

вариант 2

- ① Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = 7x^2 + 5y^2 + 3z^2$, проходящей ч/з точку $(-3, 3, -3)$.

Решение:

$$u = 7 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-3)^2 = 63 + 45 + 27 = 90 + 45 = 135$$

$$7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 135$$

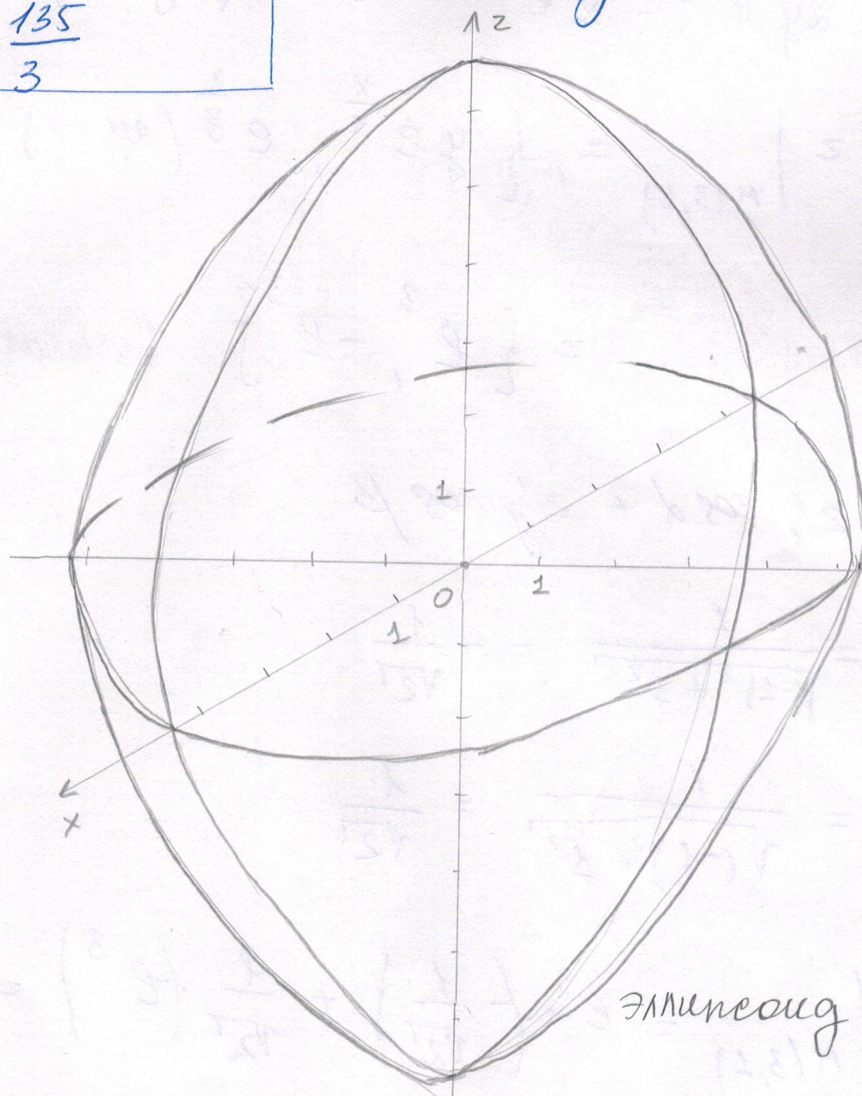
$$\frac{x^2}{\frac{135}{7}} + \frac{y^2}{\frac{135}{5}} + \frac{z^2}{\frac{135}{3}} = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{135}{7}} \approx 4,4$$

$$b = \sqrt{\frac{135}{5}} \approx 5,2$$

$$c = \sqrt{\frac{135}{3}} \approx 6,7$$

эллипсоид



эллипсоид

Поверхность уровня - это эллипсоид.

