

Зачет №

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и ортогонального преобразования.

Квадратичную форму:

$$\begin{aligned} A(x, x) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2, \end{aligned}$$

не имеющую парных произведений, называют квадратичной формой канонического вида.

В частности, если $a_{ii} = \pm 1, 0$ при $i = \overline{1, n}$ то получаем нормальный вид квадратичной формы.

Метод Лагранжа

Этот метод приведения кв. формы к каноническому виду путём замены переменных. Метод состоит в последовательном выделении полных квадратов.

Этапы "Метод Лагранжа"

① Если $a_{11} \neq 0$, то собираем все слагаемые, содержащие переменную x_1 и дополняем до полного квадрата. [остаток] квадратичной формой поступаем аналогично т.е. выделяем полный квадрат при переменных x_2 и т.д.

② Если $a_{11} = 0$, то вместо переменной x_1 выбираем другую переменную, квадрат которой присутствует в форме. Переупорядовываем переменные и выделяем полный квадрат.

③ Если в кв. форме нет ни одного квадрата переменной, тогда перед выделением квадрата делаем промежуточную замену

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \end{cases}$$

$$A(x, x) = x_1 x_2 = (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') = (x_1')^2 - (x_2')^2$$

Ортогональные преобразования квадратичных форм

Как рассматривалось в начале занятия №5 матрица A квадратичной формы при переходе к новому базису изменяется по формуле

$$\Phi = V^{-1} A V = V^T A V$$

V - ортогональная матрица

$$V^{-1} = V^T$$

Φ - диагональная матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Это и наз-ся ортогональным преобразованием квадратичной формы

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow[V]{\text{орт. преобр}} & f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \\ \text{кв. ф.} & & \text{кан. вид} \end{array}$$

Теорема: Любую квадратичную форму ортогональным преобразованием

что приведет к каноническому виду.

Преобразование координат определяется соотношением:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \boxed{X = V X'}$$

Ряд.

2/3

4.210

4.211

4.213

4.215

4.212

4.214

4.216

4.210

Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее кв. ф. к такому виду.

$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \quad \textcircled{=}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

$$\begin{aligned} \textcircled{=} & \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2^2 - 2 \cdot 2x_1x_3 + 4x_3^2 - 4x_3^2 \right) + \\ & + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2 \cdot 2x_2x_3 - 2 \cdot 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - \\ & - x_2^2 - 4x_3^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
 &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2)^2 - 2 \cdot 2x_2x_3 + x_3^2 - x_3^2 - \\
 &- 8x_3^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 - 9x_3^2 = \\
 &= \left((x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2 \right) - \text{канонический вид}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 x_1' = x_1 + x_2 - 2x_3, \\
 x_2' = 2x_2 - x_3, \\
 x_3' = 3x_3
 \end{cases}$$

Выразим x_1, x_2, x_3 ч/з x_1', x_2', x_3' .

$$x_3 = \frac{1}{3} x_3'$$

$$2x_2 = x_2' + x_3 = x_2' + \frac{1}{3} x_3'$$

$$x_2 = \frac{1}{2} x_2' + \frac{1}{6} x_3'$$

$$x_1 = x_1' - x_2 + 2x_3 =$$

$$= x_1' - \frac{1}{2} x_2' - \frac{1}{6} x_3' + \frac{2}{3} x_3' =$$

$$= x_1' - \frac{1}{2} x_2' - \frac{1}{6} x_3' = x_1$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - \frac{1}{2} x_2' - \frac{1}{6} x_3' \\ x_2 = \frac{1}{2} x_2' + \frac{1}{6} x_3' \\ x_3 = \frac{1}{3} x_3' \end{cases}$$

линейное преобразование

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица преобразования

4.211

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \quad \textcircled{=}$$

полем квадратов $\Rightarrow$
делаем замену

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{=} & (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') + x_3'(x_1' - x_2') + x_3'(x_1' + x_2') = \\ & = (x_1')^2 - (x_2')^2 + x_1' x_3' - x_2' x_3' + x_1' x_3' + \\ & + x_2' x_3' = (x_1')^2 - (x_2')^2 + 2x_1' x_3' = \\ & = (x_1')^2 + 2x_1' x_3' + (x_3')^2 - (x_3')^2 - (x_2')^2 = \\ & = (x_1' + x_3')^2 - (x_3')^2 - (x_2')^2 \quad \textcircled{=} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1' + x_3' = x_1'' \\ x_2' = x_2'' \\ x_3' = x_3'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3'' = x_3' = x_3 \\ x_1 = x_1' + x_2' = x_1'' - x_3' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' = x_1'' - x_3' - x_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' - x_3'' + x_2'' \\ x_2 = x_1'' - x_3'' - x_2'' \\ x_3 = x_3'' \end{cases}$$

линейное
преобразование

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица лн.
преобр.

$$\triangle = (x_1'')^2 - (x_3'')^2 - (x_2'')^2 \quad \text{канонический вид}$$

4.2.13 Найти ортогональное преобразование, приводящее след. кв. формы к каноническому виду и написать этот канонический вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$$

1 шаг. Укладываем в з. матрицы A кв. ф.

