительно базисных неизвестных получим *квадратную СЛАУ* с *невырожденной матрицей*, решение которой существует и единственно. Таким образом, любое решение однородной СЛАУ однозначно определяется значениями свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Рассмотрим следующие $k = n - r$ серий значений свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{cccc} x_{r+1}^{(1)} = 1, & x_{r+1}^{(2)} = 0, & & x_{r+1}^{(k)} = 0, \\ x_{r+2}^{(1)} = 0, & x_{r+2}^{(2)} = 1, & \ldots & x_{r+2}^{(k)} = 0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} = 0; & x_n^{(2)} = 0; & & x_n^{(k)} = 1. \end{array} \tag{14.3}$$

Здесь номер серии указан верхним индексом в скобках, а сами серии значений выписаны в виде столбцов. В каждой серии $x_{r+j}^{(i)} = 1$, если $j = i$, и $x_{r+j}^{(i)} = 0$, если $j \neq i$.

Далее, i-й серии значений свободных неизвестных однозначно соответствуют значения $x_1^{(i)}$, …, $x_r^{(i)}$ базисных неизвестных. Значения свободных и базисных неизвестных в совокупности дают решение системы (14.2). Покажем, что столбцы

$$\boldsymbol{x}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1,\, k}, \tag{14.4}$$

образуют фундаментальную систему решений. Так как эти столбцы по построению являются решениями однородной системы $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ и их количество равно k, то, в соответствии с определением 14.1 фундаментальной системы решений, остается доказать линейную независимость решений (14.4). Пусть есть некоторая линейная комбинация решений $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$, равная нулевому столбцу:

$$\alpha_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}^{(k)} = \mathbf{0}.$$

Тогда левая часть этого равенства является столбцом, компоненты которого с номерами $r+1$, $\ldots$, n равны нулю. Но $(r+1)$-я компонента равна $\alpha_1 1+\alpha_2 0+\ldots+\alpha_k 0=\alpha_1$. Аналогично, $(r+2)$-я компонента равна α_2 и, наконец, k-я компонента равна α_k. Поэтому $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$, что означает линейную независимость решений $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$. ►

Построенная при доказательстве теоремы 14.2 фундаментальная система решений (14.4) имеет достаточно специальный вид, поскольку, согласно (14.3), в любом из решений (14.4) все значения независимых неизвестных равны нулю, кроме одного, которое равно единице. Такие фундаментальные системы решений называют ***нормальными***.

Следствие 14.2. С помощью нормальной фундаментальной системы решений (14.4) однородной СЛАУ (14.1) множество всех решений можно описать формулой

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\ldots+c_k\boldsymbol{x}^{(k)}, \tag{14.5}$$

где постоянные c_i, $i=\overline{1,\,k}$, принимают произвольные значения.

◄ Согласно теореме 14.1, столбец (14.5) является решением рассматриваемой однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Поэтому остается доказать, что любое решение $\boldsymbol{g}=\bigl(g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n\bigr)^{\mathrm{T}}$ этой однородной СЛАУ можно представить в виде (14.5). Рассмотрим столбец $\boldsymbol{x}=g_{r+1}\boldsymbol{x}^{(1)}+\ldots+g_n\boldsymbol{x}^{(k)}$. Этот столбец совпадает со столбцом $\boldsymbol{g}$ по элементам с номерами $r+1, \ldots, n$ и является решением СЛАУ (14.2). Поэтому столбцы $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{x}$ совпадают, так как решения системы (14.2) однозначно определяются набором значений ее свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, а у столбцов $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{x}$ эти наборы совпадают. Следовательно, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{x}=g_{r+1}\boldsymbol{x}^{(1)}+\ldots+g_n\boldsymbol{x}^{(k)}$, т.е. решение $\boldsymbol{g}$ есть линейная комбинация столбцов $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ нормальной фундаментальной системы решений, что завершает доказательство. ►

Однородная СЛАУ (14.1) может иметь не только нормальные фундаментальные системы решений, но и другие фундаментальные системы решений. Оказывается, что утверждение следствия 14.2 имеет место не только для нормальной фундаментальной системы решений, но и для произвольной фундаментальной системы решений, что и утверждает следующая теорема.