2) Для ф-ции $z = y^2 e^{\frac{x}{y}}$ в точке $M(3, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\vec{e} = -\vec{i} + \vec{j}$

Решение:

$$\text{grad } z = \nabla z = \{z'_x, z'_y\}$$

$$z'_x = y^2 e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = y e^{\frac{x}{y}}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 2y e^{\frac{x}{y}} + y^2 \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \\ &= 2y e^{\frac{x}{y}} - x e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} (2y - x) \end{aligned}$$

$$\text{grad } z \Big|_{M(3,1)} = \left\{ y e^{\frac{x}{y}}; e^{\frac{x}{y}} (2y - x) \right\} \Big|_{M(3,1)} =$$

$$= \{e^3, -e^3\} \quad \text{Antwort}$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} \Big|_{M(3,1)} = e^3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-e^3) = -\frac{2}{\sqrt{2}} e^3 =$$

$$= -\sqrt{2} e^3 \quad \text{Antwort}$$

3) Существует ли предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$?
 Ответ обосновать.

Решение:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, r \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{r^2}} =$$

$$= e^{-\infty} = 0. \quad \exists \text{ предел и он равен } 0.$$

4) Найти частные производные z'_x и z'_y
 ф-ции $z = f(u(x,y), v(x,y))$, если
 $f = \arctg \frac{u}{v}$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

Решение:

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$$

$$f'_u = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{1}{v}$$

$$f'_v = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \left(-\frac{u}{v^2} \right)$$

$$u'_x = 2x \qquad v'_x = y$$

$$u'_y = 2y \qquad v'_y = x$$

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{(x^2+y^2)^2}{(xy)^2}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot 2x + \frac{1}{1 + \frac{(x^2+y^2)^2}{(xy)^2}} \cdot \left(-\frac{x^2+y^2}{(xy)^2} \right) y$$

$$= \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \cdot \frac{1}{xy} \cdot 2x - \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2 y^2} \cdot y =$$

$$= \frac{2x^2 y}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4} - \frac{y(x^2+y^2)}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4} = \frac{x^2 y - y^3}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4}$$

$$z'_y = \frac{1}{1 + \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2 y^2}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot 2y - \frac{1}{1 + \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2 y^2}} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2 y^2} \cdot x =$$

$$= \frac{x^2 y^2}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4} \cdot \frac{1}{xy} \cdot 2y - \frac{x^2 y^2}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2 y^2} \cdot x =$$

$$= \frac{2xy^2}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4} - \frac{x(x^2+y^2)}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4} = \frac{xy^2 - x^3}{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4}$$

5. Явная ф-ция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, -2, 1)$ задана уравнением $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Найти дифференциал ф-ции z в точке $(1, -2)$. С помощью найденного выражения вычислить приближенно $z(0,9; -1,8)$.

Pemecahan : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$$\underline{3x^2 dx} + \underline{3y^2 dy} + \underline{3z^2 dz} - \underline{3yz dx} - \underline{3xz dy} - \underline{3y dz} = 0.$$

$$3(z^2 - yx)dz + 3(x^2 - yz)dx + 3(y^2 - xz)dy = 0$$

$$(z^2 - yx)dz + (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy = 0$$

$$(z^2 - yx)dz = (xz - y^2)dy + (yz - x^2)dx$$

$$\boxed{dz = \frac{xz - y^2}{z^2 - yx} dy + \frac{yz - x^2}{z^2 - yx} dx}$$

$$x = 1$$

$$y = -2$$

$$dz = \frac{z - 4}{z^2 + 2} dy + \frac{-2z - 1}{z^2 + 2} dx =$$

$$= \frac{1}{z^2 + 2} ((z - 4)dy - (2z + 1)dx)$$

$$x = 0,9 \Rightarrow x = 1, \Delta x = -0,1$$

$$y = -1,8 \Rightarrow y = -2, \Delta y = 0,2$$

$$z = 1$$

$$dz = \frac{1}{3} (-3 dy - 3 dx) = -dy - dx \text{ Rumus}$$

$$dz = +0,1 - 0,2 = -0,1 \approx \Delta z$$

$$z(0,9; -1,8) \approx 1 + \Delta z \approx 1 - 0,1 \approx 0,9. \text{ Rumus}$$