

Подготовка к КР по ЛА

вариант 1

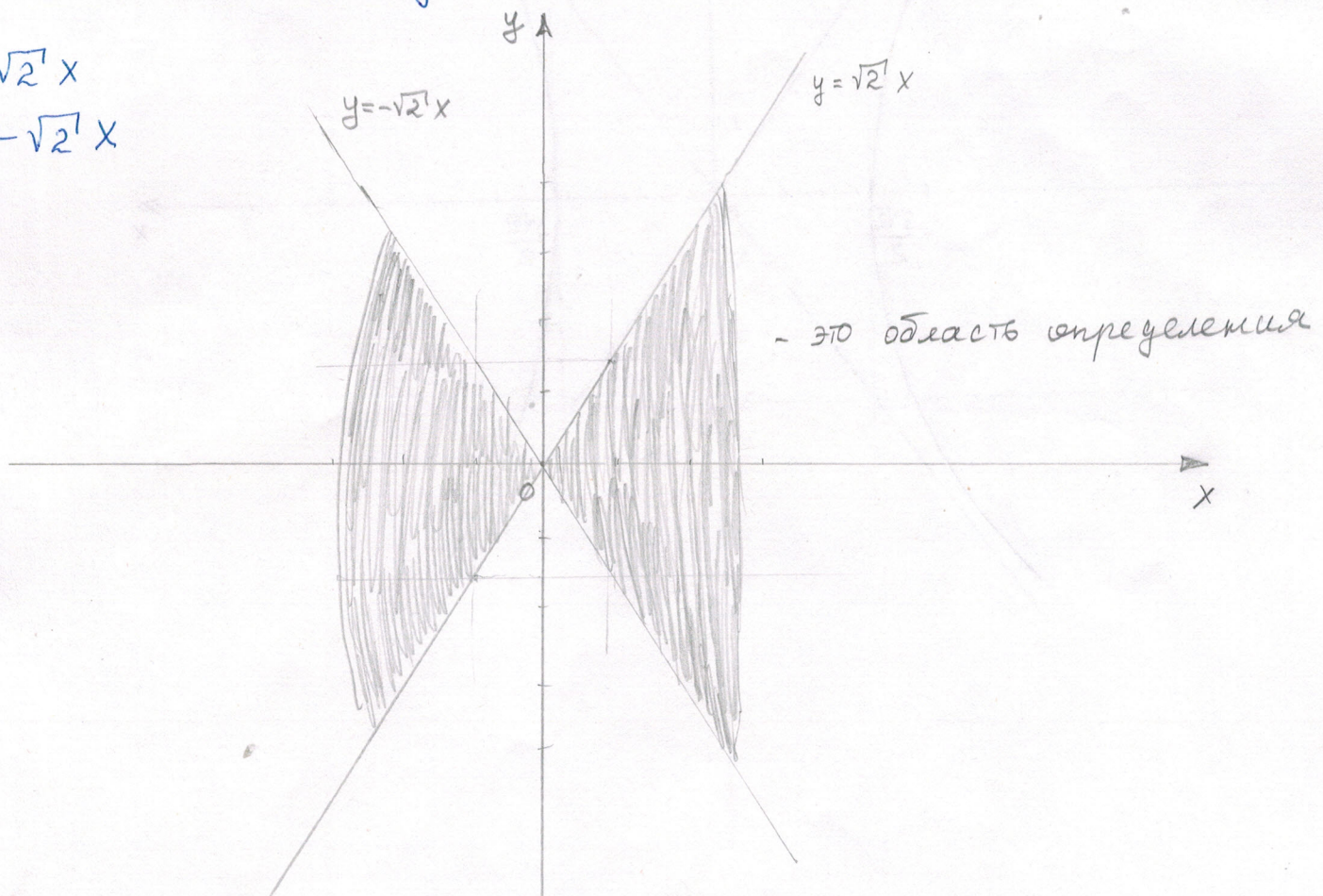
- 1) Найти и изобразить область определения
2) ф-ции $z = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - y^2}}$. Найти и изобразить
линию уровня этой ф-ции, проходящей
через точку (3,3).

Решение: $2x^2 - y^2 > 0$

$$(\sqrt{2}x - y)(\sqrt{2}x + y) > 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y > 0, \\ \sqrt{2}x + y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{2}x - y < 0, \\ \sqrt{2}x + y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2}x \\ y &= -\sqrt{2}x \end{aligned}$$



$$x=3, y=3 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3^2 - 3^2}} = \frac{1}{3}$$

