Подготовка к РК №2 по ЛА

Часть А

1) Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M:

а) $S: \ z = 2x^2 - 3y^2 + x + y$, $M(1,1,1)$

$$\begin{cases} z'_x = 2\cdot 2x + 1 = 4x + 1, \\ z'_y = -6y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x\big|_M = 5, \\ z'_y\big|_M = -5. \end{cases}$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)}$$

$$z - 1 = 5(x-1) - 5(y-1)$$

$$z - 1 = 5x - 5 - 5y + 5$$

$$z - 5x + 5y - 1 + \cancel{5} - \cancel{5} = 0$$

$\boxed{z - 5x + 5y - 1 = 0}$ – ур-ние касательной плоскости

Уравнение нормали:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}$$

$\boxed{\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z-1}{-1}}$ ур-ние нормали б) $S: x^3+y^4+z^2=10, \quad M(2,-1,-1)$

$F(x,y,z)=x^3+y^4+z^2-10$

$$\begin{cases} F'_x=3x^2, \\ F'_y=4y^3, \\ F'_z=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x|_M=12, \\ F'_y|_M=-4, \\ F'_z|_M=-2 \end{cases}$$

$$\boxed{F'_x\cdot(x-x_0)+F'_y\cdot(y-y_0)+F'_z\cdot(z-z_0)=0}$$

Уравнение касательной плоскости

$12(x-2)-4(y+1)-2(z+2)=0$

$12x-24-4y-4-2z-4=0$

$12x-4y-2z-32=0$

$\boxed{6x-2y-z-16=0}$ ур-ние касательной плоскости

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}}$$ уравнение нормали

$$\boxed{\frac{x-2}{12}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+2}{-2}}$$ уравнение нормали

в) $S: e^{x+y+z}=\sin(x-2y-z), \quad M(1,2,-3)$

$$\begin{cases} F(x,y,z)=e^{x+y+z}-\sin(x-2y-z), \\ F'_x=e^{x+y+z}-\cos(x-2y-z), \\ F'_y=e^{x+y+z}+2\cos(x-2y-z), \\ F'_z=e^{x+y+z}+\cos(x-2y-z), \end{cases}$$

$F'_x\big|_M = 0$

$F'_y\big|_M = 3$

$F'_z\big|_M = 2$

$0\cdot(x-1)+3(y-2)+2\cdot(z+3)=0$

$3y-\cancel{6}+2z+\cancel{6}=0$

$\boxed{3y+2z=0}$ касательная плоскость

$\boxed{\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}}$ нормаль

2) Исследовать на экстремум следующие ф-ции

а) $z=9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2$

$\begin{cases} z'_x = 18x-4y+16=0, \\ z'_y = -4x+12y-8=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 9x-2y+8=0 \\ -x+3y-2=0 \end{cases} \Big| \cdot 9 \text{ "+"}$

$-2y+27y+8-18=0$

$25y=18-8=10$

$y=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}=y$

$x=3y-2$

$x=\frac{6}{5}-2=-\frac{4}{5}=x$

$\Rightarrow P\left(-\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$ стац. точка

$z''_{xx}=18=A$

$z''_{yy}=12=C$

$z''_{xy} = -4 = B$

$\Rightarrow \mathcal{D} = AC - B^2 = 18 \cdot 12 - 4^2 > 0 \Rightarrow \exists$ экстремум

$A = 18 > 0 \Rightarrow$ минимум

$P\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ – точка минимума

$z = 9 \cdot \frac{16}{25} + 4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{4}{25} - \frac{16 \cdot 4}{25} - \frac{16}{25} - 2 =$

$= \frac{1}{25}\left(9 \cdot 16 - 32 + 24 - 64 - 16 - 50\right) = -\frac{4}{5}$ минимум