Теорема 14.3. Если $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ — произвольная фундаментальная система решений однородной СЛАУ $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, то любое ее решение $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\ldots+c_k\boldsymbol{x}^{(k)}, \tag{14.6}$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — некоторые постоянные. #

Сформулированную теорему называют ***теоремой о структуре общего решения однородной СЛАУ***. Это вызвано тем, что, согласно теоремам 14.1 и 14.3, при заданной фундаментальной системе решений $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ однородной СЛАУ (14.1) выражение

$$\boldsymbol{x}_{\text{оо}}=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\ldots+c_k\boldsymbol{x}^{(k)}, \tag{14.7}$$

где $c_1, \ldots, c_k$ принимают произвольные значения, описывает все множество решений. Соотношение (14.7) называют ***общим решением однородной СЛАУ***.

14.2. Неоднородные системы

Рассмотрим произвольную *СЛАУ* $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Заменив столбец $\boldsymbol{b}$ *свободных членов* нулевым, получим *однородную СЛАУ* $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, соответствующую *неоднородной СЛАУ* $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Справедливо следующее утверждение о структуре произвольного *решения* неоднородной *СЛАУ*.

Теорема 14.4. Пусть столбец $\boldsymbol{x}^{\circ}$ — некоторое решение СЛАУ $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Произвольный столбец $\boldsymbol{x}$ является решением этой СЛАУ тогда и только тогда, когда он имеет представление $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\circ}+\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{y}$ — решение соответствующей однородной СЛАУ $A\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$.

◀ Если $\boldsymbol{x}$ — решение СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, то $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\circ) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}^\circ = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Поэтому столбец $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\circ$ является решением соответствующей однородной СЛАУ, и мы получаем представление $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ + \boldsymbol{y}$.

Наоборот, если $\boldsymbol{y}$ — произвольное решение соответствующей однородной системы, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ + \boldsymbol{y}$ — решение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, так как $A(\boldsymbol{x}^\circ + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}^\circ + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$. ▶

Следствие 14.3. Пусть $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ — решения неоднородной системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Тогда их разность $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''$ является решением соответствующей однородной системы $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

Теорема 14.4 сводит проблему решения СЛАУ к случаю однородной системы: чтобы описать все решения неоднородной СЛАУ, достаточно знать одно ее решение (*частное решение*) и все решения соответствующей однородной СЛАУ.

Чтобы решить неоднородную систему, надо, во-первых, убедиться, что она совместна (например, по теореме 13.1 Кронекера — Капелли), а во-вторых, найти частное решение $\boldsymbol{x}^\circ$ этой системы, чтобы свести ее к однородной системе.

Следствием теорем 14.3 и 14.4 является ***теорема о структуре общего решения неоднородной СЛАУ***.

Теорема 14.5. Пусть $\boldsymbol{x}^\circ$ — частное решение СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ и известна *фундаментальная система решений* $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ соответствующей однородной системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Тогда любое решение СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ + c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \ldots + c_k\boldsymbol{x}^{(k)}, \tag{14.8}$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\, k}$. #

Как и в случае однородной СЛАУ, название теоремы отражает то, что формула

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\circ + \boldsymbol{x}_{\text{оо}}, \quad \boldsymbol{x}_{\text{оо}} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \ldots + c_k\boldsymbol{x}^{(k)}, \tag{14.9}$$

при произвольных постоянных $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\, k}$, описывает все множество решений СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Формулу (14.9) называют ***общим решением СЛАУ***.

Как найти частное решение неоднородной СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? Пусть для соответствующей однородной системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ выбраны *базисные* и *свободные неизвестные*. *Базисный минор* матрицы A является базисным и для *расширенной матрицы* $(A\,|\,\boldsymbol{b})$, если СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *совместна*. Поэтому строки базисного минора определяют те уравнения СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, из которых следуют остальные. Эти остальные можно отбросить. Итак, пусть есть СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

и базисный минор матрицы СЛАУ сосредоточен вверху слева:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

Зададим нулевые значения $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$ для свободных неизвестных и получим СЛАУ с *невырожденной матрицей*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r, \end{cases}$$

имеющей единственное решение. Решая последнюю систему, находим значения $x_1^\circ,\ \ldots,\ x_r^\circ$. Тогда частным решением будет столбец $\bigl(x_1^\circ,\ \ldots,\ x_r^\circ,\ 0,\ \ldots,\ 0\bigr)^{\mathrm{т}}$.

