Занятие № 6

Квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису

Опр 1: Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэф-ми

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j} , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

наз-ют квадратичной формой.

Квадратичную форму м/о записать в матричном виде:

$$\boxed{f(x) = x^T A x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – столбец, составленный из переменных,

$A = (a_{ij})$ – симметричная матрица порядка n (матрица квадратичной формы),

$i, j = \overline{1, n}$

Ранг матрицы квадратичной формы наз-ют рангом квадратичной формы.

Если A имеет максимальный ранг $= n$, то квадратичная форма наз-ся невырожденной, если $\operatorname{Rang} A < n \Rightarrow$ квадратичная форма наз-ся вырожденной

пример: Квадратичная форма от 3-х переменных:

$$x_1^2 + 4x_1x_3 = x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – матрица кв. формы.

$\operatorname{Rang} A = 2 < 3 \Rightarrow$ кв. форма вырож.

В матричной записи кв. форма имеет вид:

$$x_1^2 + 4x_1x_3 = \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{1\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{3\times 1} =$$

$$1\times 3 \cdot 3\times 3 = 1\times 3$$

$$1\times 3 \cdot 3\times 1 = 1\times 1$$

$$= (x_1 + 2x_3,\ 0,\ 2x_1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1(x_1 + 2x_3) + 0 + 2x_1x_3 =$$

$$= x_1^2 + 4x_1x_3$$

Квадратичные формы подразделяются на различные типы

Опр 2: Квад. форму $f(x) = x^T A x$ наз-ют

— положительно (отрицательно) определённой, если для $\forall$ ненулевого столбца x выполнено нер-во

$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$

— неотрицательно (неположительно) определённой, если $f(x) \geq 0 \quad (f(x) \leq 0)$ для $\forall x$, причём существует ненулевой столбец x, для которого $f(x) = 0$.

— знакопеременной (неопределённой), если $\exists$ такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$

пример: $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$

$f_4(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$

Определим тип квадратичных форм от 3-х переменных:

f_1 – положит. определённая т.к $f_1(x) > 0$, $\forall x_1, x_2, x_3$ (сумма квадратов больше нуля для всех ненулевых столбцов)

f_2 – неотрицательно определённая т.к при $x^T = (0, 0, 10)$, $f_2 = 0$. при других значениях x_1 и x_2, $f_2 > 0$ т.к стоит сумма квадратов x_1^2 и x_2^2.

f_3 и f_4 – знакопеременны

при $x = (1, 0, 0)^T$, $f_3 > 0$, а при

$x = (0,1,0)^T$, $f_3 < 0$

Для f_4: при $x = (1,1,0)^T$, $f_4 > 0$
при $x = (1,-1,0)^T$, $f_4 < 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f_4 – знакопеременна
f_3 – знакопеременна.

Матрицы квадратичных форм:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f_2 и f_4 – вырождены т.к. $Rang\, A_2$
$Rang\, A_4$

Критерий Сильвестра

Теорема: Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$,

где $\Delta_1 = a_{11}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

. . . .

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| \text{ —}$$

угловые (главные) миноры матрицы A квадратичной формы $f(x) = x^T A x$.

Следствие 1: Для того, чтобы кв. ф. была отрицательно определена $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $-\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $-\Delta_3 > 0, \dots,$ $(-1)^n \Delta_n > 0$ (т.е. знаки угловых миноров чередовались, начиная с минуса)

Следствие 2: Невырожденная кв. форма знакопеременна $\Leftrightarrow$, когда для матрицы кв. формы выполнено хотя бы одно из условий:

1) один из угловых миноров $= 0$;
2) один из угловых миноров чётного порядка отрицателен,
3) два угловых минора нечётного порядка имеют разные знаки.

Ауд.
4.218 - 4.224 (чётные)

Д/З
4.219 - 4.223 (нечётн)

Определить, какие кв. ф. яв-ся пол. опр., отр. опр., а какие знакоперем

4.218

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 26 - 25 = 1 > 0$

$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \Rightarrow f_1(x_1, x_2)$ – положи. определена

4.220 $\quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -15 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19 < 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = |A| = -6 - 6 + 15 - 9 = -6 < 0$

$f(x_1, x_2, x_3)$ – знакопеременная (по следствию)

4.222 $f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 9 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 54 - 36 = 18 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 324 + 30 + 30 - 150 - 216 - 9 = 9$

$f(x_1, x_2, x_3)$ – положит. опред. кв. форма.

4.224 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Delta_4 = |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 128 - 64 = 64 > 0$

$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ пол. опр. кв. ф.