

Часть А.

Теория.

11. Квадратичная форма $f(x) = x^T A x$ называется
положительно (отрицательно) определённой, если для $\forall$
ненулевой столбца x выполнено неравенство:

$$\boxed{f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)}$$

Квадратичная форма $f(x) = x^T A x$ называется неопределённой,
если $\exists$ такие столбцы x и y , что:

$$\boxed{f(x) > 0 \quad \text{и} \quad f(y) < 0}$$

12. Пусть A и A' - матрицы оператора A в базисах B и B'
соотв., а $T = T_{B \rightarrow B'}$ - матрица перехода от B к B' ,
тогда формула преобразования матрицы линейного
оператора при переходе к новому базису:

$$A' = T^{-1} A T.$$

Практика

13. $\bar{c} = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} \bar{a}_1 = (3, -2)^T \\ \bar{a}_2 = (-2, -3)^T \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{b}_1 = (7, -2)^T \\ \bar{b}_2 = (-4, 1)^T \end{cases}$

Решение:

$$\bar{c} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{a}_1$ $\bar{a}_2$ $\bar{b}_1$ $\bar{b}_2$

$$\begin{cases} 7x - 4y = 1 \\ -2x + y = -5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7x - 4y = 1 \\ -8x + 4y = -20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x &= -19 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 19 \\ 7x - 2x + y = -5 \end{cases} & \begin{cases} x = 19 \\ y = 33 \end{cases} \end{aligned}$$

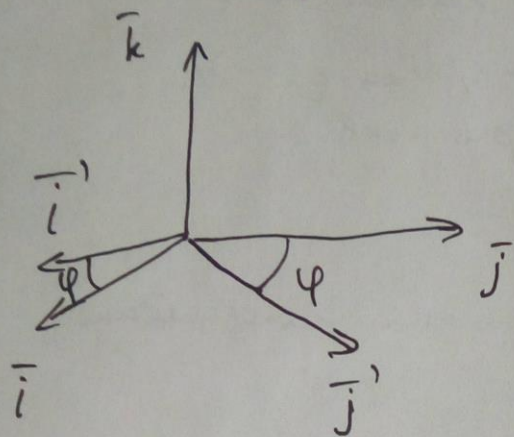
Ответ: $\bar{c} = (19; 33)^T$

24. $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ - прав. ортон. базис $\rightarrow \varphi = 60^\circ$ вокруг $\bar{k}$
 $B' = \{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ $\hookrightarrow \alpha = 90^\circ$ вокруг $\bar{j}'$

Найти: $T_{B \rightarrow B''}$.

Решение:

$$T_{B \rightarrow B''} = T_{B \rightarrow B'} \cdot T_{B' \rightarrow B''}$$



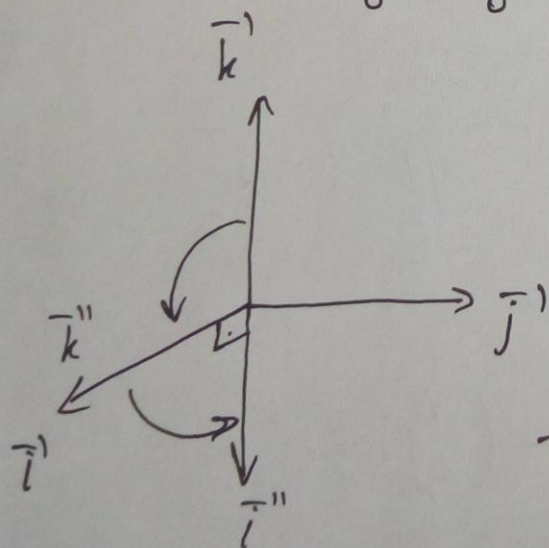
$$\bar{i}' = \cos \varphi \bar{i} - \sin \varphi \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{j}' = \sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{k}' = \bar{k}$$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\bar{i}'' = -\bar{k}'$$

$$\bar{j}'' = \bar{j}'$$

$$\bar{k}'' = \bar{i}'$$

$$T_{B' \rightarrow B''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{B \rightarrow B''} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

25. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$ Найти: собственные числа и векторы этого лин. оператора.

Решение:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -9 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(-1-\lambda) + 9 = 0 \quad -5 + \lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad (\lambda - 2)^2 = 0$$

$\lambda = 2$ - с.з. матрицы лин. оператора.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$3x_1 = -x_2$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3I} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}II+I} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rg = 1 \Rightarrow$$

x_1 - зав. пер.

x_2 - своб. пер.

$$x_2 = c; \quad x_1 = -\frac{1}{3}c$$

$$X^\lambda = c E^\lambda = c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

№6. $f(x) = x_1^2 + 6x_1x_4 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_4^2$

Определить, является ли кв. форма полож. опред./отриц. опред./неопред.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\Delta_4 = \det A =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 = -21 < 0$$

≠ Квадратн. форма является неопределённой
(по 2-му следствию критерия Сильвестра).

Часть Б.

№7. пусть дана кв. форма $x^T A x$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

В n -мерном л.и. пр-ве L с фиксированным базисом b она определяет ф-цию $f(x) = x_b^T A x_b$, заданную через координаты вектора x в базисе b . Пусть U - матрица перехода от b к e , тогда.

$$x_b = U x_e, \text{ тогда}$$

$$x_b^T A x_b = (U x_e)^T A (U x_e) = x_e^T (U^T A U) x_e = x_e^T A' x_e,$$

таким образом получаем формулу:

$$\boxed{A' = U^T A U}$$

$$\sqrt{8}. \quad f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \text{матр. кв. формы.}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} -$$

$$-1 \begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) - ((3-\lambda) + 1) - 1 \cdot (1 + (3-\lambda)) =$$

$$= (3-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) - (3-\lambda + 1) - (1 + (3-\lambda)) =$$

$$= (3-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) - (16 - 8\lambda + \lambda^2) =$$

$$= (\lambda^2 - 6\lambda + 8)(3-\lambda) - (\lambda^2 - 8\lambda + 16) =$$

$$= 3\lambda^2 - 18\lambda + 24 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda - \lambda^2 + 8\lambda - 16 =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 18\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{array}{r} -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 18\lambda + 8 \\ -\lambda^3 + 4\lambda^2 \\ \hline 4\lambda^2 - 18\lambda \\ -4\lambda^2 + 16\lambda \\ \hline -2\lambda + 8 \\ -2\lambda + 8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} \lambda - 4 \\ -\lambda^2 + 4\lambda - 2 \end{array} \right|$$

$$(\lambda - 4)(-\lambda^2 + 4\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 ; \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{2} , \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{2} \quad \text{с.з. матрицы кв. ф.}$$

$$f(x, y, z) = 4x'^2 + (2 + \sqrt{2})y'^2 + (2 - \sqrt{2})z'^2 - \text{канон. вид кв. ф.}$$

$$\underline{\lambda = 4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \text{Rg} = 1 \Rightarrow x - \text{св. н.} ; y, z - \text{св. н.}$$

$$\begin{cases} y = c_1 \\ z = c_2 \\ x = -c_1 - c_2 \end{cases} \Rightarrow X_{\lambda=4} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$