14.3. Как решать СЛАУ ?

В принципе все уже изложено в предыдущих разделах. Однако описанная схема может быть достаточно трудоемкой из-за того, что некоторые вычисления будут несколько раз повторяться. Покажем, как этих повторений можно избежать.

Пусть задана *СЛАУ* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Запишем ее *расширенную матрицу* $(A\,|\,\boldsymbol{b})$. Каждому *элементарному преобразованию строк* расширенной матрицы соответствует аналогичное преобразование уравнений в исходной СЛАУ:

а) умножение i-й строки матрицы на число $\lambda \neq 0$ означает умножение i-го уравнения СЛАУ на это же число;

б) перестановке i-й и k-й строк в матрице отвечает перестановка i-го и k-го уравнений СЛАУ;

в) добавление к i-й строке матрицы ее k-й строки равнозначно замене i-го уравнения его суммой с k-м уравнением СЛАУ.

Указанные преобразования СЛАУ не изменяют множество *решений* этой *СЛАУ*. Поэтому приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований ее строк означает сведение самой СЛАУ к эквивалентной системе, имеющей *ступенчатую матрицу*.

Итак, сначала приводим расширенную матрицу $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ заданной СЛАУ с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому виду $(A'\,|\,\boldsymbol{b}')$. При этих преобразованиях *ранги матриц* не меняются, поэтому $\operatorname{Rg}(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \operatorname{Rg}(A'\,|\,\boldsymbol{b}')$, а $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A'$. Ранги матриц A' и $(A'\,|\,\boldsymbol{b}')$ равны количеству их ненулевых строк. Если эти ранги равны, то по теореме 13.1 Кронекера — Капелли СЛАУ *совместна*, а в противоположном случае — *несовместна*.

Приведение расширенной матрицы СЛАУ к ступенчатому виду преследует две цели: во-первых, позволяет проверить, является ли система совместной; во-вторых, если СЛАУ совместна, мы ее сводим к более простому виду.

Предположим, что, решаемая система совместна. В матрице A' ступенчатого вида выбираем *базисный минор* и фиксируем соответствующие ему *базисные* и *свободные неизвестные* (см. **12.3**). В матрице $(A'\,|\,\boldsymbol{b}')$ ступенчатого вида отбрасываем нулевые строки (им соответствуют тривиальные уравнения) и по получившейся матрице восстанавливаем СЛАУ. В уравнениях этой СЛАУ слагаемые со свободными неизвестными переносим в правые части и получаем систему, матрица которой является *верхней треугольной* и *невырожденной*, так как ее *определитель* совпадает с базисным минором матрицы A'. Последовательно исключая неизвестные, выражаем базисные неизвестные через свободные. Свободные неизвестные обозначаем как произвольные постоянные и записываем общее решение СЛАУ в виде линейной комбинации столбцов, выделяя в правых частях полученных выражений в отдельные столбцы: а) свободные члены; б) коэффициенты при каждой произвольной постоянной. В этой записи столбец свободных членов есть *частное решение СЛАУ*, а столбцы при произвольных постоянных образуют *нормальную фундаментальную систему решений однородной СЛАУ*, соответствующей заданной неоднородной системе.

Если исходная СЛАУ является однородной, то изложенный метод решения чуть упрощается, поскольку в расширенной матрице последний столбец является всегда нулевым и не меняется при элементарных преобразованиях строк. Имея это в виду, его опускают, т.е. все преобразования проводят с *матрицей системы*.