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 8 & 2 \\ 8 & 5-\lambda & -10 \\ 2 & -10 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

$$\underline{(11-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) - 160 - 160 - 4(5-\lambda) - 100(11-\lambda) - 64(2-\lambda) = 0.}$$

$$(11-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10 - 100) - \underline{320} - \underline{20} + 4\lambda - \underline{128} + 64\lambda = 0.$$

$$(11-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 90) - 468 + 68\lambda = 0$$

$$11\lambda^2 - 77\lambda - 990 - \lambda^3 + 7\lambda^2 + 90\lambda - 468 + 68\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 = 0$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 & \lambda - 9 \\ - \lambda^3 - 9\lambda^2 & \hline \hline -9\lambda^2 - 81\lambda & \\ - -9\lambda^2 + 81\lambda & \\ \hline -162\lambda + 1458 & \\ - -162\lambda + 1458 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

0

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda - 9)(\lambda^2 - 9\lambda - 162) = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda - 162 = 0$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot (-162) = 729 = (27)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm 27}{2}$$

$$\lambda_1 = 18$$

$$\lambda_2 = -9$$

$$(\lambda - 9)(\lambda + 9)(\lambda - 18) = 0$$

Итак: при с.з. $\lambda_1 = 9$ кр 1
 $\lambda_2 = -9$ кр 1
 $\lambda_3 = 18$ кр 1

$\Rightarrow$ кан. вид кв. формы

$$f(x) = 9x_1'^2 - 9x_2'^2 + 18x_3'^2$$

кан. вид
кв. ф.

2 шаг

Находим ортогональное преобразование кв. формы.

Для этого вычислим с.в. matr. кв. ф.

$$\underline{\lambda = 9}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 8 & -4 & -10 \\ 2 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \\ 2 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } A = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x_1, x_2 - \text{баз. пер.} \\ x_3 - \text{своб. пер.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -4x_2 - x_3 = x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrr} 4 & 16 & 4 \\ -4 & -2 & -5 \\ \hline 0 & 18 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 2 & 8 & 2 \\ -2 & -10 & -7 \\ \hline 0 & 18 & 9 \end{array}$$

$$x_3 = c$$

$$X^{\lambda=9} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -\frac{1}{2}c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = 2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \text{соб. вектор.}$$

нормируем его.

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -9$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 8 & 2 \\ 8 & 14 & -10 \\ 2 & -10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \\ 2 & -10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } A = 2 \quad \begin{matrix} x_1, x_2 - \text{св. н.} \\ x_3 - \text{св. н.} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rrr} 10 & 4 & 1 \\ 20 & 8 & 2 \\ -20 & 35 & -25 \\ \hline 0 & -24 & 24 \\ \hline 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 10 & 4 & 1 \\ -10 & -50 & 55 \\ \hline 0 & 54 & -54 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = -4x_2 - x_3 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = -4x_3 - x_3 = -5x_3 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$X_{\lambda=-9} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = x_3$$

$$c = 2$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

нормирован

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 18}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ 8 & -13 & -10 \\ 2 & -10 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 \\ -7 & 8 & 2 \\ 8 & -13 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } A = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x_1, x_2 - \text{f.v.} \\ x_3 - \text{b.v.} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rrr} + & 7 & -35 & -56 \\ & -7 & 8 & 2 \\ \hline & 0 & -27 & -54 \\ \hline & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} & 8 & -40 & -64 \\ & -8 & -13 & -10 \\ \hline & 0 & -27 & -54 \\ \hline & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 0 \\ \quad + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5x_2 + 8x_3 \\ \quad x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$x_3 = c$$

$$\underline{X}^{\lambda=18} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = 1$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

нормируем $\bar{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ортогональная матрица

3 шаг

$$X = U X'$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} (2x_1' - x_2' - 2x_3') \\ x_2 = \frac{1}{3} (-x_1' - 2x_2' - 2x_3') \\ x_3 = \frac{1}{3} (2x_1' + 2x_2' + x_3') \end{cases}$$

ортогональное преобразование

4215

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

1 шаг

Находим с.з. матрицы кв. ф.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица кв. формы}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \det(I - \lambda E) = 0.$$

$$(1-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 16 - 3 \cdot 4(1-\lambda) = 0$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 16} - \sqrt{12} + \sqrt{12\lambda} = 0 \\ &-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = 0. \end{aligned}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 & \lambda + 1 \\ -\lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ \hline -4\lambda^2 - 9\lambda & \\ -4\lambda^2 - 4\lambda & \\ \hline -5\lambda - 5 & \\ -5\lambda - 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$\lambda_1 = 5$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

$$E_2 \quad \lambda = -1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 \neq f_2$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проводим процесс ортогонализации Грамма - Шмидта.

$$g_1 = f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$$

$$(f_2, g_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$(g_1, g_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } A = 2 \quad \begin{array}{l} x_1, x_2 - \text{св. пер.} \\ x_3 - \text{св. пер.} \end{array}$$

$$x_3 = C$$

$$x_2 = x_3 = C$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 = 2C - C = C$$

$$+ \begin{array}{r} -2 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad -4 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{r} -2 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \end{array}$$

$$X^{\lambda=5} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = 1$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

нормируем

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{ортогональная матрица}$$

3 шаг

$$\underline{X} = V \underline{X}'$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-\sqrt{3}x_1' - x_2' + \sqrt{2}x_3') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2x_2' + \sqrt{2}x_3') \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{3}x_1' - x_2' + \sqrt{2}x_3') \end{cases}$$

ортогональное преобразование.

р/з. 4.2.12

$$f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3 =$$

$$= (2x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - 2 \cdot 2x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot 2x_1 \cdot x_3 -$$

$$- 2x_2 \cdot x_3 + 2x_2x_3 - 3x_2x_3 =$$

$$= (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2x_3 = \begin{cases} x_3' + x_2' = x_2 \\ x_3' - x_2' = x_3 \end{cases} =$$