

Рубинштейн И. И.

Петров И. И.

Лист 11

часть А

1. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.

1) Квадратичной формой n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется числовое значение, называемое числовой функцией вида:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n + a_{21} x_2 x_1$$

$$+ a_{22} x_2^2 + a_{2n} x_2 x_n + \dots + a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2,$$

a_{ij} - числа, называемые коэфф. квадратичной формы.

2) Матрицей квадратичной формы n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется симметрическая матрица порядка n , элементы главной диагонали которой совпадают с коэффициентами при квадратах переменных, а каждый недиагональный элемент, расположенный в i -й строке, j -м столбце, равен половине коэффициента $x_i x_j$ в квадратичной форме

3) Кв. ф. называется канонической, или норм.

$a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то есть, если матрица кв. ф. диагональная $\Rightarrow f(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$
где не все a_{ii} равны нулю

2. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов:

Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Задачи

N 3. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы век.
 $a_1 = (2, -1, -1, 0)^T$, $a_2 = (-1, 2, -1, 0)^T$, $a_3 = (-1, -1, 2, -1)^T$
евклидова пространства $\mathbb{R}^4$

$$g_1 = a_1 = (2, -1, -1, 0)^T \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, -1, 0)^T$$

$$g_2 = a_2 - \frac{(a_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_3 = a_3 - \frac{(a_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(a_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 = a_3 + \frac{1}{2} (2, -1, -1, 0)^T + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}^T$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (0, 0, -2, -1)^T$$

N4 Найти матрицу перехода от базиса $e_1 = (7, 3)^T, e_2 = (2, 1)^T$ к базису $b_1 = (3, 2)^T, b_2 = (2, 3)^T$ пространства R^2 .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{I-2II, II-3I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{array} \right)$$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

N5. ~~В~~ ~~базисе~~ ~~базиса~~ Линейный опер. A , в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $\begin{pmatrix} -11 & -30 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

Найти матрицу того же л. оператора в базисе

$$e'_1 = -3e_1 + e_2, e'_2 = 5e_1 - 2e_2.$$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad T_{B' \rightarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A' = T_{B \rightarrow B'}^{-1} \cdot A \cdot T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & -30 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

N6. Привести квадратичную форму

$-4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определенной, отрицательно определенной или неопределенной

$$-4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 =$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_2) + 4x_1x_3 = (x_2^2 + 2x_2(x_3 - 2x_1)) \\
 &+ 4x_1x_3 = (x_2 + x_3 - 2x_1)^2 - (x_3 - 2x_1)^2 + 4x_1x_3 = \\
 &= (x_2 + x_3 - 2x_1)^2 - (4x_1^2 - 8x_1x_3) - x_3^2 = \\
 &= (x_2 + x_3 - 2x_1)^2 - (4x_1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x_1x_3 + 4x_3^2) + \\
 &+ 4x_3^2 - x_3^2 = (x_2 + x_3 - 2x_1)^2 - (2x_1 - 2x_3)^2 + 3x_3^2
 \end{aligned}$$

$$z_1 = x_2 + x_3 - 2x_1 \quad z_2 = 2x_1 - 2x_3 \quad z_3 = x_3^2$$

$$z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2 - \text{кан. введ. в форму}$$

$$\begin{cases} x_1 = z_2 - 2\sqrt{z_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = z_1 - \sqrt{z_3} - 2(z_2 - 2\sqrt{z_3}) = z_1 - \sqrt{z_3} - 2z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \sqrt{z_3} \end{cases}$$

линейное преобразование

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -12 \neq 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$\Rightarrow$ операторно
определенный.