

Часть Б

- ① В каких точках поверхности $4x + 9y + 25z = -xyz$ касательная плоскость параллельна одной из координатных плоскостей?

Решение:

$$4x + 9y + 25z + xyz = 0$$

$$F(x, y, z) = 4x + 9y + 25z + xyz$$

$$\begin{cases} F'_x = 4 + yz, \\ F'_y = 9 + xz, \\ F'_z = 25 + xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x|_{M_0} = 4 + y_0 z_0, \\ F'_y|_{M_0} = 9 + x_0 z_0, \\ F'_z|_{M_0} = 25 + x_0 y_0 \end{cases}$$

$$\vec{N}_1 = \{A, 0, 0\}$$

$$\vec{N}_2 = \{0, B, 0\}$$

$$\vec{N}_3 = \{0, 0, C\}$$

① $\vec{N}_1 = \{A, 0, 0\} \Rightarrow \begin{cases} 4 + y_0 z_0 = A, \\ 9 + x_0 z_0 = 0, \\ 25 + x_0 y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 z_0 = A - 4, \\ x_0 z_0 = -9, \\ x_0 y_0 = -25. \end{cases}$

$$\begin{cases} y_0 z_0 = A - 4, \\ z_0 = -\frac{9}{x_0}, \\ y_0 = -\frac{25}{x_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{9 \cdot 25}{x_0^2} = A - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{9 \cdot 25}{A - 4} \Rightarrow x_0 = \pm \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{A - 4}}, \quad A > 4.$$

$$y_0 = -\frac{25 \cdot \sqrt{A - 4}}{\pm 3 \cdot 5} = \mp \frac{5}{3} \sqrt{A - 4}$$

$$z_0 = - \frac{3g \cdot \sqrt{A-4}}{\pm 3 \cdot 5} = \mp \frac{3}{5} \sqrt{A-4}$$

$$U_{\max}: \begin{cases} x_0 = \pm \frac{15}{\sqrt{A-4}}, \\ y_0 = \mp \frac{5}{3} \sqrt{A-4}, \\ z_0 = \mp \frac{3}{5} \sqrt{A-4}. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{A-4} = t$, тогда

$$\begin{cases} x_0 = \pm \frac{15}{t}, \\ y_0 = \mp \frac{5}{3} t, \\ z_0 = \mp \frac{3}{5} t. \end{cases}$$

Проверимось $4x + 9y + 25z = -xyz$

$$4x_0 + 9y_0 + 25z_0 = -x_0 y_0 z_0$$

$$\pm \frac{60}{t} \mp 15t \mp 15t = \mp \frac{15}{\cancel{t}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} t \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} t$$

$$\pm \frac{60}{t} \mp 15t \mp 15t = \mp 15t$$

$$\pm \frac{60}{t} = \pm 15t$$

$$\frac{60}{t} = 15t$$

$$15t^2 = 60$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm 2 \Rightarrow t = 2, t = -2$$

$\emptyset$

$$\sqrt{A-4} = 2$$

$$A-4 = 4$$

$$A = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \pm \frac{15}{2} \\ y_0 = \mp \frac{5}{3} \\ z_0 = \mp \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0 \left(\pm \frac{15}{2}; \mp \frac{5}{3}; \mp \frac{6}{5} \right)$$

Итак: в точках $M_{01} = \left(\frac{15}{2}; -\frac{10}{3}; -\frac{6}{5} \right)$
 $M_{02} = \left(-\frac{15}{2}; \frac{10}{3}; \frac{6}{5} \right)$ ответ

поверхность $4x + 9y + 25z = -xyz$ имеет касательные $\parallel$ координатной плоскости

$$x = 0$$

(2) $\vec{N}_2 = \{0, B, 0\} \Rightarrow \begin{cases} 4 + y_0 z_0 = 0, \\ 9 + x_0 z_0 = B, \\ 25 + x_0 y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 z_0 = B - 9, \\ y_0 z_0 = -4, \\ x_0 y_0 = -25 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_0 z_0 = B - 9, \\ z_0 = -\frac{4}{y_0}, \\ x_0 = -\frac{25}{y_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4 \cdot 25}{y_0^2} = B - 9 \\ y_0^2 = \frac{4 \cdot 25}{B - 9} \\ y_0 = \pm \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{B - 9}}, \quad B > 9 \end{cases}$$

$$z_0 = \mp \frac{\frac{4 \cdot \sqrt{B-9}}{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \mp \frac{2 \sqrt{B-9}}{5}$$

$$x_0 = \mp \frac{\frac{25 \cdot \sqrt{B-9}}{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \mp \frac{5 \sqrt{B-9}}{2}$$

Итак: $\begin{cases} x_0 = \mp \frac{5}{2} \sqrt{B-9}, \\ y_0 = \pm \frac{10}{\sqrt{B-9}}, \\ z_0 = \mp \frac{2}{5} \sqrt{B-9}. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{B-9} = t$, тогда

$$\begin{cases} x_0 = \mp \frac{5}{2} \sqrt{B-9} \\ y_0 = \pm \frac{10}{\sqrt{B-9}} \\ z_0 = \mp \frac{2}{5} \sqrt{B-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \mp \frac{5}{2} t \\ y_0 = \pm \frac{10}{t} \\ z_0 = \mp \frac{2}{5} t \end{cases}$$

Поверхность $4x + 9y + 25z = -xyz$

$$\mp \frac{5}{2} t \pm 9 \cdot \frac{10}{t} \mp 25 \cdot \frac{2}{5} t = \mp \frac{5}{2} t \cdot \frac{10}{t} \cdot \frac{2}{5} t$$

$$\mp 10t \pm \frac{90}{t} \mp 10t = \mp 10t$$

$$\pm \frac{90}{t} = \pm 10t$$

$$\frac{90}{t} = 10t$$

$$90 = 10t^2$$

$$t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = -3$$

ϕ

$$\sqrt{B-9} = 3$$

$$B-9 = 9$$

$$(B=18) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \mp \frac{5}{2} \cdot 3, \\ y_0 = \pm \frac{10}{3}, \\ z_0 = \mp \frac{2}{5} \cdot 3. \end{cases} \Rightarrow P_0 \left(\mp \frac{15}{2}; \pm \frac{10}{3}; \mp \frac{6}{5} \right)$$

Итак: в точках $P_{01} \left(-\frac{15}{2}; \frac{10}{3}; -\frac{6}{5} \right)$ $P_{02} \left(\frac{15}{2}; -\frac{10}{3}; \frac{6}{5} \right)$ Ответ

поверхность $4x + 9y + 25z = -xyz$ имеет касательные // координатной плоскости $y=0$.