Ответ: $P\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ точка минимума

$z = -\frac{4}{5}$ минимум

б) $z = 1 + 6x + 8y - 2x^2 - 4xy - 5y^2$

$\begin{cases} z'_x = 6 - 4x - 4y = 0, \\ z'_y = 8 - 4x - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2x - 2y = 0 \\ 4 - 2x - 5y = 0 \end{cases}$ "–"

$-1 + 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ $\quad x = 4 - 5y = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} = x$

$P\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ стац. точка

$\left.\begin{aligned} z''_{xx} &= A = -4, \\ z''_{y} &= B = -4, \\ z''_{y} &= C = -10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{D} = AC - B^2 = 40 - 16 > 0$

$\Rightarrow \exists$ экстремум

$A < 0 \Rightarrow$ максимум

$P\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ – точка максимума

$z|_P = 1 + 6 \cdot \frac{7}{3} + 8 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{49}{9} - 4 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot \frac{1}{9} =$

$= 15 + \frac{8}{3} - \frac{131}{9} = \frac{135 + 24 - 131}{9} = \frac{28}{9} = 4\frac{1}{9}$

Ответ: $P\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ – точка максимума

$z = \frac{28}{9}$ – максимум

в) $z = y^3 - x^2 + 2xy - y^2 - 3y$

$$\begin{cases} z'_x = -2x + 2y = 0, \\ z'_y = 3y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3y^2 - 2(x-y) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 1 \\ x = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y = -1 \\ x = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} P_1(1,1) \\ P_2(-1,1) \end{matrix}$$ – стац. точки

$$\begin{cases} z''_{xx} = A = -2, \\ z''_{xy} = B = 2, \\ z''_{yy} = C = 6y - 2. \end{cases}$$

$P_1(1,1)$: $D = AC - B^2 = 2(6y-2) - 4 \Big|_{y=1} = -8 - 4 = -12 < 0$

$\Rightarrow$ экстремумов нет

$P_2(-1,-1)$: $D = AC - B^2 = 2(6y-2) - 4 \Big|_{y=-1} = 16 - 4 = 12 > 0$

$\Rightarrow$ экстремум есть

$A < 0 \Rightarrow$ в т. $P_2(-1,-1)$ максимум

$z\Big|_{P_2(-1,-1)} = -\cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{2} - 1 + 3 = 2$

Ответ: $P_2(-1,1)$ – точка максимума

$z\Big|_{P_2(-1,1)} = 2$ – максимум

(3) Исследовать ф-цию на экстремум:

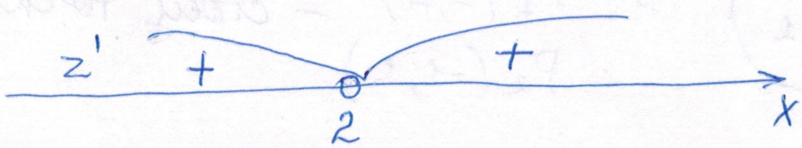
а) $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$

$y = 1 - x$

$z = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 + 1 - 2x$

$z'_x = 4x - 2 = 0$

$x = 2 \Rightarrow y = -1$ $\quad$ $P(2, -1)$ – стац. точка



$\Rightarrow$ нет точек экстремума

б) $z = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$

$F(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 1 + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$2\lambda x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$

$2\lambda y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda}$

$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$

$\frac{2}{4\lambda^2} = 1$

$4\lambda^2 = 2$

$\lambda^2 = \frac{1}{2}$

$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

если $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$	если $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8y^2\lambda - 8\lambda x^2 = -8\lambda(y^2+x^2)\ \begin{matrix} <0 \text{ при } \lambda>0 \\ >0 \text{ при } \lambda<0 \end{matrix}$$

$\to >0$ mi[n]

$\to <0$ max

$F''_{xx} = 2\lambda$

$F''_{xy} = 0$

$F''_{yy} = 2\lambda$

$P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $\begin{cases} F''_{xx} = \sqrt{2}, \\ F''_{xy} = 0, \\ F''_{yy} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$