Пример 14.1. Решим однородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти общее решение, запишем матрицу системы и преобразуем ее при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор в преобразованной матрице стоит вверху слева и имеет второй порядок. Это значит, что ранг r матрицы системы равен двум, фундаментальная система решений состоит из $n - r = 4 - 2 = 2$ решений, а сама СЛАУ эквивалентна следующей системе, которая соответствует преобразованной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Базисными неизвестными являются x_1 и x_2, а свободными — x_3 и x_4. Выражаем базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -1{,}5x_3 - x_4, \\ x_2 = -0{,}5x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Вводим обозначения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и записываем общее решение СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 = -1{,}5c_1 - c_2, \\ x_2 = -0{,}5c_1 - 2c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

Используя матричную форму записи, получаем

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1{,}5c_1 - c_2 \\ -0{,}5c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad —$$

нормальная фундаментальная система решений, а c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Пример 14.2. Решим неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу этой СЛАУ при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь видно, что для преобразованной матрицы минор $M_{1,2}^{1,2}$ является базисным. Поэтому $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A \,|\, \boldsymbol{b}) = 2 = r$, и, согласно теореме 13.1 Кронекера — Капелли, СЛАУ совместна. Кроме того, СЛАУ свелась к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \end{cases}$$

которая соответствует преобразованной матрице. Однако можно продолжить преобразования в матрице, упрощая *базисные столбцы* (1-й и 2-й) с помощью элементарных преобразований строк так, чтобы в каждом из них остался один ненулевой элемент, причем нулевые строки можно отбросить:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1{,}5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

По этой матрице восстанавливаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}5x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 + 0{,}5x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Перенося свободные неизвестные x_3, x_4 в правые части уравнений, получаем

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 1{,}5x_3 - x_4, \\ x_2 = 2 - 0{,}5x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Для свободных неизвестных положим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, и тогда

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 1{,}5c_1 - c_2, \\ x_2 = 2 - 0{,}5c_1 - 2c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

или

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 - 1{,}5c_1 - c_2 \\ 2 - 0{,}5c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное общее решение очень наглядно: 1-й столбец — частное решение неоднородной СЛАУ, а два последних — нормальная фундаментальная система решений соответствующей однородной СЛАУ (ср. пример 14.1).

Пример 14.3. Решим неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 5, \end{cases}$$

отличающуюся от системы из примера 14.2 лишь одним коэффициентом.

Преобразуем расширенную матрицу этой СЛАУ при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь видно, что в преобразованной матрице минор $M_{1,2}^{1,2}$ является базисным для матрицы системы, а минор $M_{1,2,3}^{1,2,5}$ — для расширенной матрицы. Поэтому $\operatorname{Rg} A = 2$, $\operatorname{Rg}(A\,|\,\boldsymbol{b}) = 3$ и, согласно теореме 13.1 Кронекера — Капелли, СЛАУ несовместна. Впрочем, несовместность очевидна и так, потому что последней матрице соответствует СЛАУ, в которой третье уравнение имеет вид: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$.

Пример 14.4. Найдем все матрицы, *перестановочные* с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначим искомые матрицы через X. Условие перестановочности означает выполнение матричного равенства $AX = XA$. Чтобы существовало произведение в левой части этого равенства, матрица X должна иметь две строки, а чтобы существовало произведение в правой части — два столбца. Следовательно, X — *квадратная матрица* второго порядка, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

и для ее нахождения требуется решить *матричное уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в этом уравнении и приравнивая элементы, стоящие на одинаковых местах в получающихся матрицах, приходим к равносильной системе четырех уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = x_1 + 3x_2, \\ x_2 + 2x_4 = 2x_1 + 4x_2, \\ 3x_1 + 4x_3 = x_3 + 3x_4, \\ 3x_2 + 4x_4 = 2x_3 + 4x_4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет простой вид, и мы можем отойти от общей схемы решения однородных СЛАУ, продемонстрированной в примере 14.1. Легко увидеть, что если из второго уравнения вычесть удвоенное третье, то получится такое же уравнение, как первое и последнее. Поэтому первые два уравнения в этой системе можно отбросить и тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4, \\ x_2 = 2x_3/3. \end{cases}$$

Итак, x_3, x_4 — свободные, а x_1, x_2 — базисные неизвестные. Для свободных неизвестных положим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и тогда получим ответ в виде

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 + c_2, \\ x_2 = 2c_1/3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} c_2 - c_1 & 2c_1/3 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

где c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Если фиксировать для c_1, c_2 конкретные значения, то из множества всех перестановочных с A матриц будет выделена одна. Например, при $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получается *нулевая матрица*, а при $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$ — *единичная*.

ОГЛАВЛЕНИЕ