③ $\vec{N}_3 = \{0, 0, c\} \Rightarrow \begin{cases} 4 + y_0 z_0 = 0, \\ 9 + x_0 z_0 = 0, \\ 25 + x_0 y_0 = c \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y_0 z_0 = -4, \\ x_0 z_0 = -9, \\ x_0 y_0 = c - 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -\frac{4}{z_0} \\ x_0 = -\frac{9}{z_0} \end{cases} \text{ и } x_0 y_0 = c - 25$

$\frac{4 \cdot 9}{z_0^2} = c - 25 \Rightarrow z_0^2 = \frac{4 \cdot 9}{c - 25}$

$y_0 = -\frac{4 \sqrt{c-25}}{\pm 2 \cdot 3} = \mp \frac{2}{3} \sqrt{c-25} = y_0$ $z_0 = \pm \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{c-25}}$

$x_0 = -\frac{9 \sqrt{c-25}}{\pm 2 \cdot 3} = \mp \frac{3}{2} \sqrt{c-25} = x_0$

$c > 25$

Итак: $\begin{cases} x_0 = \mp \frac{3}{2} \sqrt{c-25} \\ y_0 = \mp \frac{2}{3} \sqrt{c-25} \\ z_0 = \pm \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{c-25}} \end{cases}$

Пусть $\sqrt{c-25} = t$, тогда

$$\begin{cases} x_0 = \mp \frac{3}{2} \sqrt{c-25} \\ y_0 = \mp \frac{2}{3} \sqrt{c-25} \\ z_0 = \pm \frac{6}{\sqrt{c-25}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \mp \frac{3}{2} t \\ y_0 = \mp \frac{2}{3} t \\ z_0 = \pm \frac{6}{t} \end{cases}$$

Поверхность $4x + 9y + 25z = -xyz$

$$\mp \frac{3}{2} t \mp \frac{2}{3} t + \frac{6}{t} \cdot 25 = \mp \frac{3}{2} t \cdot \frac{2}{3} t \cdot \frac{6}{t}$$

$$\mp 6t \mp 6t + \frac{6 \cdot 25}{t} = \mp 6t$$

$$\pm \frac{6 \cdot 25}{t} = \pm 6t$$

$$6 \cdot 25 = 6t^2$$

$$t^2 = 25 \Rightarrow t = \pm 5 \Rightarrow t_1 = 5, t_2 = -5$$

$$\sqrt{c-25} = 5$$

$$c-25 = 25$$

$$(c=50) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \mp \frac{3}{2} \cdot 5 \\ y_0 = \mp \frac{2}{3} \cdot 5 \\ z_0 = \pm \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow N_0 \left(\mp \frac{15}{2}; \mp \frac{10}{3}; \pm \frac{6}{5} \right)$$

Итак: в точках

$$N_{01} \left(-\frac{15}{2}; -\frac{10}{3}; \frac{6}{5} \right)$$

$$N_{02} \left(\frac{15}{2}; \frac{10}{3}; -\frac{6}{5} \right)$$

Ответ

поверхности $4x + 9y + 25z = -xyz$ имеют касательные к координатной плоскости $z=0$.

- 2) Найти такие a, b, c , чтобы однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ касался плоскости $4x + y + 2z = 1$ в точке $(4, 5, -10)$.

Решение:

$$\begin{cases} F'_x = \frac{2}{a^2} x, & F'_x|_{(4,5,-10)} = \frac{2}{a^2} \cdot 4 = \frac{8}{a^2} \\ F'_y = \frac{2}{b^2} y, & \Rightarrow F'_y|_{(4,5,-10)} = \frac{2}{b^2} \cdot 5 = \frac{10}{b^2} \\ F'_z = -\frac{2z}{c^2}, & F'_z|_{(4,5,-10)} = -2 \cdot \frac{(-10)}{c^2} = \frac{20}{c^2} \end{cases}$$

Нормальный вектор плоскости $4x + y + 2z = 1$:

$\vec{n} = \{4, 1, 2\}$. Эта плоскость является касательной плоскостью к однополостному гиперболоиду $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{8}{a^2} = 4, \\ \frac{10}{b^2} = 1, \\ \frac{20}{c^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = 10, \\ c^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{2} \\ b = \pm \sqrt{10} \\ c = \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

Ответ

- 3) Найти те нормали к гиперболлическому параболоиду $x^2 - y^2 = 2z$, которые проходят через точку $(6, 0, 0)$.

Решение

$$F(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z$$

$$F'_x = 2x$$

$$F'_x|_{M_0} = 2x_0$$

$$F'_y = -2y$$

$$F'_y|_{M_0} = -2y_0$$

$$\frac{1-s}{s} = \frac{1+s}{1+s} = \frac{s-x}{s}$$

$$F'_z = -2 \quad F'_z / m_0 = -2$$

Уравнение нормали: $\frac{x-x_0}{F'_x} = \frac{y-y_0}{F'_y} = \frac{z-z_0}{F'_z}$

$$\frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{y-y_0}{-2y_0} = \frac{z-z_0}{-2}$$