$d^2F = \sqrt{2}dx^2 + \sqrt{2}dy^2 = \sqrt{2}(dx^2+dy^2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в т. $P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условный минимум

$P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $\begin{cases} F''_{xx} = -\sqrt{2}, \\ F''_{xy} = 0, \\ F''_{yy} = -\sqrt{2}. \end{cases} \Rightarrow d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dx[dy] + F''_{yy}dy^2$

$d^2F = -\sqrt{2}dx^2 - \sqrt{2}dy^2 = -\sqrt{2}(dx^2+dy^2) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в т. $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условный максимум

$z_{min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$

$z_{max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = +\sqrt{2}$

Ответ: $z_{min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$

$z_{max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

в) $z = xy$ при условии $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} - 1\right)$$

$$\begin{cases} F'_x = y + \frac{2}{3}x\cdot\lambda = 0, \\ F'_y = x + 2y\lambda = 0, \\ F'_\lambda = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} - 1 = 0 \end{cases}$$

$y = -\frac{2}{3}x\lambda$

$x + 2\lambda\left(-\frac{2}{3}x\lambda\right) = 0$

$x - \frac{4}{3}x\lambda^2 = 0$

$x\left(1 - \frac{4}{3}\lambda^2\right) = 0$

$x = 0 \quad\quad 1 - \frac{4}{3}\lambda^2 = 0$

$\Downarrow \quad\quad \frac{4}{3}\lambda^2 = 1$

$y = 0 \quad\quad \lambda^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varnothing \quad\quad y = \mp\frac{2}{3}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}x = y$

$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = 1$

$\frac{2}{3}x^2 = 1$

$x^2 = \frac{3}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3}x & 2y \\ \frac{2}{3}x & \frac{2}{3}\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} =$$

$= \frac{4}{3}xy + \frac{4}{3}xy - \frac{8}{3}y^2\lambda - \frac{8}{9}x^2\lambda =$

$= \frac{8}{3}xy - \frac{8}{3}\lambda\left(y^2 + \frac{1}{3}x^2\right)$

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$: $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$: $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Стационарные точки:

$$\left.\begin{array}{l} P_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ P_2\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right\} \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ P_4\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right\} \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} F''_{xx} = \frac{2}{3}\lambda, \\ F''_{xy} = 1, \\ F''_{yy} = 2\lambda. \end{cases} \Rightarrow \boxed{d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dx\,dy + F''_{yy}dy^2}$$

Уравнение связи: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$

$$\frac{2}{3}x\,dx + 2y\,dy = 0$$

$$2y\,dy = -\frac{2}{3}x\,dx$$

$$dy = -\frac{\cancel{2}}{3\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{x}{y}dx$$

$$\boxed{dy = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{y}dx}$$

Для точек P_1 и P_2 $\quad dy = -\frac{1}{3}\cdot(-\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}dx = dy$

Для точек P_3 и P_4: $dy = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx = dy$

$$\boxed{d^2F = \frac{2\lambda}{3}dx^2 + 2\,dx\,dy + 2\lambda\,dy^2}$$

P_1 и P_2: $d^2F = 2\lambda\left(\frac{1}{3}dx^2 + dy^2\right) + 2dx\,dy =$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3}dx^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}dx\right)^2\right) +$$

$$+ 2\cdot dx\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dx = \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}dx^2 + \frac{1}{3}dx^2\right) +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}dx^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}dx^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}dx^2 =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}dx^2 > 0 \Rightarrow$$ условный минимум

P_3 и P_4: $d^2F = 2\lambda\left(\frac{1}{3}dx^2 + dy^2\right) + 2dx\,dy =$

$$= -\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3}dx^2 + \frac{1}{3}dx^2\right) + 2dx\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}dx\right) =$$

$$= \left(-\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)dx^2 = -\frac{6}{\sqrt{3}}dx^2 < 0 \Rightarrow$$

условный максимум

$$z_{min} = z\Big|_{P_1, P_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_{max} = z\Big|_{P_3, P_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $z_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$