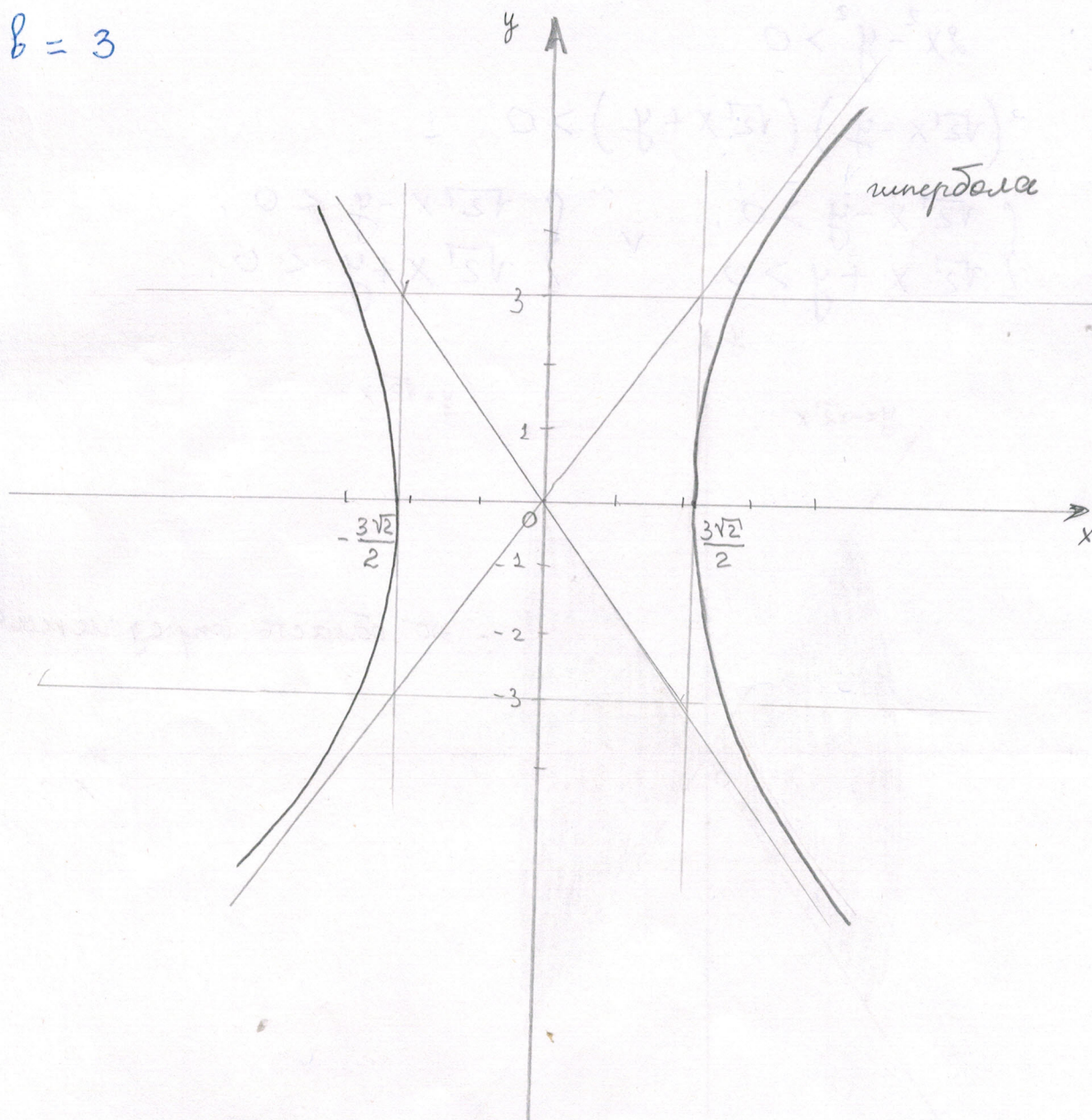
линия уровня: $\frac{1}{\sqrt{2x^2 - y^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2 - y^2 = 9$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - \frac{y^2}{9} = 1} \quad - \text{гипербола}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 3$$



2) Для ф-ции $u = \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$
в точке $M(0,0,0)$ найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{e} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = u'_x \cos \alpha + u'_y \cos \beta + u'_z \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{x_e}{|\vec{e}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos \beta = \frac{y_e}{|\vec{e}|} = \frac{-3}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = -\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_e}{|\vec{e}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$u'_x = \cos x \cos y - \sin x \sin z$$

$$u'_y = \cos y \cos z - \sin x \sin y$$

$$u'_z = \cos x \cos z - \sin y \sin z$$

$$u'_x(0,0,0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$u'_y(0,0,0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$u'_z(0,0,0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2 - 3 + 1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 0 = 0 \quad \text{Ответ}$$

$$\text{grad } u = \nabla u = \{ u'_x, u'_y, u'_z \} = \{ \cos x \cos y - \sin x \sin z, \cos y \cos z - \sin x \sin y, \cos x \cos z - \sin y \sin z \}$$

$$\text{grad } u \big|_{u(0,0,0)} = \{1, 1, 1\} \text{ Ответ}$$

3) Существует ли предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y}$? Ответ обосновать.

Решение

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} = \left| y = kx \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+k)}{x(1-k)} = \frac{1+k}{1-k} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \nexists$ так как он зависит от k .