Эта нормаль проходит ч/з точку $(6, 0, 0)$

$$\frac{6-x_0}{2x_0} = \frac{0-y_0}{-2y_0} = \frac{0-z_0}{-2}$$

$$\frac{6-x_0}{2x_0} = -\frac{y_0}{-2y_0} = \frac{-z_0}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 1$$

$$\frac{6-x_0}{2x_0} = \frac{1}{2}$$

$$12 - 2x_0 = 2x_0$$

$$12 = 4x_0$$

$$x_0 = 3$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит гиперболическому параболоиду $\Rightarrow x_0^2 - y_0^2 = 2z_0$

$$-y_0^2 = 2z_0 - x_0^2$$

$$y_0^2 = x_0^2 - 2z_0 = 9 - 2 = 7$$

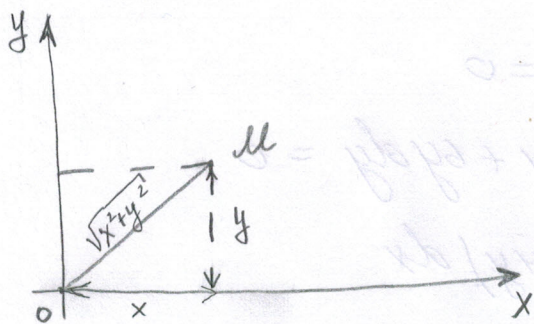
$$y_0 = \pm \sqrt{7}$$

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y \mp \sqrt{7}}{\mp 2\sqrt{7}} = \frac{z-1}{-2}$$

Ответ

6 На кривой $4x^2 + 8xy + 3y^2 + 1 = 0$ найти точки наименьшее удалённые от оси Ox

Решение:



$$S(u, Ox) = |y|$$

Ищем наименьшее значение ф-ции S при условии $4x^2 + 8xy + 3y^2 + 1 = 0$.

$$F(x, y, \lambda) = |y| + \lambda \cdot (4x^2 + 8xy + 3y^2 + 1)$$

$$\begin{cases} F'_x = 8\lambda x + 8\lambda y = 0, \\ F'_y = \pm 1 + 8\lambda x + 6\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = 4x^2 + 8xy + 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$8\lambda(x+y) = 0, \quad \lambda = 0 \vee \boxed{y = -x}$$

ϕ

$$8\lambda x - 6\lambda x = \mp 1$$

$$2\lambda x = \mp 1$$

$$\boxed{x = \mp \frac{1}{2\lambda}}$$

$$\boxed{y = \pm \frac{1}{2\lambda}}$$

$$4 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} + 8 \cdot \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) + 3 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} + 1 = 0$$

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{3}{4\lambda^2} + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{4\lambda^2} = -1$$

$$-\frac{1}{4\lambda^2} = -1$$

$$4\lambda^2 = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\lambda = \pm \frac{1}{2}}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \mp 1, \quad y = \pm 1$$

$$(-1, 1), (1, -1)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 1, \quad y = \mp 1$$

$$(1, -1), (-1, 1)$$

$$F''_{xx} = 8\lambda$$

$$F''_{xy} = 8\lambda$$

$$F''_{yy} = 6\lambda$$

Уравнение связи: $4x^2 + 8xy + 3y^2 + 1 = 0$

$$8x dx + 8y dx + 8x dy + 6y dy = 0$$

$$2(4x+3y) dy = -8(x+y) dx$$

$$dy = -4 \frac{x+y}{4x+3y} dx$$

$$d^2F = F''_{xx} dx^2 + 2F''_{xy} dx dy + F''_{yy} dy^2$$

$$\left. \begin{array}{l} M_1 (-1, 1) \\ M_2 (1, -1) \end{array} \right\} \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow dy = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} M_3 (1, -1) \\ M_4 (-1, 1) \end{array} \right\} \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow dy = 0$$

$$d^2F = F''_{xx} dx^2 = 8\lambda dx^2 > 0 \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{min}$$

$$< 0 \text{ при } \lambda < 0 \quad \text{max}$$

Условный минимум в точках $M_1 (-1, 1)$
 $M_2 (1, -1)$

Ответ: $M_1 (-1, 1)$

$M_2 (1, -1)$

Ответ

7 Среди эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, касающихся плоскости $7x + 4y + 4z = 9$ найти тот, который имеет наибольший объём.

Решение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad M_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$\begin{cases} F'_x = \frac{2}{a^2} x, \\ F'_y = \frac{2}{b^2} y, \\ F'_z = \frac{2}{c^2} z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x|_{M_0} = \frac{2}{a^2} x_0 = 7, \\ F'_y|_{M_0} = \frac{2}{b^2} y_0 = 4, \\ F'_z|_{M_0} = \frac{2}{c^2} z_0 = 4. \end{cases}$$

Нормальный вектор касательной плоскости $\vec{N}_1 = \{F'_x, F'_y, F'_z\}$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{N}_2 = \{7, 4, 4\}$ плоскости $7x + 4y + 4z = 9$. Следовательно,
$$\begin{cases} x_0 = \frac{7a^2}{2}, \\ y_0 = 2b^2, \\ z_0 = 2c^2. \end{cases}$$

M_0 в эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{49a^4}{4a^2} + \frac{4b^4}{b^2} + \frac{4c^4}{c^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{49a^2}{4} + 4b^2 + 4c^2 = 1}$$

уравнение связи

$$V_{\text{эл}} = \frac{4}{3} \pi abc$$

Находим наибольшее значение этой ф-ции.
при условии $\frac{49}{4}a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 1 = 0$

$$F(a, b, c, \lambda) = \frac{4}{3} \pi abc + \lambda \left(\frac{49}{4}a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 1 \right)$$

$$\begin{cases} F'_a = \frac{4}{3} \pi bc + \lambda \cdot \frac{49}{2} \cdot 2a = \frac{4}{3} \pi bc + \frac{49}{2} \lambda a \\ F'_b = \frac{4}{3} \pi ac + 8\lambda b = 0 \\ F'_c = \frac{4}{3} \pi ab + 8\lambda c = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot a \\ \cdot b \\ \cdot c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{49}{2} \lambda a^2 - 8\lambda b^2 &= 0 \\ 8b^2 &= \frac{49}{2} a^2 \\ b^2 &= \frac{49}{16} a^2 \\ b &= \pm \frac{7}{4} a \end{aligned} \quad \begin{aligned} 8\lambda b^2 - 8\lambda c^2 &= 0 \\ b^2 - c^2 &= 0 \\ b = \pm c &\Rightarrow c = \pm \frac{7}{4} a \end{aligned}$$

$$F'_\lambda = \frac{49}{4}a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 1 = 0$$

$$\frac{49}{4}a^2 + 4 \cdot \frac{49}{16}a^2 + 4 \cdot \frac{49}{16}a^2 = 1$$

$$\frac{3 \cdot 49}{4} a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{3 \cdot 4}{49}$$

$$a = \pm \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$b = \pm \frac{7}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = \pm \frac{7}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Так как ищем объём, то все три линейных измерения должны быть положительными (иначе задача теряет смысл)

$$\left. \begin{matrix} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0. \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{7}; b = \frac{\sqrt{3}}{2}; c = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Для определения характера функции в этой точке воспользуемся матричным методом. Построим матрицу:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ \varphi'_z & F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{bmatrix}$$

