

Примерный вариант билета РК №1 по ЛА

Часть А

3) Вектор $\vec{c} = (1, -2)^T \in \mathbb{R}^2$ в базисе

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = (3, 1)^T, \\ \vec{a}_2 = (1, 1)^T. \end{array} \right.$$

Найти координаты $\vec{c}$ в

базисе $\vec{b}_1 = (3, 2)^T$

$$\vec{b}_2 = (5, 4)^T$$

Стандартный базис $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$\vec{e}_1 = (1, 0)^T$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1)^T$$

Известно: $T_{S \rightarrow a} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$T_{S \rightarrow b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$T_{S \rightarrow b} = T_{S \rightarrow a} \cdot T_{a \rightarrow b} \Rightarrow$$

$$T_{a \rightarrow b} = (T_{S \rightarrow a})^{-1} \cdot T_{S \rightarrow b}$$

$$L_b = (T_{a \rightarrow b})^{-1} L_{\vec{a}} \Rightarrow$$

$$L_b = \left((T_{S \rightarrow a})^{-1} \cdot T_{S \rightarrow b} \right)^{-1} L_{\vec{a}} \Rightarrow$$

$$\boxed{L_B = (T_{S \rightarrow B})^{-1} \cdot T_{S \rightarrow A} \cdot L_A}$$

$$\det T_{S \rightarrow B} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$\begin{matrix} A_{11} = 4 & A_{21} = -5 \\ A_{12} = -2 & A_{22} = 3 \end{matrix} \Rightarrow (T_{S \rightarrow B})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_B &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или можно просто решить систему уравнений:

$$\underbrace{\vec{c}}_{\vec{a}_1} = 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} - 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cdot 2 & - \\ \cdot 3 & - \end{cases} \quad \begin{aligned} 10y - 12y &= 2 + 3 \\ -2y &= 5 \end{aligned}$$

$$2x = -1 - 4y = -1 + \frac{20}{2} = 9$$

$$\boxed{x = \frac{9}{2}}$$

$$\boxed{y = -\frac{5}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \vec{c} = (4,5; -2,5)^T$$

4) В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ кв. ф. Q задается как $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$.
Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \end{cases}$$

▲: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ матрица кв. формы

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A' = T_{B \rightarrow B'}^T A T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$Q(y_1, y_2) = -4y_1^2 - 10y_1y_2 - 5y_2^2$$

5) Найти матрицу $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, если A переводит векторы

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = (8, -5)^T \\ \vec{a}_2 = (-3, -2)^T \end{cases} \quad \text{в} \quad \begin{cases} \vec{b}_1 = (-5, 4)^T \\ \vec{b}_2 = (7, -3)^T \end{cases} \quad \text{соответственно.}$$

вектору.

▲: $X \cdot A = B$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \qquad \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2$

$$X \cdot A = B \Rightarrow \boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$$

$$\begin{matrix} A_{11} = 2 & A_{21} = 3 \\ A_{12} = 5 & A_{22} = 8 \end{matrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 + 35 & -15 + 56 \\ 8 - 15 & 12 - 24 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 25 & 41 \\ -7 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6) [помощью критерия Сильвестра определить является ли квадратичная форма $f(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_4^2$ полож. опр., отриц. опр., неопр.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -2 < 0$$

$$\Delta_2 = 6 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$\Delta_4 = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-18 + 2) - (9 - 1) = -2 \cdot (-16) - 8 = 32 - 8 = 24 > 0.$$