

Часть Б

- ① В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $B = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ к базису $B' = \{1, t+1, (t+1)^2, (t+1)^3\}$.

Стандартный базис в пространстве многочленов степени не выше 3 — это $S = \{1, t, t^2, t^3\}$.

$$T_{S \rightarrow B} \cdot T_{B \rightarrow B'} = T_{S \rightarrow B'}$$

$$T_{B \rightarrow B'} = (T_{S \rightarrow B})^{-1} \cdot T_{S \rightarrow B'}$$

$$B \cdot T_{B \rightarrow B'} = B'$$

$$T_{S \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \quad \vec{e}_4$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $1 \quad t-1 \quad (t-1)^2 \quad (t-1)^3$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $t^2-2t+1 \quad t^3-3t^2+3t-1$

$$T_{S \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1' \quad \vec{e}_2' \quad \vec{e}_3' \quad \vec{e}_4'$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $1 \quad t+1 \quad (t+1)^2 \quad (t+1)^3$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $t^2+2t+2 \quad t^3+3t^2+3t+1$

Найдём $(T_{S \rightarrow B})^{-1}$:

$$|\mathbb{T}_{S \rightarrow B}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - (0) = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = - (-1) = 1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = - (-2) = 2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 1 + 3 + 3) = 1$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\left(T_{S \rightarrow B} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $f(x, y, z) = 3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -6 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ matr. кв. формы

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -\lambda & -6 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(3-\lambda)(-5-\lambda) - 36 - 36 + 9\lambda - (3-\lambda) \cdot 36 - (-5-\lambda)4 = 0$$

$$\lambda(3-\lambda)(5+\lambda) - 72 + 9\lambda - 36(3-\lambda) + 4(5+\lambda) = 0$$

$$\lambda(15 + 3\lambda - 5\lambda - \lambda^2) + 9\lambda - 72 - 108 + 36\lambda + 20 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 - 2\lambda + 15) + 49\lambda - 180 + 20 = 0$$

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 64\lambda - 160 = 0$$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 64\lambda + 160 = 0$$

$$\lambda_1 = -10$$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 + 2\lambda^2 - 64\lambda + 160 & \lambda + 10 \\ - \lambda^3 + 10\lambda^2 & \\ \hline -8\lambda^2 - 64\lambda & \\ - -8\lambda^2 - 80\lambda & \\ \hline 16\lambda + 160 & \\ - 16\lambda + 160 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(\lambda + 10)(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = 0$$

$$(\lambda + 10)(\lambda - 4)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -10, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 4 \quad \text{с.з. матрицы кв. ф.}$$

$$f(x, y, z) = -10x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 - \text{канон. вид кв. ф}$$

$$\lambda = -10$$

$$\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 13x - 2y - 3z = 0, \\ -2x + 10y - 6z = 0, \\ -3x - 6y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -3 & -6 & 5 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 21 & -14 \\ 0 & 64 & -36 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rg} = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x, y - \text{св. н.} \\ z - \text{св. н.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -x + 5y - 3z = 0, \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3y = 2z \\ y = \frac{2}{3}z \end{matrix} \quad x = 5y - 3z = 5 \cdot \frac{2}{3}z - 3z = \frac{10 - 9}{3}z = \frac{1}{3}z = x$$

$$\begin{cases} z = c, \\ y = \frac{2}{3}c, \\ x = \frac{1}{3}c \end{cases} \Rightarrow X_1^{\lambda=-10} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}c \\ \frac{2}{3}c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = 3, \quad E_1^{\lambda=-10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{нормируем}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -x - 2y - 3z = 0, \\ -2x - 4y - 6z = 0, \\ -3x - 6y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rg} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x - \text{св. н.} \\ y, z - \text{св. пер.} \end{matrix}$$

$$-x - 2y - 3z = 0$$

$$x = -2y - 3z$$

$$y = c_1, z = c_2$$

$$x = -2c_1 - 3c_2$$

$$\vec{X}^{\lambda=4} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 1, c_2 = 0$$

$$\vec{E}_2^{\lambda=4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ нормируем } \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1$$

$$\vec{E}_3^{\lambda=4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ нормируем } \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортонормальная матрица

$$V = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array} \right) \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix}$$

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$$

Ортонормальное преобразование

$$\vec{X} = V \vec{X}'$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{14}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' - \frac{3}{\sqrt{10}} z' \\ y = \frac{2}{\sqrt{14}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \\ z = \frac{3}{\sqrt{14}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} z' \end{cases}$$

8) Привести кривую $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат

$$\underbrace{9x^2 - 12xy + 4y^2}_{\text{I кв. ф.}} - \underbrace{6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y}_{\text{II лин. ч.}} = 0 \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \text{ матрица кв. ф.}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(9-\lambda)(4-\lambda) - 36 = 0$$

$$36 - 9\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 13\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 13) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 13 \Rightarrow \text{I часть} = \text{кв. ф.} = 13y'^2 \quad (2)$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 0, \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x \text{ св. пер.} \\ y \text{ зб. пер.} \end{matrix}$$

$$3x - 2y = 0$$

$$3x = 2y$$

$$x = \frac{2}{3}y$$

$$c = 3,$$

$$y = c$$

$$x = \frac{2}{3}c$$

$$\Rightarrow \bar{X}^{\lambda=0} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{E}_1^{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{нормируем}$$

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 13$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ -6x - 9y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} = 1 \quad \begin{matrix} x \text{ св. пер.} \\ y \text{ св. пер.} \end{matrix}$$

$$-2x - 3y = 0$$

$$y = c$$

$$x = -\frac{3}{2}c$$

$$2x = -3y$$

$$x = -\frac{3}{2}y$$

$$X^{\lambda_2=13} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = 2, \quad E_a^{\lambda_2=13} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{нормируем}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Орто скалярная матрица

$$V = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ортogonalное преобразование

$$X = V X'$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}} (2x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}} (3x' + 2y') \end{cases} \quad (3)$$

Подставляем (3) в (1) с учётом (2), получаем:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y = 0$$

$$13y'^2 - 6\sqrt{13}(2x' - 3y') \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} + 4\sqrt{13}(3x' + 2y') \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$$

$$13y'^2 - \cancel{12x'} + 18y' + \cancel{12x'} + 8y' = 0$$

$$13y'^2 + 26y' = 0$$

$$y'^2 + 2y' = 0$$

$$y'^2 + 2 \cdot 1 y' + 1 - 1 = 0$$

$$(y' + 1)^2 - 1 = 0$$

$$y' + 1 = y''$$

$$y''^2 - 1 = 0$$

$$(y'' - 1)(y'' + 1) = 0$$

$$\begin{cases} y'' - 1 = 0 \\ y'' + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = 1 \\ y'' = -1 \end{cases}, \text{ пара параллельных прямых}$$