Если $\det L > 0$, то условный минимум, а
 $\det L < 0$, то условный максимум.

$$\begin{cases} \varphi'_x = \frac{49}{4} \cdot 2a \Big|_M = \frac{49}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7} = 7\sqrt{3}, \\ \varphi'_y = 8 \cdot b \Big|_M = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}, \\ \varphi'_z = 8 \cdot c \Big|_M = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Найдём $F''_{aa}, F''_{ab}, F''_{ac}, F''_{bb}, F''_{cc}$:

$$F''_{aa} = \frac{49}{2} \cdot 2$$

$$F''_{ab} = \frac{4}{3} \cdot 7c \Big|_M = \frac{4}{3} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$F''_{ae} = \frac{4}{3} \pi b \Big|_{\mu} = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\sqrt{3}'}{2} = \left(\frac{2\sqrt{3}'}{3} \pi \right)$$

$$F''_{bb} = 8\lambda$$

$$F''_{be} = \frac{4}{3} \pi a \Big|_{\mu} = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{2\sqrt{3}'}{7} = \left(\frac{8\sqrt{3}'}{21} \pi \right)$$

$$F''_{cc} = 8\lambda$$

Выведем λ : $\frac{4}{3} \pi ab + 8\lambda c = 0$

$$8\lambda c = -\frac{4}{3} \pi ab$$

$$\lambda = \frac{-\frac{4}{3} \pi ab}{8c}$$

$$\lambda = \frac{-\frac{4}{3} \pi \cdot \frac{2\sqrt{3}'}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}'}{2}}{8 \cdot \frac{\sqrt{3}'}{2}}$$

$$\lambda = \frac{-8\sqrt{3}' \pi}{21 \cdot 8} = \left(-\frac{\sqrt{3}' \pi}{21} \right) = \lambda$$

$$F''_{aa} = -\frac{4 \cdot 9 \sqrt{3}'}{2 \cdot 21 \cdot 3} \pi = \left(-\frac{7\sqrt{3}' \pi}{6} \right)$$

$$F''_{bb} = F''_{cc} = \left(-\frac{8\sqrt{3}'}{21} \pi \right)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 7\sqrt{3}' & 4\sqrt{3}' & 4\sqrt{3}' \\ 7\sqrt{3}' & -\frac{7\sqrt{3}'}{6} \pi & \frac{2\sqrt{3}'}{3} \pi & \frac{2\sqrt{3}'}{3} \pi \\ 4\sqrt{3}' & \frac{2\sqrt{3}'}{3} \pi & -\frac{8\sqrt{3}'}{21} \pi & \frac{8\sqrt{3}'}{21} \pi \\ 4\sqrt{3}' & \frac{2\sqrt{3}'}{3} \pi & \frac{8\sqrt{3}'}{21} \pi & -\frac{8\sqrt{3}'}{21} \pi \end{bmatrix}$$

$$\det L = -7\sqrt{3}' M_1 + 4\sqrt{3}' M_2 - 4\sqrt{3}' M_3$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 7\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 \\ 4\sqrt{3} & -\frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 & \frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 \\ 4\sqrt{3} & \frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 & -\frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 \end{vmatrix} = \frac{64 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{21 \cdot \cancel{8}} j_1^2 + \frac{64 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{21 \cdot \cancel{8}} j_1^2 +$$

$$+ \frac{64 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{21 \cdot \cancel{8}} j_1^2 + \frac{64 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{21 \cdot \cancel{8}} j_1^2 - \frac{64 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{21 \cdot \cancel{8}} j_1^2 + \frac{64 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{21 \cdot \cancel{8}} j_1^2 =$$

$$= \frac{3 \cdot 64 \cdot \sqrt{3}}{21} j_1^2 = \frac{64}{7} \sqrt{3} j_1^2$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 7\sqrt{3} & -\frac{7\sqrt{3}}{6}j_1 & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 \\ 4\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 & \frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 \\ 4\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 & -\frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 \end{vmatrix} = -\frac{8 \cdot \cancel{4} \cdot 2 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{8} \cdot \cancel{2} \cdot 3} j_1^2 -$$

$$- \frac{\cancel{4} \cdot 8 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{8} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4}} j_1^2 + \frac{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 3} j_1^2 - \frac{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{3} \cdot 3} j_1^2 -$$

$$- \frac{7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 21} j_1^2 - \frac{7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot 21} j_1^2 =$$

$$= -\frac{16}{3} \cdot 2 j_1^2 \sqrt{3} - \frac{16}{7} \sqrt{3} j_1^2 \cdot 2 = -32\sqrt{3} j_1^2 \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{10}{21} \cdot 32 \cdot \sqrt{3} j_1^2 \cdot (-1) = -\frac{320\sqrt{3}}{21} j_1^2$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 7\sqrt{3} & -\frac{7\sqrt{3}}{6}j_1 & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 \\ 4\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 & -\frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 \\ 4\sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3}j_1 & \frac{8\sqrt{3}}{21}j_1 \end{vmatrix} = \frac{\cancel{4} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \cancel{8} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4} \cdot \cancel{2} \cdot 3} j_1^2 +$$

$$+ \frac{\cancel{4} \cdot 8 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{8} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3}} J_1^2 + \frac{\cancel{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} J_1^2 - \frac{\cancel{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} J_1^2 +$$

$$+ \frac{\cancel{4} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{8} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3}} J_1^2 + \frac{\cancel{4} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{6}} J_1^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3} \cdot 2 J_1^2 +$$