4) Вычислить все частные производные второго порядка от ф-ции $u = \ln(x + \sqrt{y+z}) + \frac{z}{x}$

Решение:

$$u'_x = \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} - \frac{z}{x^2}$$

$$u'_y = \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}}$$

$$u'_z = \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}} + \frac{1}{x}$$

$$u''_{xx} = \left((x + \sqrt{y+z})^{-1} \right)'_x - \left(\frac{z}{x^2} \right)'_x =$$

$$= -(x + \sqrt{y+z})^{-2} + 2z x^{-3} = -\frac{1}{(x + \sqrt{y+z})^2} + \frac{2z}{x^3}$$

$$u''_{xy} = \left((x + \sqrt{y+z})^{-1} \right)'_y - \left(\frac{z}{x^2} \right)'_y =$$

$$= - (x + \sqrt{y+z})^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}} = - \frac{1}{2(x+\sqrt{y+z})^2 \sqrt{y+z}}$$

$$u''_{xy} = u''_{yx}$$

$$\begin{aligned} u''_{xz} &= \left((x + \sqrt{y+z})^{-1} \right)'_z - \left(\frac{z}{x^2} \right)'_z = \\ &= - (x + \sqrt{y+z})^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}} - \frac{1}{x^2} = \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{y+z} \cdot (x + \sqrt{y+z})^2} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$u''_{xz} = u''_{zx}$$

$$\begin{aligned} u''_{yy} &= \left(\frac{1}{2} (x + \sqrt{y+z})^{-1} \cdot (y+z)^{-1/2} \right)'_y = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x + \sqrt{y+z})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{(y+z)^{1/2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (x + \sqrt{y+z})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (y+z)^{-3/2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x + \sqrt{y+z})^2} \cdot \frac{1}{y+z} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{(y+z)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{y+z} \left(\frac{1}{x + \sqrt{y+z}} - \frac{1}{\sqrt{y+z}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u''_{yz} &= \frac{1}{2} \left((x + \sqrt{y+z})^{-1} \cdot (y+z)^{-1/2} \right)'_z = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot (x + \sqrt{y+z})^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (x + \sqrt{y+z})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (y+z)^{-3/2} = \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{y+z} \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} \right)
 \end{aligned}$$

$$u''_{yz} = u''_{zy}$$

$$\begin{aligned}
 u''_{zz} &= \left(\frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}} + \frac{1}{x} \right)'_z = \\
 &= -\frac{1}{2} (x + \sqrt{y+z})^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (y+z)^{-3/2} = \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{y+z}} \cdot \frac{1}{y+z} \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} \right)
 \end{aligned}$$

5) неявная ф-ция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, 1, 1)$ задана уравнением $\ln x + \ln y + \ln z = 2z - 2$.
Найти дифференциал функции z в точке $(1, 1)$.
С помощью найденного выражения вычислить приближенно $z(1, 1; 1, 1)$.

Решение

$$\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy + \frac{1}{z} dz = 2 dz = 0$$

$$\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy + \left(\frac{1}{z} - 2\right) dz = 0$$

$$\left(\frac{1}{z} - 2\right) dz = -\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy$$

$$\frac{1-2z}{z} dz = -\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy$$

$$dz = -\frac{z}{x(1-2z)} dx - \frac{z}{y(1-2z)} dy$$

$$\begin{aligned} x=1, y=1 &\Rightarrow dz = -\frac{z}{1-2z} dx - \frac{z}{1-2z} dy = \\ &= -\frac{z}{1-2z} (dx + dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=1, 1 &\Rightarrow x=1, \Delta x = dx = 0, 1 \\ y=1, 1 &\Rightarrow y=1, \Delta y = dy = 0, 1 \end{aligned}$$

$$z=1$$

$$dz = dx + dy$$

Ответ

$$dz = 0,1 + 0,1 = 0,2 \approx \Delta z$$

$$z(1,1;1,1) \approx 1 + \Delta z \approx 1 + 0,2 \approx 1,2$$

haben

$$0 = z_b s = z_b \frac{1}{s} + y_b \frac{1}{s} + x_b \frac{1}{s}$$

$$0 = z_b \left(s - \frac{1}{s}\right) + y_b \frac{1}{s} + x_b \frac{1}{s}$$

$$y_b \frac{1}{s} - x_b \frac{1}{s} = z_b \left(s - \frac{1}{s}\right)$$

$$y_b \frac{1}{s} - x_b \frac{1}{s} = z_b \frac{s^2 - 1}{s}$$

$$y_b \frac{s}{(s^2 - 1)s} - x_b \frac{s}{(s^2 - 1)s} = z_b$$

$$= y_b \frac{s}{s^2 - 1} - x_b \frac{s}{s^2 - 1} = z_b \quad \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 = x \\ 2 = y \end{matrix}$$

$$(y_b + x_b) \frac{s}{s^2 - 1} = z_b$$

$$\begin{matrix} 2,0 = x_b = x_1 & 1 = x \Rightarrow 1,1 = x \\ 1,0 = y_b = y_1 & 2 = y \Rightarrow 2,1 = y \end{matrix}$$

$$1 = z$$

$$y_b + x_b = z_b$$