$$+ \frac{16}{3} \sqrt{3} \cdot 2 J_1^2 = \frac{32\sqrt{3}}{3} J_1^2 + \frac{32\sqrt{3}}{1} J_1^2 = 32\sqrt{3} J_1^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1} \right) =$$

$$= \frac{320\sqrt{3} J_1^2}{21}$$

$$\det L = -\cancel{4}\sqrt{3} \cdot \frac{64}{\cancel{4}} \sqrt{3} J_1^2 + 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{320}{21} \sqrt{3} \right) J_1^2 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{320\sqrt{3}}{21} J_1^2$$

$$= -64 \cdot 3 J_1^2 - 2 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \frac{320}{\cancel{21} \cdot \cancel{4}} J_1^2 = -J_1^2 \left(192 + \frac{8 \cdot 320}{1} \right) < 0$$

$$\Rightarrow M \left(\frac{2\sqrt{3}}{1}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \text{точка условного max.}$$

$$\text{ф-ция } V = \frac{4}{3} J_1 \text{ абе}$$

при условии

$$\frac{49}{4} a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 1 = 0.$$

$$V_{\text{наиб}} = \frac{4}{3} J_1 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{1} J_1$$

Эллипсоид, который имеет наибольший объём $V_{\text{наиб}} = \frac{2\sqrt{3}}{1} J_1$ имеет следующие

$$\text{полуоси } a = \frac{2\sqrt{3}}{1}; b = \frac{\sqrt{3}}{2}; c = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

Уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{\frac{12}{49}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} + \frac{z^2}{\frac{3}{4}} = 1.$$

Ответ:

$$\frac{x^2}{\frac{12}{49}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} + \frac{z^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

5 Среди эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, проходящих чз точку $(1, 2, \sqrt{5})$ найти тот, который имеет наименьший объём.

Решение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad M(1, 2, \sqrt{5})$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{5}{c^2} = 1 \Rightarrow b^2 c^2 + 4a^2 c^2 + 5a^2 b^2 = a^2 b^2 c^2 \quad \text{условие связи}$$

$V_{\min} = \frac{4}{3} \pi abc$ - наименьший

Функция Лагранжа:

$$F(a, b, c, \lambda) = \frac{4}{3} \pi abc + \lambda (b^2 c^2 + 4a^2 c^2 + 5a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2)$$

$$\begin{cases} F'_a = \frac{4}{3} \pi bc + 8ac^2\lambda + 10ab^2\lambda - 2ab^2c^2\lambda = 0, \\ F'_b = \frac{4}{3} \pi ac + 2bc^2\lambda + 10a^2b\lambda - 2a^2bc^2\lambda = 0, \\ F'_c = \frac{4}{3} \pi ab + 2cb^2\lambda + 8a^2c\lambda - 2a^2b^2c\lambda = 0 \\ F'_\lambda = b^2 c^2 + 4a^2 c^2 + 5a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \cdot a \\ \cdot b \\ \cdot c \end{array}$$

$$\cancel{8a^2c^2\lambda} + \cancel{10a^2b^2\lambda} - \cancel{2b^2c^2\lambda} - \cancel{10a^2b^2\lambda} = 0$$

$$8a^2 = 2b^2$$

$$b^2 = 4a^2$$

$$b = \pm 2a$$

$$\cancel{8a^2c^2\lambda} + \cancel{10a^2b^2\lambda} - \cancel{2c^2b^2\lambda} - \cancel{8a^2c^2\lambda} = 0$$

$$10a^2 = 2c^2$$

$$c^2 = 5a^2$$

$$c = \pm \sqrt{5} a$$

$$4a^2 \cdot 5a^2 + 4 \cdot a^2 \cdot 5 \cdot a^2 + 5 \cdot a^2 \cdot 4a^2 - a^2 \cdot 4a^2 \cdot 5a^2 = 0$$

$$60a^2 \cdot \cancel{a^2} = 20a^2 \cdot \cancel{a^2} \cdot a^2$$

$$a^2 = 3$$

$$a = \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow$$

$$b = \pm 2\sqrt{3}$$

$$c = \pm \sqrt{15}$$

Поскольку ищем объём, то все три линейных измерения должны быть положительными, то есть $a > 0, b > 0, c > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \\ c = \sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow \mu(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{15})$$

Вычислим λ : $\frac{4}{3} \pi a b + 2b^2 c \lambda + 8a^2 c \lambda - 2a^2 b^2 c \lambda = 0$

$$\lambda(2b^2 c + 8a^2 c - 2a^2 b^2 c) = -\frac{4}{3} \pi a b$$

$$\lambda = \frac{\frac{4}{3} \pi \cdot a \cdot b}{2a^2 b^2 c - 2b^2 c - 8a^2 c}$$

$$\lambda = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{15} - 2 \cdot 4 \cdot 3 \sqrt{15} - 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{15}}$$

$$\lambda = \frac{8\pi}{24\sqrt{15}}$$

$$\lambda = \frac{1}{3\sqrt{15}} \pi$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \psi'_a & \psi'_b & \psi'_c \\ \psi'_a & F''_{aa} & F''_{ab} & F''_{ac} \\ \psi'_b & F''_{ab} & F''_{bb} & F''_{bc} \\ \psi'_c & F''_{ac} & F''_{bc} & F''_{cc} \end{bmatrix}$$

$$\psi'_a = 8ac^2 + 10ab^2 - 2a^2c^2 \Big|_{\mu} = -120\sqrt{3}$$

$$\psi'_b = 2bc^2 + 10ba^2 - 2a^2bc^2 \Big|_{\mu} = -60\sqrt{3}$$

$$\psi'_c = 2b^2c + 8a^2c - 2a^2b^2c \Big|_{\mu} = -24\sqrt{15}$$

$$F''_{aa} = 8c^2\lambda + 10b^2\lambda - 2b^2c^2\lambda \Big|_{\mu} = -\frac{40\mathcal{H}}{\sqrt{15}}$$

$$F''_{ab} = \frac{4}{3}\mathcal{H}c + 20ab\lambda - 4abc^2\lambda \Big|_{\mu} = \frac{4}{3}\mathcal{H}\sqrt{15} - \frac{80\mathcal{H}}{\sqrt{15}}$$

$$F''_{ac} = \frac{4}{3}\mathcal{H}b + 16ac\lambda - 4ab^2c\lambda \Big|_{\mu} = \frac{32\mathcal{H}}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}\mathcal{H}$$

$$F''_{bb} = 2c^2\lambda + 10a^2\lambda - 2a^2c^2\lambda \Big|_{\mu} = -\frac{10\mathcal{H}}{\sqrt{15}}$$

$$F''_{cc} = 2b^2\lambda + 8a^2\lambda - 2a^2b^2\lambda \Big|_{\mu} = -\frac{8\mathcal{H}}{\sqrt{15}}$$

$$F''_{bc} = \frac{4}{3}\mathcal{H}a + 4bc\lambda - 4a^2bc\lambda \Big|_{\mu} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\mathcal{H}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -120\sqrt{3} & -60\sqrt{3} & -24\sqrt{15} \\ -120\sqrt{3} & -\frac{40j}{\sqrt{15}} & \frac{4}{3}j\sqrt{15} - \frac{80j}{\sqrt{15}} & \frac{32j}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}j \\ -60\sqrt{3} & \frac{4}{3}j\sqrt{15} - \frac{80j}{\sqrt{15}} & -\frac{10j}{\sqrt{15}} & \frac{4}{3}\sqrt{3}j \\ -24\sqrt{15} & \frac{32j}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}j & \frac{4}{3}\sqrt{3}j & -\frac{8}{\sqrt{15}}j \end{bmatrix}$$

$$\det L = +120\sqrt{3} M_1 - 60\sqrt{3} M_2 + 24\sqrt{15} M_3$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} -120\sqrt{3} & \frac{4}{3}j\sqrt{15} - \frac{80j}{\sqrt{15}} & \frac{32j}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}j \\ -60\sqrt{3} & -\frac{10j}{\sqrt{15}} & \frac{4}{3}\sqrt{3}j \\ -24\sqrt{15} & \frac{4}{3}\sqrt{3}j & -\frac{8}{\sqrt{15}}j \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\cancel{40} \cdot \cancel{120\sqrt{3}} \cdot \cancel{10j}}{\cancel{15}} - \cancel{24\sqrt{15}} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}j \cdot \left(\frac{4}{3}j\sqrt{15} - \frac{80j}{\sqrt{15}} \right) - \\ &\quad - \cancel{60\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}j \cdot \left(\frac{32j}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}j \right) - \\ &\quad - \cancel{24\sqrt{15}} \cdot \frac{10j}{\sqrt{15}} \cdot \left(\frac{32j}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}j \right) + \\ &\quad + \cancel{120\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}j \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}j - \cancel{60\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}}j \cdot \left(\frac{4}{3}j\sqrt{15} - \frac{80j}{\sqrt{15}} \right) \\ &\quad - \frac{80j}{\sqrt{15}} \Bigg) \approx -5,5 \\ &\quad - \frac{480\sqrt{3}j}{\sqrt{15}} \left(\frac{4}{3}j\sqrt{15} - \frac{80j}{\sqrt{15}} \right) \approx -15,5j \end{aligned}$$

$$\approx \mathcal{J}^2 (480 \cdot (-5,5) + 160,9 \cdot 15,5 + 214,15,5) \approx$$

$$\approx \mathcal{J}^2 (5821,2 - 2640) \approx \boxed{3181,2 \mathcal{J}^2}$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{vmatrix} -120\sqrt{3} & -\frac{40\mathcal{J}}{\sqrt{15}} & \frac{32\mathcal{J}}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}\mathcal{J} \\ -60\sqrt{3} & \frac{4}{3}\mathcal{J}\sqrt{15} - \frac{80\mathcal{J}}{\sqrt{15}} & \frac{4}{3}\sqrt{3}\mathcal{J} \\ -24\sqrt{15} & \frac{32\mathcal{J}}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}\mathcal{J} & -\frac{8}{\sqrt{15}}\mathcal{J} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 120\sqrt{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}}\mathcal{J} \left(\frac{4}{3}\mathcal{J}\sqrt{15} - \frac{80\mathcal{J}}{\sqrt{15}} \right) + \cancel{24\sqrt{15}} \cdot \frac{40\mathcal{J}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}\mathcal{J} - \\ &- 60\sqrt{3} \cdot \left(\frac{32\mathcal{J}}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}\mathcal{J} \right)^2 + 24\sqrt{15} \left(\frac{4}{3}\mathcal{J}\sqrt{15} - \frac{80\mathcal{J}}{\sqrt{15}} \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{32\mathcal{J}}{15} - 8\sqrt{3}\mathcal{J} \right) + 120\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}\mathcal{J} \left(\frac{32\mathcal{J}}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}\mathcal{J} \right) + \\ &+ \cancel{60\sqrt{3}} \cdot \frac{40\mathcal{J}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}}\mathcal{J} \approx \end{aligned}$$

$$\approx \mathcal{J}^2 (-6654,5 + 4434,05 - 3143,6 + 1440,7 \cdot 5,5 - 2640) \approx \boxed{-80,2 \mathcal{J}^2}$$

$$\mathcal{M}_3 = \begin{vmatrix} -120\sqrt{3} & -\frac{40\mathcal{J}}{\sqrt{15}} & \frac{4}{3}\mathcal{J}\sqrt{15} - \frac{80\mathcal{J}}{\sqrt{15}} \\ -60\sqrt{3} & \frac{4}{3}\mathcal{J}\sqrt{15} - \frac{80\mathcal{J}}{\sqrt{15}} & -\frac{10\mathcal{J}}{\sqrt{15}} \\ -24\sqrt{15} & \frac{32\mathcal{J}}{\sqrt{15}} - 8\sqrt{3}\mathcal{J} & \frac{4}{3}\sqrt{3}\mathcal{J} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -120 \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{3} \sqrt{15} - \frac{80}{\sqrt{15}} \right) + 24 \sqrt{15} \cdot \frac{40}{\sqrt{15}} \cdot \frac{10}{\sqrt{15}} - \\
 &- 60 \sqrt{3} \cdot \left(\frac{32}{\sqrt{15}} - 8 \sqrt{3} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \sqrt{15} - \frac{80}{\sqrt{15}} \right) + \\
 &+ 24 \sqrt{15} \cdot \left(\frac{4}{3} \sqrt{15} - \frac{80}{\sqrt{15}} \right)^2 - 120 \sqrt{3} \cdot \frac{10}{\sqrt{15}} \cdot \left(\frac{32}{\sqrt{15}} - 8 \sqrt{3} \right) - \\
 &- \frac{4}{3} \sqrt{3} \cdot 60 \sqrt{3} \cdot \frac{40}{\sqrt{15}} \quad (\approx)
 \end{aligned}$$

$$(\approx) \quad \text{ж}^2 \left(+7440 + 9600 - 8859,4 - 1440,75 + 2951 - \right. \\
 \left. - 2478,7 \right) \approx 7212,15 \text{ ж}^2$$

$$\begin{aligned}
 \det L &\approx 120 \sqrt{3} \cdot 3181,2 \text{ ж}^2 + 60 \sqrt{3} \cdot 80,2 \sqrt{3} \text{ ж}^2 + \\
 &+ 24 \sqrt{15} \cdot 7212,15 \text{ ж}^2 \quad (\approx)
 \end{aligned}$$

$$(\approx) \quad 1346016,8 > 0 \Rightarrow$$

в т. м. $M(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{15})$ ф-ция достигает условного min т.к. $\det L < 0$.

$$V_{\text{эл}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} = 8 \sqrt{15} - \text{наименьший объём}$$

Эллипсоид, который имеет этот наименьший объём имеет вид: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{15} = 1$

Ответ: $\boxed{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{15} = 1}$ Ответ

4

Среди касательных к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{48} + \frac{z^2}{12} = 1, \text{ найти ту, которая}$$

отсекает от положительного октанта

 $x > 0, y > 0, z > 0$ тетраэдр наименьшего объёма.Решение:

Уравнение касательной:

$$F'_x \cdot (x - x_0) + F'_y \cdot (y - y_0) + F'_z \cdot (z - z_0) = 0$$

$$\begin{cases} F'_x = \frac{2}{75} x \Big|_M = \frac{2}{75} x_0, \\ F'_y = \frac{2}{48} y \Big|_M = \frac{2}{48} y_0, \\ F'_z = \frac{2}{12} z \Big|_M = \frac{2}{12} z_0. \end{cases} \quad M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{2}{75} x_0 \cdot (x - x_0) + \frac{2y_0}{48} (y - y_0) + \frac{2}{12} z_0 (z - z_0) = 0$$

пересекает ось Ox при $y = 0$ и $z = 0$

$$\frac{2x_0}{75} x - \frac{2}{75} x_0^2 - \frac{2y_0^2}{48} - \frac{2}{12} z_0^2 = 0$$

$$\frac{2x_0}{75} x = \frac{2}{75} x_0^2 + \frac{2}{48} y_0^2 + \frac{2}{12} z_0^2$$

$$x = \frac{75}{2x_0} \left(\frac{2}{75} x_0^2 + \frac{2}{48} y_0^2 + \frac{2}{12} z_0^2 \right)$$

пересекает ось Oy при $x = 0$ и $z = 0$

$$-\frac{2}{75} x_0^2 - \frac{2}{48} y_0^2 - \frac{2}{12} z_0^2 + \frac{2}{48} y_0 y = 0$$

$$y = \frac{48}{2y_0} \left(\frac{2}{75} x_0^2 + \frac{2}{48} y_0^2 + \frac{2}{12} z_0^2 \right)$$

пересекает ось OZ при $x=0$ и $y=0$

$$-\frac{2}{75}x_0^2 - \frac{2}{48}y_0^2 - \frac{2}{12}z_0^2 + \frac{2}{12}zz_0 = 0$$

$$z = \frac{12}{2z_0} \cdot \left(\frac{2}{75}x_0^2 + \frac{2}{48}y_0^2 + \frac{2}{12}z_0^2 \right)$$

$$V_m = \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{6} \cdot \frac{75}{x_0} \cdot \frac{48}{y_0} \cdot \frac{12}{z_0} \cdot \left(\frac{2}{75}x_0^2 + \frac{2}{48}y_0^2 + \frac{2}{12}z_0^2 \right)$$

$$= \frac{75 \cdot 12}{x_0 \cdot y_0 \cdot z_0} \cdot \left(\frac{2}{75}x_0^2 + \frac{2}{48}y_0^2 + \frac{2}{12}z_0^2 \right) - \text{наименьший}$$

при условии $\frac{x_0^2}{75} + \frac{y_0^2}{48} + \frac{z_0^2}{12} = 1$

$$\frac{2x_0^2}{75} + \frac{2y_0^2}{48} + \frac{2z_0^2}{12} = 2 \underbrace{\left(\frac{x_0^2}{75} + \frac{y_0^2}{48} + \frac{z_0^2}{12} \right)}_{\text{условие связи}} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$V_m = \frac{75 \cdot 12 \cdot 2^3}{x_0 \cdot y_0 \cdot z_0}$$

наименьший при условии

$$\frac{x_0^2}{75} + \frac{y_0^2}{48} + \frac{z_0^2}{12} = 1$$

Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $u(x_0, y_0, z_0) = x_0 y_0 z_0$ при условии $\frac{x_0^2}{75} + \frac{y_0^2}{48} + \frac{z_0^2}{12} = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \rightarrow x \\ y_0 \rightarrow y \\ z_0 \rightarrow z \end{array} \right\} \Rightarrow u(x_0, y_0, z_0) = x_0 y_0 z_0 = xyz$$

Уравнение связи $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{48} + \frac{z^2}{12} = 1$

Функция Лагранжа:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{48} + \frac{z^2}{12} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} F'_x = yz + \frac{2}{75}\lambda x = 0, \\ F'_y = xz + \frac{2}{48}\lambda y = 0, \\ F'_z = xy + \frac{2}{12}\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = \frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{48} + \frac{z^2}{12} - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\cancel{xyz} + \frac{2}{75} \cancel{x^2} - \cancel{xyz} - \frac{2}{48} \cancel{y^2} = 0$$

$$\frac{2}{75} x^2 = \frac{2}{48} y^2$$

$$y^2 = \frac{48}{75} x^2$$

$$y^2 = \frac{2^2 \cdot 12}{5^2 \cdot 3} x^2 = \frac{2^2}{5^2} \cdot 4 x^2 = \frac{2^2 \cdot 2^2}{5^2} x^2$$

$$y = \pm \frac{4}{5} x$$

$$\cancel{xyz} + \frac{2}{75} \cancel{x^2} - \cancel{xyz} - \frac{2}{12} \cancel{z^2} = 0$$

$$\frac{2}{75} x^2 = \frac{2}{12} z^2$$

$$z^2 = \frac{12}{75} x^2 = \frac{2^2 \cdot 3}{5^2 \cdot 3} x^2 = \frac{2^2}{5^2} x^2$$

$$z = \pm \frac{2}{5} x$$

$$\frac{1}{75} x^2 + \frac{1}{48} \cdot \frac{48}{75} \cdot x^2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{75} x^2 = 1$$

$$\frac{3}{75} x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{75}{3} = 25$$

$$(x = \pm 5) \Rightarrow y = \pm \frac{4}{5} \cdot 5 \Rightarrow (y = \pm 4)$$

$$z = \pm \frac{2}{5} \cdot 5 \Rightarrow (z = \pm 2)$$

то получено $x > 0, y > 0, z > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= 5, \\ y &= 4, \\ z &= 2. \end{aligned} \Rightarrow$$

$$M(5, 4, 2).$$

Найдём $\lambda: 6\lambda z = -xy$

$$\lambda = -\frac{xy}{6z}$$

$$\lambda = -\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 2}$$

$$(\lambda = -\frac{5}{3})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ \varphi'_z & F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varphi'_x = \frac{2}{75} x \Big|_M = \frac{2 \cdot 5}{75_{15}} = \left(\frac{2}{15} \right)$$

$$\varphi'_y = \frac{2}{48} y \Big|_M = \frac{2 \cdot 4}{48_{12}} = \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$\varphi'_2 = \frac{2}{12} z \Big|_u = \frac{2}{12} \cdot 2 = \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$F''_{xx} = \frac{2}{75} \lambda \Big|_{\lambda = -\frac{5}{3}} = \left(-\frac{2}{45}\right)$$

$$F''_{yy} = \frac{2}{48} \lambda \Big|_{\lambda = -\frac{5}{3}} = \left(-\frac{5}{72}\right)$$

$$F''_{zz} = \frac{2}{12} \lambda \Big|_{\lambda = -\frac{5}{3}} = \left(-\frac{5}{12}\right)$$

$$F''_{xy} = z \Big|_u = (2)$$

$$F''_{xz} = y \Big|_u = (4)$$

$$F''_{yz} = x \Big|_u = (5)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{45} & 2 & 4 \\ \frac{1}{6} & 2 & -\frac{5}{72} & 5 \\ \frac{1}{3} & 4 & 5 & -\frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

$$\det L = -\frac{2}{15} M_1 + \frac{1}{6} M_2 - \frac{1}{3} M_3$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} \frac{2}{15} & 2 & 4 \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{72} & 5 \\ \frac{1}{3} & 5 & -\frac{5}{12} \end{vmatrix} = + \frac{\frac{2}{15} \cdot \frac{5}{72} \cdot \frac{5}{12}}{3 \cdot 6 \cdot 75} + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3} \cdot 4 +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{72} \cdot 4 - \frac{25}{18} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12} + \frac{5}{54} + \frac{10}{3} + \frac{5}{3 \cdot 6 \cdot 75} \approx$$

$$\approx 3,85$$

$$\mu_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{2}{45} & 4 \\ \frac{1}{6} & 2 & 5 \\ \frac{1}{3} & 4 & -\frac{5}{12} \end{vmatrix} = -\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{12} - \frac{2}{45} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} + 16 \cdot \frac{1}{6} - \frac{8}{3} -$$

$$-\frac{2}{15} \cdot 20 - \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{45} \cdot \frac{5}{12} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{27} - \frac{8}{3} - \frac{1}{3 \cdot 9 \cdot 12} \approx$$

$$\approx -2,85$$

$$\mu_3 = \begin{vmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{2}{45} & 2 \\ \frac{1}{6} & 2 & -\frac{5}{72} \\ \frac{1}{3} & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{20}{15} + \frac{10}{45 \cdot 72} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{6} -$$

$$-\frac{4}{3} + \frac{8}{15} \cdot \frac{15}{72} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{48} \cdot 5 = \frac{1}{3 \cdot 9 \cdot 36} + \frac{8}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9} \approx$$

$$\approx 1,48$$

$$\det L \approx -\frac{2}{15} \cdot 3,85 - \frac{1}{6} \cdot 2,85 - \frac{1}{3} \cdot 1,48 \approx -1,48 < 0$$

$\mu(5, 4, 2)$ - точка условного max ф-ции

$$u = x \cdot y \cdot z$$

В точке $M(5, 4, 2)$ достигается наименьший
объём тетраэдра $V = \frac{75 \cdot 12 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 2} = 180$

$$\text{Итак: } \left. \begin{array}{l} x_0 = 5, \\ y_0 = 4, \\ z_0 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow F'_x = \frac{2}{75} x_0 = \frac{2}{75} \cdot 5 = \left(\frac{2}{15} \right)$$

$$F'_y = \frac{y_0}{24} = \frac{4}{24} = \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$F'_z = \frac{z_0}{6} = \frac{2}{6} = \left(\frac{1}{3} \right)$$

Уравнение касательной:

$$\frac{2}{15}(x-5) + \frac{1}{6}(y-4) + \frac{1}{3}(z-2) = 0$$

$$\frac{2}{15}x - \frac{10}{3} + \frac{1}{6}y - \frac{4}{6} + \frac{1}{3}z - \frac{10}{3} = 0$$

$$4x + 5y + 10z - 20 - 20 - 20 = 0$$

$$4x + 5y + 10z - 60 = 0$$

Ответ: $4x + 5y + 10z - 60 = 0$